Kertolaskujen likiarvolaskennasta

Lueskelin aikani kuluksi ja kotitöitä välttääkseni ikivanhaa teknisen matematiikan oppikirjaa (Rose 1918). Kirjan aivan ensimmäisiltä lehdiltä alkaen käytettiin systemaattista tapaa laskea esimerkkien laskutehtävät sekä tarkasti että likimääräistarkistuksella pyöristämällä laskennan lähtöarvot yhden numeron tarkkuudelle. Tämä oli sen verran kiinnostavaa puuhaa, että päätin hieman perehtyä aiheeseen tarkemmin. Kuinka tarkka tällainen likimääräismenetelmä oikein on?

Otetaan aivan aluksi muutama esimerkki, jotka selventävät laskennan ideaa.

Esimerkki 1. On laskettava kertolasku $1.2 \cdot 3.7$

Ratkaisu. Pyöristetään molemmat tulon tekijät yhden numeron tarkkuudelle eli tässä tapauksessa kokonaisluvuiksi 1 ja 4. Likiarvolasku lasketaan siis $1 \cdot 4 = 4$

Mikä olisi ollut tarkka vastaus? $1.2 \cdot 3.7 = 4.44$ eli likiarvolaskun aiheuttamaksi suhteelliseksi virheeksi muodostui noin 9.1 %.

Esimerkki 2. On laskettava kertolasku $15.43 \cdot 13.68$

Ratkaisu. Pyöristetään molemmat tulon tekijät yhden numeron tarkkuudelle eli tässä tapauksessa kokonaisluvuiksi 20 ja 10. Likiarvolasku lasketaan siis $20 \cdot 10 = 200$

Mikä olisi ollut tarkka vastaus? $15.43 \cdot 13.68 = 211.0824$ eli likiarvolaskun aiheuttamaksi suhteelliseksi virheeksi muodostui noin 5.3 %.

Esimerkki 3. On laskettava kertolasku $0.006189 \cdot 1.52978$

Ratkaisu. Pyöristetään molemmat tulon tekijät yhden numeron tarkkuudelle eli tässä tapauksessa luvuiksi 0.006 ja 2. Likiarvolasku lasketaan siis $0.006 \cdot 2 = 0.012$

Mikä olisi ollut tarkka vastaus? $0.006189 \cdot 1.52978 = 0.0094678 \ldots$ eli likiarvolaskun aiheuttamaksi suhteelliseksi virheeksi muodostui noin 26.7 %.

Nämä olivat esimerkkejä sattumanvaraisesti valikoiduista laskuista, joissa yhden numeron tarkkuudella lasketun likiarvolaskennan suhteelliset virheet olivat välillä 5.3 % … 26.7 %. Ovatko nämä tyypillisiä virheitä tämän tyyppisessä likimääräislaskennassa? Mikä mahtaa olla keskimääräinen virhe? Tutkitaan asiaa systemaattisemmin.

Kahden luvun kertolasku

Tehdään Excelin avulla simulointi, jossa tuotetaan 1 000 000 (eli miljoona) kertolaskua, joissa lasketaan kahden välillä $1 - 9.99999 \ldots$ olevan satunnaisluvun tulo. Tämä väli riittää, koska kaikki mahdolliset luvut voidaan tuottaa lisäämällä noiden lukujen perään kertoimeksi sopiva 10:n potenssi. Negatiiviset luvut saadaan lisäämällä mukaan miinusmerkki. Likiarvolaskun suhteelliseen virheeseen ei näillä ole merkitystä, joten voimme rajoittua siis edellä mainitulle välille.

Taulukossa 1 näkyy tämän valtaisan Excel-taulukon alkua.

Ensimmäisellä rivillä ovat satunnaisluvuiksi valikoituneet luvut 3.4272 … ja 8.7384 … ja niiden avulla laskettu kertolasku on tuottanut tuloksen 29.9485 …

Tämän jälkeen ensimmäisellä rivillä on nämä satunnaisluvut pyöristetty kokonaisluvun tarkkuuteen eli luvuiksi 3 ja 9 ja näiden avulla laskettu kertolasku tuottaa tietysti tuloksen 27. Näin ollen suhteelliseksi virheeksi muodostuu noin 9.85 %.

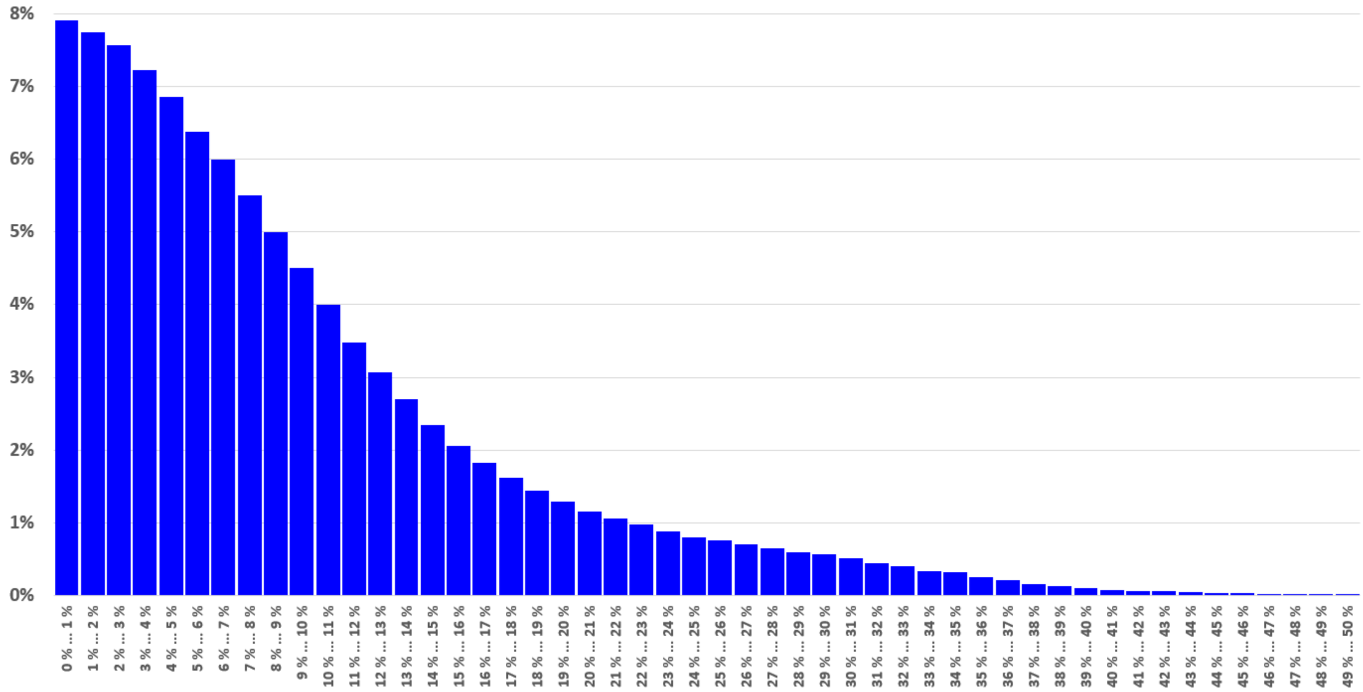
Taulukko 1. Kahden luvun kertolasku tarkasti ja likimääräisesti.

A	B	A · B		A	B	A · B	virhe
3,427236367	8,738410729	29,94859904		3	9	27	9,85 %
1,217222355	9,38804057	11,42733285		1	9	9	21,24 %
3,644049922	3,932509154	14,33025968		4	4	16	11,65 %
4,920454433	8,143523176	40,06983471		5	8	40	0,17 %
9,336269486	4,583024179	42,7883488		9	5	45	5,17 %

Tätä sitten on toistettu miljoona kertaa ja selvitetty suhteellisten virheiden jakauma. Keskimääräiseksi suhteelliseksi virheeksi tuli 9.39 % ja suurimmillaan se oli tässä aineistossa 75.45 %.

Teoreettisella tarkastelulla voidaan osoittaa, että suhteellinen virhe on suurin mahdollinen, kun kertolaskuksi valikoituu 1.5 · 1.5, jonka tarkka vastaus on 2.25. Pyöristetyillä arvoilla laskettu kertolasku 2 · 2 antaa vastaukseksi 4. Näin ollen suurin mahdollinen suhteellinen virhe kahden luvun kertolaskussa on 77.78 %.

Kuvassa 1 näkyy kahden luvun kertolaskussa syntyvien suhteellisten virheiden jakauma.



Kuva 1. Kahden luvun kertolasku. Suhteellisten virheiden jakauma.

Kolmen luvun kertolasku

Tehdään seuraavaksi vastaava Excel-simulointi, jossa tuotetaan miljoona kertolaskua, joissa lasketaan kolmen välillä $1 - 9.99999 \ldots$ olevan satunnaisluvun tulo. Taulukossa 2 näkyy tämän Excel-taulukon alku.

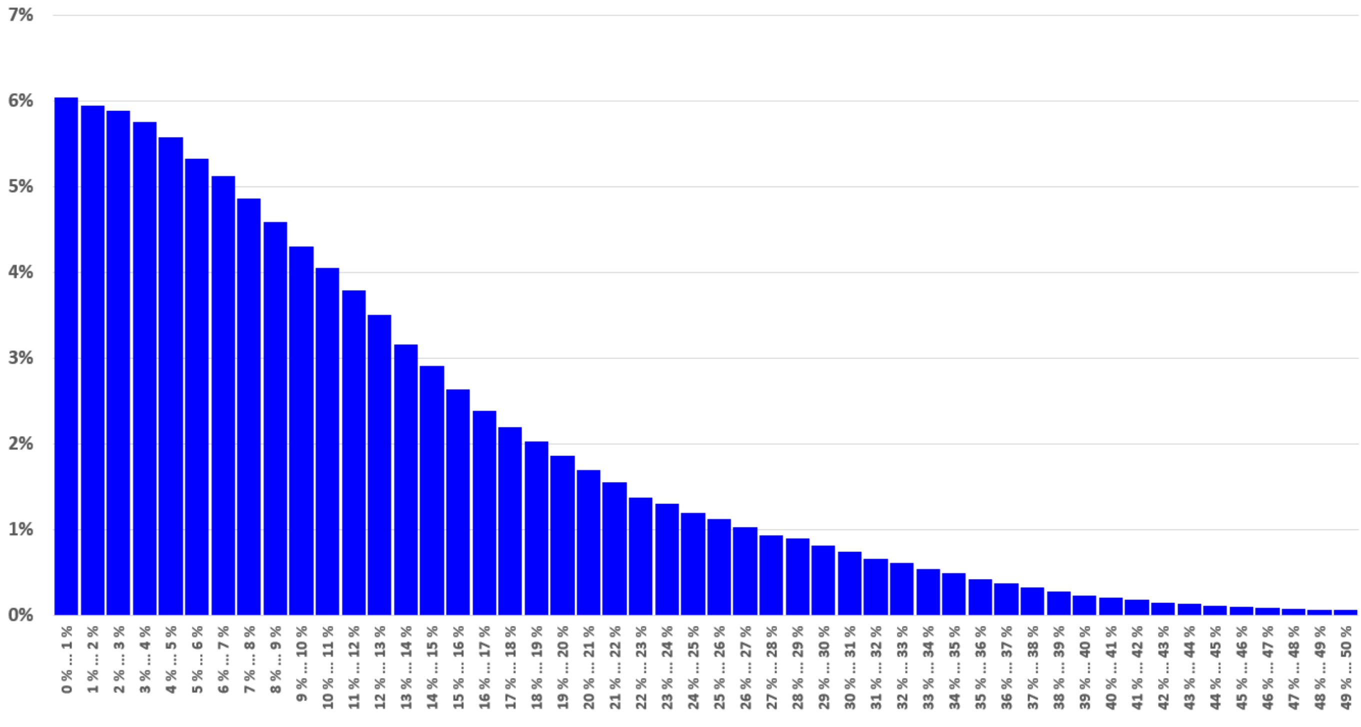
Taulukko 2. Kolmen luvun kertolasku tarkasti ja likimääräisesti.

A	B	C	A · B · C	A	B	C	A · B · C	virhe
9,973840166	1,89146077	6,096250847	115,0065489	10	2	6	120	4,34 %
8,902499896	6,541355847	7,698279933	448,304865	9	7	8	504	12,42 %
1,458920794	5,286561985	3,666278172	28,27681277	1	5	4	20	29,27 %
4,666973044	9,040182193	1,230118453	51,89905011	5	9	1	45	13,29 %

Miljoonan likimääräiskertolaskun keskimääräiseksi suhteelliseksi virheeksi tuli 11.79 % ja suurimmillaan se oli tässä aineistossa 110.78 %.

Teoreettisella tarkastelulla voidaan osoittaa, että suhteellinen virhe on suurin mahdollinen, kun kertolaskuksi valikoituu $1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5$, jonka tarkka vastaus on 3.375. Pyöristetyillä arvoilla laskettu kertolasku $2 \cdot 2 \cdot 2$ antaa vastaukseksi 8. Näin ollen suurin mahdollinen suhteellinen virhe kolmen luvun kertolaskussa on 137.04 %.

Kuvassa 2 näkyy kolmen luvun kertolaskussa syntyvien suhteellisten virheiden jakauma.



Kuva 2. Kolmen luvun kertolasku. Suhteellisten virheiden jakauma.

Neljän luvun kertolasku

Seuraavaksi tuotetaan miljoona kertolaskua, joissa lasketaan neljän välillä $1 - 9.99999 \ldots$ olevan satunnaisluvun tulo. Taulukossa 3 näkyy tämän Excel-taulukon alku.

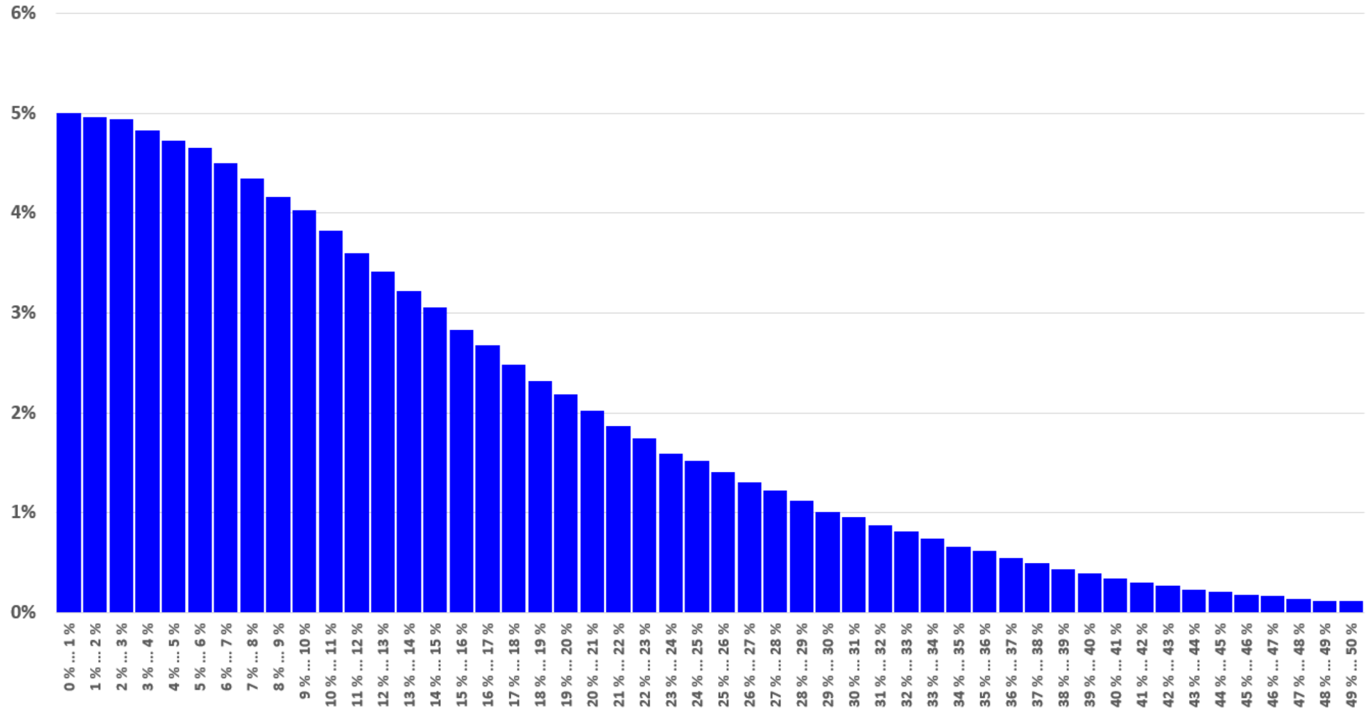
Taulukko 3. Neljän luvun kertolasku tarkasti ja likimääräisesti.

A	B	C	D	A · B · C · D	A	B	C	D	A · B · C · D	virhe
2,694184073	1,691008614	5,77042106	3,62134076	95,20285697	3	2	6	4	144	51,26 %
7,381300298	4,861641719	8,578746164	9,12078396	2807,836474	7	5	9	9	2835	0,97 %
1,602932152	5,874297086	6,643832145	9,734750947	608,996145	2	6	7	10	840	37,93 %
4,237136282	2,324745522	5,60947144	8,636176772	477,1899814	4	2	6	9	432	9,47 %

Miljoonan likimääräiskertolaskun keskimääräiseksi suhteelliseksi virheeksi tuli $13.74\ \%$ ja suurimmillaan se oli tässä aineistossa $139.26\ \%$.

Teoreettisella tarkastelulla voidaan osoittaa, että suhteellinen virhe on suurin mahdollinen, kun kertolaskuksi valikoituu $1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5$, jonka tarkka vastaus on 5.0625. Pyöristetyillä arvoilla laskettu kertolasku $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ antaa vastaukseksi 16. Näin ollen suurin mahdollinen suhteellinen virhe neljän luvun kertolaskussa on $216.05\ \%$.

Kuvassa 3 näkyy neljän luvun kertolaskussa syntyvien suhteellisten virheiden jakauma.



Kuva 3. Neljän luvun kertolasku. Suhteellisten virheiden jakauma.

Viiden luvun kertolasku

Seuraavaksi tuotetaan miljoona kertolaskua, joissa kerrotaan keskenään viisi satunnaislukua, jotka ovat välillä $1 - 9.99999\ldots$. Taulukossa 4 näkyy tämän Excel-taulukon alku.

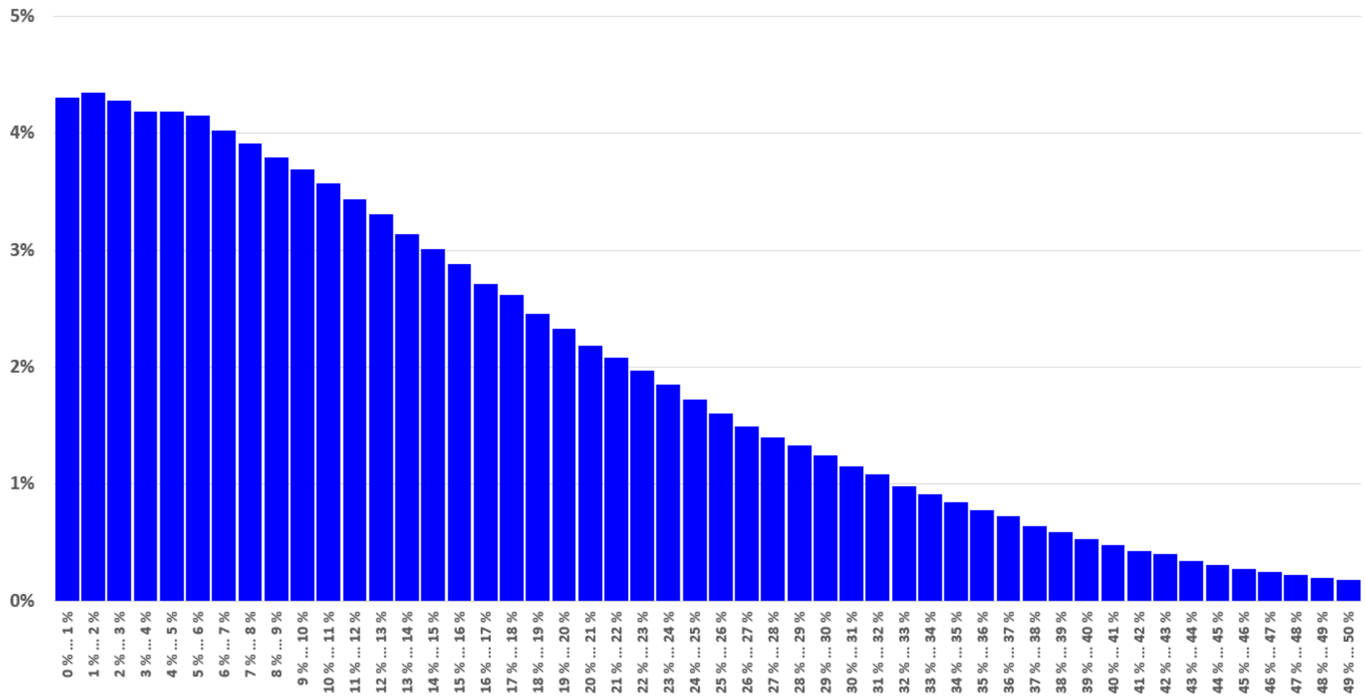
Taulukko 4. Viiden luvun kertolasku tarkasti ja likimääräisesti.

A	B	C	D	E	A · B · C · D · E	A	B	C	D	E	A · B · C · D · E	virhe
2,316838785	1,499780392	9,066150989	2,209399588	6,233401838	433,8562192	2	1	9	2	6	216	50,21 %
8,515849669	3,765923129	2,822563563	5,474167979	8,98591807	4452,703146	9	4	3	5	9	4860	9,15 %
8,089929282	3,642204622	6,188364179	4,991263228	7,640474684	6953,696718	8	4	6	5	8	7680	10,44 %
6,730625293	8,728197657	8,821748607	6,337815957	4,352657846	14296,46997	7	9	9	6	4	13608	4,82 %

Miljoonan likimääräiskertolaskun keskimääräiseksi suhteelliseksi virheeksi tuli $15.48\ \%$ ja suurimmillaan se oli tässä aineistossa $161.15\ \%$.

Voidaan osoittaa, että suhteellinen virhe on suurin mahdollinen, kun kertolaskuksi valikoituu $1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5$, jonka tarkka vastaus on 7.59375. Pyöristetyillä arvoilla laskettu kertolasku $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ antaa vastaukseksi 32. Näin ollen suurin mahdollinen suhteellinen virhe viiden luvun kertolaskussa on $321.40\ \%$.

Kuvassa 4 näkyy viiden luvun kertolaskussa syntyvien suhteellisten virheiden jakauma.



Kuva 4. Viiden luvun kertolasku. Suhteellisten virheiden jakauma.

Kooste

Taulukkoon 5 on koottu tämän pienen tutkimuksen tuloksia. Taulukon ylin rivi on otsikkorivi, jossa on kerrottuna kertolaskun suhteellinen virhe.

Kahden luvun kertolaskussa käytettäessä yhden numeron tarkkuudelle pyöristettyjä lukuarvoja, syntyy korkeintaan 1 prosentin suuruinen suhteellinen virhe noin 7.9 % varmuudella. Korkeintaan 10 prosentin suhteellinen virhe syntyy noin 64.7 % varmuudella.

Vastaavasti esimerkiksi viiden luvun kertolaskussa käytettäessä yhden numeron tarkkuudelle pyöristettyjä lukuarvoja, syntyy korkeintaan 5 prosentin suuruinen suhteellinen virhe noin 21.3 % varmuudella.

Taulukko 5. Kertolaskun suhteellisen virheen kertymätaulukko.

	1 %	**2** %	**3** %	**4** %	**5** %	**10** %	**25** %	**50** %
$\boldsymbol{A \cdot B}$	7.9 %	15.7 %	23.2 %	30.5 %	37.3 %	64.7 %	93.4 %	99.9 %
$\boldsymbol{A \cdot B \cdot C}$	6.0 %	12.0 %	17.9 %	23.6 %	29.2 %	53.4 %	89.0 %	99.6 %
$\boldsymbol{A \cdot B \cdot C \cdot D}$	5.0 %	10.0 %	14.9 %	19.7 %	24.5 %	46.2 %	84.5 %	99.2 %
$\boldsymbol{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E}$	4.3 %	8.7 %	12.9 %	17.1 %	21.3 %	40.9 %	80.1 %	98.5 %

Pohdintoja

Mitä hyötyä tästä kaikesta on? Ei mitään.

Vedän sanani heti takaisin. Käytetyn likiarvomenetelmän avulla on suhteellisen helppo laskea päässä laskien jonkinlainen nopea likiarvo kertolaskun lopputulokselle ja **keskimääräiset virheet** eivät hirvittävän suuria ole, sillä viidenkin luvun kertolaskussa päädyttiin keskimäärin vain noin 15 prosentin suuruiseen virheeseen, mutta virheiden **vaihteluväli** on sen verran hurja, että käytännössä jää melkoinen epävarmuus siitä, onko lopputulos lopulta kovinkaan lähellä likiarvomenetelmällä saatua. Ehkä käytetty likiarvomenetelmä ei loppujen lopuksi hirvittävän käytännöllinen ole.

Tilannetta parantaisi toki merkittävästi, jos jaksaisi opetella kokonaislukujen kertotaulua pidemmälle kuin vain siihen kymmenen kertotauluun saakka, joka peruskoulussa opetellaan. Esimerkiksi oppikirjassa Käytännön laskutaito (Ketonen 1963) kehotetaan opettelemaan kertotaulu ulkoa jopa 25:n kertotauluun asti. Tämmöisen edessä nykyihminen purskahtaa hysteeriseen nauruun, mutta turhaan, sillä se olisi edelleenkin erittäin hyödyllinen taito. Tuolloin nimittäin tämänkin likiarvomenetelmän kriittinen ja suurimpia virheitä tuottanut kohta, eli luvun 1.5 ympäristössä tapahtuva kertolasku voitaisiin arvioida tarkemmin hyödyntämällä 15 kertotaulun lähistöllä olevien lukujen kertolaskuja.

Jos osaisi vaivatta ulkoa kertotaulut aina 25:een saakka, niin tämän artikkelin alussa esitetyistä laskutoimituksista saisi huomattavasti tarkemmat likiarvot, sillä

Esimerkki 1. $1.2 \cdot 3.7$ on likimain $1.2 \cdot 4 = 4.8$. Nyt suhteelliseksi virheeksi tulee noin 8.1 % (vrt. aiemmin saatu 9.1 %)

Esimerkki 2. $15.43 \cdot 13.68$ on likimain $15 \cdot 14 = 210$. Nyt suhteelliseksi virheeksi tulee noin 0.5 % (vrt. aiemmin saatu 5.3 %)

Esimerkki 3. $0.006189 \cdot 1.52978$ on likimain $0.006 \cdot 1.5 = 0.009$. Nyt suhteelliseksi virheeksi tulee noin 4.9 % (vrt. aiemmin saatu 26.7 %)

Tutkimus kulutti aikaa ja voimavaroja. Excel-ohjelmani onkin uupunut, jopa lähes loppuun palanut. Kuten usein käy tällaisessa tapauksessa, herätti alkuperäinen kysymyksen asettelu paljon uusia kysymysmerkkejä. Nyt tein tämän tutkimuksen simuloimalla Excelin avulla miljoonia kertolaskuja. Olisinko voinut tässä hyödyntää enemmän matematiikkaa ja ohittaa tällaisen epätieteelliseltä kalskahtavan arvontavaiheen? Toki olisin, mutta se jää myöhempien aikojen tehtäväksi. Alustavaa lähestymistä aihetta kohtaan on jo tapahtunutkin, vaikkakin enin intoni on jo tässä vaiheessa raskaasti hyytynyt. Eikä vähäisimpänä syynä moiseen ole suinkaan se kertotaulun opetteleminen kahteenkymmeneenviiteen saakka.

Juhani Paananen

Matematiikan lehtori

Seinäjoen ammattikorkeakoulu

Lähteet:

Rose, W. N. (1918). Mathematics for Engineers (Part 1). Näköispainos painettu 2020.

Ketonen, Jouko (1963): Käytännön laskutaito 1963.