SEINÄJOEN AMMATTIKORKEAKOULU
SEINÄJOKI UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Juhani Paananen: Yhdeksänmenetelmä peruslaskutoimitusten (kerto-, yhteen- ja vähennyslasku) tarkistamisessa

Kertolasku

Et ole varmaankaan koskaan halunnut tarkistaa, onko laskutoimitus $1234 \cdot 5678 = 7005652$ oikein laskettu? Silloin tämä artikkeli ei ole Sinua varten. Älä missään nimessä kiusaa itseäsi lukemalla artikkelia pidemmälle.

Kiusasit itseäsi lukemalla artikkelia ainakin tähän kappaleeseen saakka. Jatka siis loppuun saakka. Moni sortuu tarkistamaan laskun laskimella. Et kai juuri äsken tuottanut pettymystä itsellesi tekemällä samoin? Usko hyvällä. Laita se laskin jo pois. Ja ei. Kännykän laskintakaan ei saa käyttää.

Laskutoimitus voidaan tarkistaa yllättävän helposti ns. 9-menetelmällä. Tämä on aika monelle vieras menetelmä, mutta se on erittäin kätevä tapa tarkistaa laskutoimituksia.

Idea perustuu loppujen lopuksi yksinkertaiseen havaintoon, jonka moni on varmasti tehnyt jo ala-asteella opetellessaan luvun 9 kertotaulua. Kertolaskujen $1 \cdot 9$, $2 \cdot 9$, …, $10 \cdot 9$ lopputulokset saa mekaanisesti aikaiseksi kirjoittamalla ensin allekkain numerot 0…9 (eli kasvavaan järjestykseen) ja sen jälkeen niiden rinnalle numerot 9…0 (eli laskevaan järjestykseen). Tällöin saadaan aikaiseksi taulukko 1. Taulukon kolmannessa sarakkeessa todetaan, että kun lukua 9 kerrotaan kokonaisluvulla 1…10, niin saadaan aina aikaiseksi luku, jonka muodostamien numeroiden summa eli ns. poikkisumma on 9.

Taulukko 1. Yhdeksän kertotaulu, kun kertojana on luku väliltä 1…10

Kertolasku	Tulos	Numeroiden summa
$1 \cdot 9$	09	$0 + 9 = 9$
$2 \cdot 9$	18	$1 + 8 = 9$
$3 \cdot 9$	27	$2 + 7 = 9$
$4 \cdot 9$	36	$3 + 6 = 9$
$5 \cdot 9$	45	$4 + 5 = 9$
$6 \cdot 9$	54	$5 + 4 = 9$
$7 \cdot 9$	63	$6 + 3 = 9$
$8 \cdot 9$	72	$7 + 2 = 9$
$9 \cdot 9$	81	$8 + 1 = 9$
$10 \cdot 9$	90	$9 + 0 = 9$

Entä sitten tästä eteenpäin? Katsotaan yhdeksän kertotaulua pidemmälle. Taulukon 2 kolmas sarake on kovin ns. yhdeksänvoittoinen. Ainoastaan ensimmäinen luku on yhdeksästä poikkeava, mutta sekin on 18 eli jos tämän luvun numerot lasketaan yhteen $1 + 8$, niin päädytään jälleen poikkisumman arvoon 9.

Taulukko 2. Yhdeksän kertotaulu, kun kertojana on luku väliltä 11…20

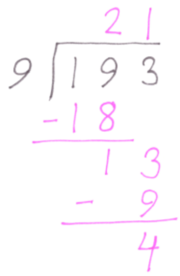
Kertolasku	Tulos	Numeroiden summa
$11 \cdot 9$	99	$9 + 9 = 18$
$12 \cdot 9$	108	$1 + 0 + 8 = 9$
$13 \cdot 9$	117	$1 + 1 + 7 = 9$
$14 \cdot 9$	126	$1 + 2 + 6 = 9$
$15 \cdot 9$	135	$1 + 3 + 5 = 9$
$16 \cdot 9$	144	$1 + 4 + 4 = 9$
$17 \cdot 9$	153	$1 + 5 + 3 = 9$
$18 \cdot 9$	162	$1 + 6 + 2 = 9$
$19 \cdot 9$	171	$1 + 7 + 1 = 9$
$20 \cdot 9$	180	$1 + 8 + 0 = 9$

Ei ryhdytä tässä vaiheessa sen tarkemmin asiaa perustelemaan, mutta luvulla 9 jaolliset luvut ovat todellakin kaikki sellaisia, että niiden numeroiden poikkisummaksi joko suoraan tai useampien summausvaiheiden kautta saadaan aina 9.

Jos tutkitaan vaikkapa lukua 67982342454, niin numerot yhteen laskemalla saadaan summaksi $6 + 7 + 9 + 8 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 5 + 4 = 54$, jonka numerot jälleen yhteen laskemalla antavat $5 + 4 = 9$. Näin ollen tiedetään, että luku 67982342454 on jaollinen 9:llä. Laskimella voi itse kukin tarkistaa, että $\frac{67982342454}{9}$ antaa vastaukseksi kokonaisluvun 7553593606.

”*Eikö tämä ole ihan kertakaikkisen joutavaa filosofiaa? Mitä hyötyä tästä on? Miksi ihmeessä edes luen tätä artikkelia?*”, ajattelet varmaankin?

Tuska lisää tietoa, joten jatketaan pohdiskelua. Olemme tähän asti keskittyneet vain yhdeksällä jaollisiin lukuihin. Suurin osa luvuista ei ole yhdeksällä jaollisia. Itse asiassa vain joka yhdeksäs kokonaisluku on jaollinen yhdeksällä. Tutkitaanpa, mitä tapahtuu, kun jaetaan mielivaltainen luku 9:llä. Olkoon tämä mielivaltainen luku vaikkapa 193. Koska pidän itsestäni ja ennen kaikkea omasta käsialastani, lasken lukijoiden riemuksi jakokulmassa jakolaskun $\frac{193}{9}$. Tätä voidaan ihastella kuvassa 1.



Kuva 1. Jakokulmassa laskemisen suloista esteettisyyttä.

Jos muistaa vielä jakokulmassa laskemisen periaatteen, voi kuvan perusteella päätellä, että $\frac{193}{9} = 21\frac{4}{9}$ eli siis jakojäännökseksi tuli luku 4.

Tutkitaanpa edelleen lukua 193. Lasketaan numerot yhteen. $1 + 9 + 3 = 13$ ja jatketaan yhteenlaskua vielä saadun summan osalta $1 + 3 = 4$. Saatiin siis sama luku kuin jakojäännös 9:llä jaettaessa. Onko tämä sattumaa?

Tämä ei ole sattumaa. Tämä on Satumaa, sillä toisin kuin saduissa, näin käy joka kerta mutta myös aina. Vakuutut varmasti asiasta, kun repäisemme hatusta sattumanvaraisen luvun 564589 ja laskemme summan $5 + 6 + 4 + 5 + 8 + 9 = 37$ ja jatkamme nauraen laskemalla $3 + 7 = 10$ ja toteamalla hämmentyneenä, että $1 + 0 = 1$ eli jakojäännökseksi tulisi muka 1. Tämä kuulostaa uskottavalta, sillä laskin kertoo, että $\frac{564589}{9} = 62732.11111 \ldots.$ ja tämä päättymätön ykkösistä koostuva desimaaliosahan on tuttu luku $\frac{1}{9}$ eli jakojäännös tosiaan on 1.

Jakojäännöksen voi laskea nopeamminkin ”unohtamalla hallitusti” summasta luvut 9 eli luvulla 564589 voidaan laskea vain $5 + 6 + 4 + 5 + 8 = 28$ ja siitä edelleen $2 + 8 = 10$ ja vielä $1 + 0 = 1$.

Rutinoituneet jakojäännösten metsästäjät oppivat myös ”unohtamaan vielä hallitummin” summasta kaikki sellaiset numerot, joiden summaksi tulee 9 tai joku muu yhdeksällä jaollinen luku. Eli siis luvulla 564589 voidaan viimeisen numeron 9 lisäksi jättää keskellä olevat 4 ja 5 pois ja laskea vain $5 + 6 + 8 = 19$ ja edelleen $1 + 9 = 10$ ja lopulta $1 + 0 = 1$.

Mennään sitten lopulta takaisin alussa esittämäämme ongelmaan. Onko laskutoimitus $1234 \cdot 5678 = 7005652$ oikein laskettu?

Tutkitaan aluksi lukua 1234. Sen poikkisummaksi saadaan 1 hyvin nopeasti. Voidaan nimittäin todeta, että laskusta voidaan unohtaa luvut 2, 3 ja 4 sen takia, koska niiden summa on 9. Jäljelle jää ainoastaan luku 1, mikä on siis luvun 1234 jakojäännös, kun se jaetaan luvulla 9. Laskintarkistus antaa $\frac{1234}{9} = 137.11111 \ldots$ ja desimaaliosassa toistuva numero 1 on jakojäännös.

Seuraavaksi tuijotetaan lukua 5678. Saadaan $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ ja edelleen $2 + 6 = 8$. Tämä luku olisi saatu nopeasti niinkin, että olisi havaittu lukujen 5, 6 ja 7 summan olevan 18 ja se on 9:llä jaollinen luku ja nämä mainitut luvut voidaan silloin jättää laskusta pois. Jäljelle jäisi siinä tapauksessa pelkkä luku 8. Laskimella saadaan tarkistuksena $\frac{5678}{9} = 630.88888 \ldots$ ja desimaaliosassa toistuva numero 8 on jakojäännös.

Siis luvun 1234 poikkisummaksi saadaan 1 ja luvun 5678 poikkisummaksi 8. Näiden tulo on $1 \cdot 8 = 8$ eli voidaan päätellä, että kertolaskun $1234 \cdot 5678$ lopputuloksen on oltava luku, jonka jakojäännökseksi yhdeksällä jaettuna tulee 8.

Mitä on saatu vastaukseksi? Muka 7005652. Siitä havaitaan nopeasti, että neljä viimeistä numeroa muodostaa summan, joka on 18 eli 9:llä jaollinen luku. Ne voidaan jättää pois. Jäljelle jäävät numerot 7, 0 ja 0. Näiden summa on 7. Eli siis mikäli luku 7005652 jaetaan 9:llä, jää jakojäännökseksi 7.

Tiedetään, että oikean vastauksen jakojäännös on 8 ja saadun vastauksen jakojäännös on 7. Tiedetään samalla, että lasku on väärin laskettu. Kun tarkistetaan asia, niin havaitaan, että $1234 \cdot 5678 = 7006652$ eikä suinkaan 7005652.

Yhteenlasku

Yhteen- ja vähennyslasku voidaan myös tarkistaa yhdeksänmenetelmällä.

Onko $123 + 429 = 556$? ”Ei tietenkään ole!”, huudahdat ehkä riemastuneena laskettuasi laskun päässäsi ja tällä hetkellä mahdollisesti muistelet kaiholla asiaa sen tapahtuman ollessa nyt jo kauan sitten mennyttä aikaa?

Me heikommat päässämme laskijat joudumme turvautumaan yhdeksänmenetelmän kauhuihin. Luvun 123 poikkisumma on 6 ja luvun 429 poikkisumma on myös 6 (jos hoksaamme jättää numeron 9 pois laskuista) eli poikkisummien summa on 12, jonka poikkisumma on 3. Saadun vastauksen poikkisumma on $5 + 5 + 6 = 16$, jonka poikkisumma puolestaan on 7. Kun 3 on eri asia kuin 7, toteamme laskun olleen väärin laskettu. Tämän havaitsemiseen meni ilahduttavasti aikaa reaalimaailmassamme, jonka ajan kuitenkin olisimme käyttäneet jossakin lukuisissa virtuaalimaailmoistamme?

Vähennyslasku

Vähennyslasku ei ole yhtä kivaa, mutta otetaan siitä yksi esimerkki. Halutaan tarkistaa, onko $236 - 467 = -233$? Vasemmalla puolella luvun 236 poikkisumma on 2 ja luvun 467 poikkisumma on 8. Vähennyslasku $2 - 8 = -6$. Negatiiviseen lukuun voidaan huoletta lisätä luku 9, jotta saadaan tarkistusluvuksi positiivinen luku. Eli nyt siis vähennyslaskutehtävän tarkistusluvuksi saadaan $-6 + 9 = 3$.

Entä vastaus? Luvun -233 poikkisumma on – $(2 + 3 + 3) = -8$ ja lisätään tähän negatiiviseen lukuun myös 9, jolloin saadaan tarkistusluvuksi $-8 + 9 = 1$ eli eri asia kuin varsinaisen laskun tarkistusluku, jolloin voimme jälleen osoittaa syyttävällä sormella väärin lasketun laskutehtävän laskijaa eli siis minua. Olen matematiikanopettaja ja tottunut laskemaan väärin. En moisesta siis masennu vaan nostan itseni pettymyksen suosta ja yritän luonnollisesti jatkossa entistä uutterammin.

Pohdiskelua

Miksi yhdeksällä jaollisten lukujen numeroiden summa on yhdeksällä jaollinen? Tämä on melko helppo perustella. Teen sen tässä hieman puolimatemaattisesti. Perusteluni ei toki täytä fundamentalistimatemaatikkojen kriteerejä, mutta enhän itsekään täytä fundamentalistimatemaatikkojen kriteerejä. Kun asetan riman itselleni riittävän matalalle, saan onnistumisen elämyksiä. Ja niitähän tässä elämässä kaipaa meistä varmasti itse kukin.

Oletetaan, että meillä on luku, jota merkitään ”$\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$", missä alaindeksoidut a:t tarkoittavat kokonaislukuja väliltä 0...9. Niinpä esimerkiksi luvussa 135 olisi tuolla merkinnällä " $\ldots 000135$", jolloin $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ ja $a_3 = a_4 = \cdots = 0$

Alaindeksillä tarkoitetaan luvun 10 potensseja. Niinpä luku ”$\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$" tarkoittaa lukua $a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 + \cdots$ eli lukua $a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + 1000 \cdot a_3 + 10000 \cdot a_4 + \cdots$. Niinpä tämä esimerkin luku "$\ldots 000135$" on luku $5 + 10 \cdot 3 + 100 \cdot 1 + 1000 \cdot 0 + 10000 \cdot 0 + \cdots = 5 + 30 + 100 = 135$.

No niin. Meillä on siis luku, jota merkitään ”$\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$". Oletetaan, että se luku nyt on 9:llä jaollinen ja osoitetaan, että tällöin luvun muodostamien numeroiden summa on myös 9:llä jaollinen.

Lukuamme voidaan siis merkitä $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + 10000a_4 + \cdots$ ja koska se on 9:llä jaollinen, niin voimme kirjoittaa yhtälön

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + 10000a_4 + \cdots = 9k \qquad ,$$

missä k on jokin kokonaisluku.

Kirjoitetaan yhtälön vasen puoli muotoon, jossa irrotetaan luvun muodostaman numerot erilleen seuraavasti:

$$a_0 + (a_1 + 9a_1) + (a_2 + 99a_2) + (a_3 + 999a_3) + (a_4 + 9999a_4) + \cdots = 9k$$

ja edelleen voidaan järjestää muodossa

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + 9999a_4 + \cdots = 9k$$

Yhtälön vasemmalla puolella on ”selvästi” 9:llä jaollisia lukuja. Otetaan niistä 9 yhteiseksi tekijäksi:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + 1111a_4 + \cdots) = 9k$$

Siirretään tämä osa lausekkeesta yhtälön oikealle puolelle, jolloin

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = 9k - 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + 1111a_4 + \cdots)$$

ja vielä otetaan oikealta puolelta 9 tekijäksi, jolloin saamme lopulta muodon

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = 9(k - a_1 - 11a_2 - 111a_3 - 1111a_4 + \cdots)$$

SEINÄJOEN AMMATTIKORKEAKOULU
SEINÄJOKI UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Ja näin ollen olemme päätyneet tulokseen, että 9:llä jaollisen luvun numeroiden summa on 9:llä jaollinen. Perustelu ei ole matemaattisesti tyylikkäin mahdollinen, mutta se hyödyntää ”maalaisjärkeä” sellaisissa välivaiheissa, missä matemaatikolla sitä maalaisjärkeä ei välttämättä olisi.

Lopuksi

Lopuksi totean yhdeksänmenetelmän olevan mainio tilanteessa, jossa matematiikanopettaja haluaa luoda ympärilleen karismaa ja valheellista mielikuvaa valtaisasta päässälaskutaidostaan. Ja milloinka opettaja ei muka tällaista vaikutelmaa haluaisi luoda? Laskennallisen gurun maine on yllättävän helppo saavuttaa. Oppilaat ja opiskelijat hämmästelevät usein, kuinka opettaja hetkessä tunnistaa opiskelijan laskuvirheen peruslaskutoimituksissa. He eivät useinkaan tiedä, että on eri asia huomata laskussa oleva virhe kuin osata laskea lasku itse oikein. Tämä on olennainen piirre yhdeksänmenetelmässä. Se paljastaa virheen vaan ei oikeaa vastausta. Se riittää minulle ja saa riittää myös tälle artikkelille, jonka päätän jättäen harjoitustehtäväksi seuraavan ongelman pohtimisen:

Ongelma: Alla näet kuvan eräästä kertolaskusta.

$$56\blacksquare978 \cdot 516731 = 291941646918$$

Harmillisesti mustekynästä pudonnut mustetahra on piilottanut yhden numeron kertolaskun ensimmäisestä tulon tekijästä. Sinun tehtäväsi on nyt selvittää, mikä kyseinen numero on ollut? Käytä yhdeksänmenetelmää.

Teksti: Juhani Paananen, lehtori, SeAMK Tekniikka