@SeAMK-verkkolehti 17.12.2020

Juhani Paananen
lehtori, SeAMK Tekniikka

Logaritmitaulut kertolaskussa

Johdanto

Nykyajan ihmiset, joihin lasken mukaan itsenikin, edustavat pullamössösukupolvea. Häpeän puna kasvoillamme syömme joulutorttujamme ja rasvarinkuloitamme muistellen sitä, kuinka esivanhempamme joutuivat kestämään nälät, sodat ja logaritmitaulut. On suorastaan noloa ajatella, kuinka jokainen meistä ottaisi mieluummin korvapuustin pöydältä leivonnaisena käteensä kuin läimäyksenä poskeensa. Jälkimmäinen vaihtoehto kumminkin oli aikanaan monien opiskelijoiden kohtalo heidän joutuessaan opettelemaan logaritmitaulujen avulla laskemista toimenpiteen paremmin hallitsevan opettajansa arvioidessa toimenpiteen onnistumista. Palaute oli usein kuivan asiallinen, mutta - siitä huolimatta - pääosin nuivan kielteinen.

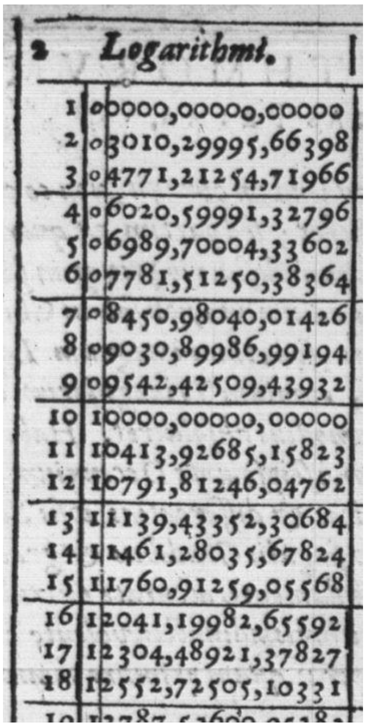
Logaritmitaulut ovat kumminkin, Tetris-pelin ja Facebookin jälkeen, ehkä ihmiskunnan neljänneksi[1] tärkein keksintö. Voidaan jopa sanoa, että nykyajan tiede ja tekniikka ei voisi olla lähellekään tällä tasolla, ellei joku olisi joskus keksinyt logaritimitauluja. Logaritmitauluttomuus on itsellenikin niin karmiva ajatus, että siirryn mielelläni tästä jo seuraavaan kappaleeseen.

Logaritmitaulujen keksijänä pidetään skotlantilaista matemaatikkoa John Napieria (1550 - 1617). Hän teki vuosikymmeniä töitä laatiessaan vuonna 1614 julkaisunsa ”*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*”, joka voitaisiin kääntää suomeksi ”*Logaritmien ihmeellisen taulukon kuvaus*”. Ja usein käännetäänkin.

Napierin logaritmitaulut perustuivat omituiseen ns. Neperin[2] lukuun $e = 2.718\ldots$ ja näitä kutsutaan nykyisin nimellä ”luonnollinen logaritmi”, mikä ei ole millään tavalla luonnollinen nimitys. Napierin kanssa samoihin aikoihin painiskeli logaritmi-idean parissa englantilainen matemaatikko Henry Briggs (1561 - 1630), joka rakensi ehkä meidän mielestämme ”luonnollisemman” logaritmin. Tämä ”Briggsin logaritmi” perustui kantalukuun 10, joka on yhtä monta kuin on sormia valkoisissa kangassormikkaissa, joilla voidaan käsitellä hänen British Museumissa sijaitsevaa julkaisuaan ”*Logarithmorum Chilias Prima” vuodelta 1617.* Näitä ”Briggsin logaritmeja” kutsutaan nimellä 10-kantainen logaritmi, mikä on varsin luontevaa. Näitä kymmenkantaisia logaritmeja merkitään usein lg-lyhenteellä ja sitä minäkin hämmästelen.

---

[1] kolmanneksi tärkein on tietenkin nuolenpääkirjoitus, mutta se on niin vanha asia jo, että meistä harva enää osaa lukea nuolenpääkirjoitusta, ainakaan sujuvasti. Siksi jätin asian tässä yhteydessä mainitsematta.
[2] Sana Neper puolestaan perustuu sukunimeen Napier. Kyseessä on sanan latinalaistettu muoto.



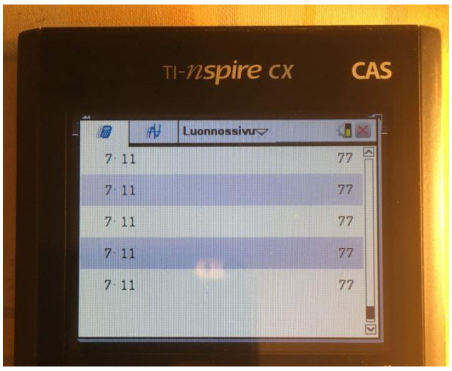
2	Logarithmi.	
1	0	0000,00000,00000
2	0	3010,29995,66398
3	0	4771,21254,71966
4	0	6020,59991,32796
5	0	6989,70004,33602
6	0	7781,51250,38364
7	0	8450,98040,01426
8	0	9030,89986,99194
9	0	9542,42509,43932
10	1	0000,00000,00000
11	1	0413,92685,15823
12	1	0791,81246,04762
13	1	1139,43352,30684
14	1	1461,28035,67824
15	1	1760,91259,05568
16	1	2041,19982,65592
17	1	2304,48921,37827
18	1	2552,72505,10331

Kuva 1. Ote Briggsin logaritmitaulusta teoksesta ”Logarithmorum Chilias Prima”

Kuvassa 1 näkyy ote Briggsin laatimasta 14-desimaalisesta logaritmitaulusta. On hämmästyttävää, että vasta 2000-luvun puolella yleistyivät sellaiset taskulaskimet, joilla kyettiin saamaan logaritmit yhtä tarkasti kuin Briggsin taulukoilla jo 400 vuotta aikaisemmin. Esimerkiksi tällä hetkellä suosituin tekniikan opiskelijoiden käyttämä laskin TI-nspire CX CAS antaa tuloksen $lg(2) = 0{,}301029995664$, eli vain 12 desimaalin tarkkuudella. Toki laskimen muistissa luku on 14 desimaalin tarkkuudella eli halutessaan käyttäjä saa selville, että $lg(2) = 0{,}30102999566398$ ja tämä on täsmälleen sama tulos, jonka Briggsin taulukot antoivat jo vuonna 1617. Voisi melkein luulla, että Henry Briggs on tehnyt 1600-luvulla aikamatkan 2000-luvulle ja plagioinut taulukkonsa käyttämällä TI-nspireä. Ja niin hän varmaan toki tekikin. Ei kai kukaan noita käsin laskisi?

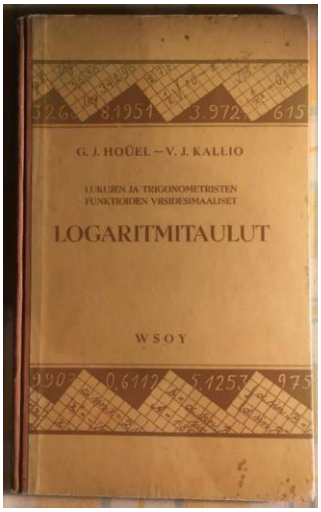
Kertolaskuesimerkki $lg(10)$ eli 1

Kuinka logaritmitaulujen avulla lasketaan esimerkiksi $7 \cdot 11$? Otin ensimmäiseksi esimerkiksi naurettavan helpon laskutoimituksen, jonka nykyihminenkin kykenee laskemaan jopa ilman laskinta ja vielä helpommin ilman logaritmitauluja. Tämän osoitan vääräksi kuvassa 2. Käytän tarkoitukseen modernia TI-nspire CX CAS-laskinta.



Kuva 2. Laskutoimitus 7 · 11 *taitavasti laskimeen näppäiltynä ja oikeaoppisesti moneen kertaan tarkistettuna. Kuvassa sivusta kajastava valo kuvastaa valonkajastusta, joka valonlähde on lähtöisin pöytälampusta. Jätän lukijan tehtäväksi hämmästyttävän vahvan symboliikan löytämisen tästä. Itse en sitä vielä ole keksinyt.*

Entä, jos käytössämme ei olisi modernia TI-nspire CX CAS-laskinta? Kaikilla ei suinkaan sellaisia ollut ainakaan vuonna 1956, jolloin painettiin Werner Söderström Osakeyhtiön Laakapainossa Porvoossa kuvassa 3 näkyvä kirja. Kyseessä oli tuolloin kuudes, muuttamaton painos, jonka itse olen hankkinut itselleni noin kesällä 1991 legendaarisesta Seppo Hiltusen antikvariaatista Helsingin Sofiankadulta. Maksoin tuolloin kirjasta 6 markkaa. Oliko se paljon vai vähän? Vähän, sillä tarvitsin kirjaa jo heti 29 vuoden päästä. Jos olisin kirjan ostanut vasta nyt, olisin siitä joutunut pulittamaan vähintään 5 euroa. Tämä oli halvin ”Osta heti”-hinta Huutonetissä Itsenäisyyspäivänä 6.12.2020. Logaritmitaulut ovat siis varsin kelpo sijoituskohde. Niiden arvo kasvaa siitä huolimatta, ettei niitä tarvitse tänä päivänä kukaan. Paitsi minä.



Kuva 3. Guillaume-Jules Hoüelin ja Väinö Johannes Kallion tuottama logaritmitaulukirja.

Tämä ranskalaisen matemaatikon Guillaume-Jules Hoüelin (1823-1886) laatima ja suomalaisen matemaatikon Väinö Johannes Kallion (1887-1946) suomen kielelle kääntämä taulukkokirja oli vuosikymmeniä käytössä lukuisissa maamme oppilaitoksissa. Lukemattomat - jopa muutamat - opiskelijasukupolvet ovat aikanaan opetelleet tuskallista logaritmitaulujen avulla laskemista vähentääkseen tuskallista laskemista ilman logaritmitauluja.

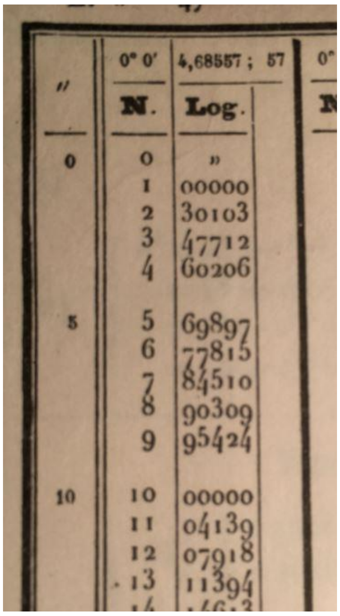
Kuinka kertolasku $7 \cdot 11$ sitten tapahtui logaritmitaulujen avulla? Laskennassa hyödynnettiin logaritmien laskusääntöä

$$lg(a \cdot b) = lg(a) + lg(b),$$

missä lg on ns. 10-kantainen logaritmi. Laskusääntö voidaan painaa mieleen muistisääntönä ”tulon logaritmi on logaritmien summa”. Jos siis täytyy laskea kertolasku $7 \cdot 11$, niin tällöin $a = 7$ ja $b = 11$ ja siis

$$lg(7 \cdot 11) = lg(7) + lg(11)$$

Mitä sitten ovat $lg(7)$ ja $lg(11)$? Tämä kiinnostaa meitä niin paljon, että avaamme taulukkokirjamme sivulta 2, jossa näkyy taulukon alkua kuvan 4 mukaisessa formaatissa.



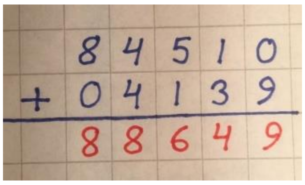
	0° 0'	4,68557 ; 57
"	N.	Log.
0	0	»
	1	00000
	2	30103
	3	47712
	4	60206
5	5	69897
	6	77815
	7	84510
	8	90309
	9	95424
10	10	00000
	11	04139
	12	07918
	13	11394

Kuva 4. Logaritmitaulun alkua

N-sarakkeessa on näkyvissä juokseva numerointi N, joka alkaa nollasta ja etenee yhden välein. Sen vieressä olevassa Log-sarakkeessa on ilmoitettu kyseistä lukua vastaava 10-kantainen logaritmi. Tai, tarkkaan ottaen vain kyseisen luvun desimaaliosa. Kokonaisosaa nimittäin ei tässä laskennassa välttämättä edes tarvita.

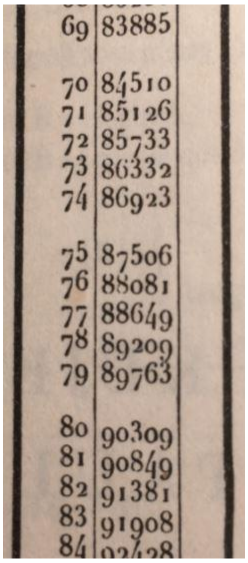
No niin. Taulukosta nähdään luvun 7 kohdalla lukuarvo 84510 eli tämä tarkoittaa sitä, että luvun 7 kymmenkantainen logaritmi on viiden desimaalin tarkkuudella $0{,}84510$. Vastaavasti luvun 11 kohdalla lukuarvo on 07918, että luvun 11 kymmenkantaisen logaritmin viisidesimaalinen likiarvo on $1{,}07918$. Kokonaisosa 1 ilmestyi pilkun eteen sen takia, kun luku 11 on suurempi kuin 10^1 eli suurempi kuin 10. Mutta, kuten jo aiemmin todettiin, ei tätä kokonaisosaa laskijan tarvitse edes tietää.

Aiemmin todettiin muistisääntönä, että ”tulon logaritmi on logaritmien summa”. Lasketaan nyt taulukosta saatujen lukujen summa. Teen tämän kuvassa 5, luonnottomasti käsin laskien, kuten olisivat aikanaan tehneet kaikki sellaiset, joiden ainoa mahdollisuus selviytyä elämästä hengissä olisi riippunut heidän käsinlaskutaidostaan.



Kuva 5. Yhteenlasku allekkain suoritettuna

Nyt siis tiedämme, että kertolaskun $7 \cdot 11$ lopputuloksena on luku, jonka 10-kantaisen logaritmin desimaaliosa on 88649. Mikä se luku on? Se löydetään etsimällä. Näin sen vaivan lukijan puolesta ja valokuvasin tapahtuneen kuvaan 6 etsintäni tuloksen. Löysin logaritmitaulusta rivin, joka kertoi, että luvun 77 kymmenkantainen logaritmi on luku, jonka desimaaliosa on juuri tämä etsitty luku 88649.



69	83885
70	84510
71	85126
72	85733
73	86332
74	86923
75	87506
76	88081
77	88649
78	89209
79	89763
80	90309
81	90849
82	91381
83	91908
84	[illegible]

Kuva 6. Osa logaritmitaulusta

Tässä pitää kumminkin olla tarkkana. Koska logaritmitauluissa ei näy logaritmien kokonaisosia vaan pelkät desimaalit, on laskijan itse huolehdittava siitä, että tulkitsee vastauksen oikein. Vastaus on tällä kertaa joko luku 77 tai joku sen kymmenmonikerta tai joku sen kymmenesosista. Eli kilpailevia vaihtoehtoja ovat 770 tai 7700 tai 77000 jne. Tai sitten toiseen suuntaan mentäessä 7,7 tai 0,77 tai 0,077 jne.

Logaritmitaulujen käyttäjät kehittivät varmasti monenlaisia menetelmiä desimaalipilkun paikan selvittämiseksi. Itse käytän tässä nyt seuraavaa päättelyketjua:

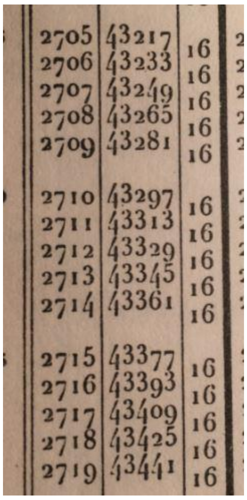
- Kertolaskun $7 \cdot 11$ lopputulos on varmasti enemmän kuin $7 \cdot 10$ eli vastaus on suurempi kuin 70
- Kertolaskun $7 \cdot 11$ lopputulos on varmasti vähemmän kuin $10 \cdot 11$ eli vastaus on pienempi kuin 110
- Voidaan siis päätellä, että kertolaskun $7 \cdot 11$ lopputulos on välillä 70 … 110

Näin ollen, tällä kertaa voimme päätellä, että $7 \cdot 11 = 77$ (eikä esimerkiksi 7,7 tai 770)

Kertolaskuesimerkki $lg(100)$ eli 2

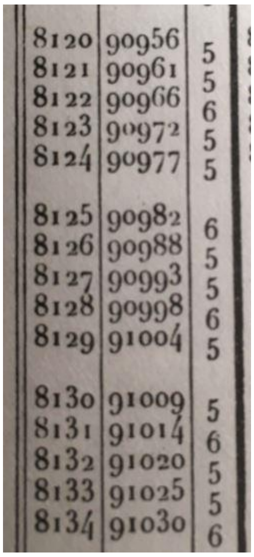
Ensimmäinen esimerkki oli suorastaan lapsellisen helppo. Otetaan toiseksi esimerkiksi selvästi hankalampi ongelma. Oletetaan, että täytyy laskea kertolasku $2{,}714 \cdot 8{,}126$. Tuskin kukaan on koskaan juuri tuota laskua mihinkään tarvinnut, mutta tämä nyt on toki vain eräs esimerkki matematiikan hyödyttömyydestä.

Desimaalipilkut ovat suloisia, mutta elämä on silti paljon suloisempaa ilman desimaalipilkkuja. Me logaritmilaskennan ystävät emme desimaalipilkuista piittaa tuon taivaallista ja haemme vain ronskisti taulukosta kokonaislukuja 2714 ja 8126 vastaavat logaritmit. Tämä on tehty kuvissa 7 ja 8. Näemme taulukoista, että lukujen 2714 ja 8126 kymmenkantaisten logaritmien desimaaliosat ovat 43361 ja 90988. Lasketaan nämä yhteen. Leveilen allekkainlaskutaidollani tällä kertaa kuvassa 9.



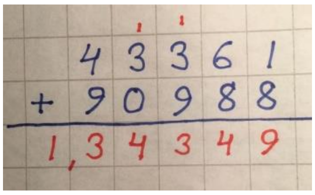
2705	43217	16
2706	43233	16
2707	43249	16
2708	43265	16
2709	43281	16
2710	43297	16
2711	43313	16
2712	43329	16
2713	43345	16
2714	43361	16
2715	43377	16
2716	43393	16
2717	43409	16
2718	43425	16
2719	43441	16

Kuva 7. Luvun 2714 kymmenkantainen logaritmi



8120	90956	5
8121	90961	5
8122	90966	6
8123	90972	5
8124	90977	5
8125	90982	6
8126	90988	5
8127	90993	5
8128	90998	6
8129	91004	5
8130	91009	5
8131	91014	6
8132	91020	5
8133	91025	5
8134	91030	6

Kuva 8. Luvun 8126 kymmenkantainen logaritmi

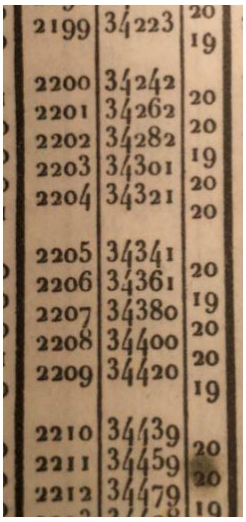


Kuva 9. Taidokas ynnälaskun suoritus

Desimaaliosaksi muodostuu siis 34349. Etsitään sitä logaritmitauluista. Tätä yritetään tehdä kuvassa 10. Vanha sananparsi ”etsii, etsii ja soisikin löytävänsä” toteutuu siinä mielessä, että etsimäänsä lukua ei löydä, vaikka soisikin. Taulukosta löytyy luku 2205, jonka logaritmin desimaaliosa on 34341 ja luku 2206, jonka logaritmin desimaaliosa on 34361. Joudumme turvautumaan ns. lineaariseen interpolointiin. Tätä tarkoitusta varten taulukkoon on valmiiksi kirjattu luku 20, joka on näiden taulukkoarvojen 34361 ja 34341 erotus. Koska haetun luvun 34349 ja pienemmän taulukkoarvon 34341 erotus on 8, niin voimme arvioida, että luvun $2205 + \frac{8}{20}$ eli luvun 2205,4 logaritmi on likimain luku, jonka desimaaliosa on tämä mainittu 34349.

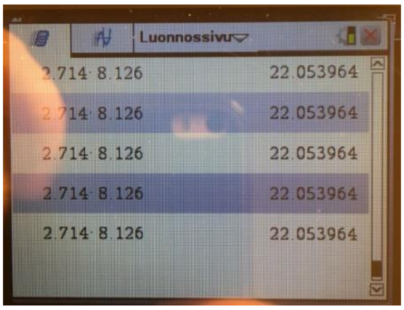
Nyt tiedämme, että kertolaskun $2{,}714 \cdot 8{,}126$ tulos on likimain luku, joka muodostuu numeroista 22054. Desimaalipilkun paikka pitää vielä määritellä. Käytetään seuraavaa päättelyketjua:

- Kertolaskun $2{,}714 \cdot 8{,}126$ lopputulos on varmasti enemmän kuin $2 \cdot 8$ eli vastaus on suurempi kuin 16
- Kertolaskun $2{,}714 \cdot 8{,}126$ lopputulos on varmasti vähemmän kuin $3 \cdot 9$ eli vastaus on pienempi kuin 27
- Voidaan siis päätellä, että kertolaskun $2{,}714 \cdot 8{,}126$ lopputulos on välillä 16 … 27



Kuva 10. Logaritmitaulukon osa, josta melkein löytyy luku 34349

Näin ollen, tällä kertaa voimme päätellä, että $2{,}714 \cdot 8{,}126 \approx 22{,}054$. Aivan tarkkaan vastaukseen emme nyt päädy, mikä saattaa ahdistaa meitä helppoon elämään tottuneita pullamössöjä. Kun tarkistamme tarkan vastauksen laskimella, niin saamme kuvan 11 mukaisen tuloksen. Havaitsemme, että logaritmitaulukoiden avulla saatu tulos $22{,}054$ on sama kuin tarkka vastaus $22{,}053964$ pyöristettynä 3 desimaalin tarkkuuteen. Itse asiassa on jopa niin, että kun laskennan lähtöarvot ovat 4 numeron tarkkuudella, niin meidän on aiheellista luottaa kertolaskun avulla saatuun lopputulokseenkin vain 4 numeron tarkkuudella, eli $2{,}714 \cdot 8{,}126 \approx 22{,}05$ eli tämä tarkoittaa sitä, ettei logaritmitaulujen avulla menetetty mitään olennaista laskentatarkkuudessa.



Kuva 11. Häpeällinen sortuminen laskimen käyttöön. Syyllinen on ehkä tunnistettavissa valokuvaan tallentuneesta sormesta ja ehkä myös sen jäljestä.

Pohdintaa ja jatkotutkimuskohteita

Kun vanhoihin laskentamenetelmiin tutustuu, on hyvin vaikea kunnolla asettautua sellaisen laskijan asemaan, joka ei eläissään ollut nähnyt laskinta tai edes voinut kuvitella sellaisen olevan joskus mahdollista keksiä. Nykyihminen näppäilee laskintaan tai puhelintaan sujuvasti edes miettimättä, kuinka vaikeaa kaikki tämä oli vielä vain joitakin vuosikymmeniä sitten. Takavuosikymmeninä ja -vuosisatoina ihmiset olivat kumminkin tottuneita logaritmitauluihin. Luultavasti he käyttivät niitä niin taitavasti, etteivät ajallisesti kuluttaneet laskemiseen juurikaan enempää aikaa kuin me nykypolven edustajat laskimillamme. Heillä oli paljon meitä parempi päässälaskutaito ja ennen kaikkea kyky arvioida laskun lopputulosta. He käyttivät logaritmitauluja sujuvasti, löysivät tarvittavat luvut nopeasti ja suorittivat päässään likiarvolaskuja, joihin me emme enää kykene.

Olen tässä pienessä tutkielmassani paneutunut jollakin tasolla logaritmitaulujen hyödyntämiseen ainoastaan kertolaskun yhteydessä. Aikomukseni on palata aiheeseen vielä ainakin potenssilaskun ja jakolaskun parissa. Näissä laskutoimituksissa logaritmitaulut aikanaan suorastaan mullistivat maailman. Ajallinen säästö verrattuna pelkkään käsinlaskuun oli hämmästyttävä. Ja laskentatarkkuus myös hämmästyttävä, mikä olisi hämmästyttävää ellei se olisi jo itsensä toistamista. Toistan vielä lopuksi väitteeni aikomuksestani palata tähän aiheeseen sitten toisella kerralla.