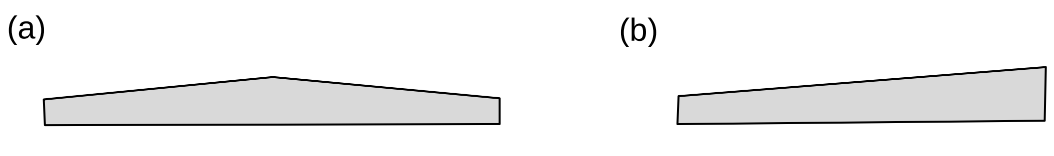
MUUTTUVAPOIKKILEIKKAUKSISEN PALKIN TAIPUMA

JOHDANTOA

Eurokoodipohjaisessa mitoituksessa rakenteet mitoitetaan tyypillisesti murtorajatilassa ja käyttörajatilassa. Murtorajatilamitoituksessa rakenteet mitoitetaan siten, että niillä on riittävä kestävyys suhteessa kuormien aiheuttamiin palkin sisäisiin rasituksiin. Käyttörajatila-mitoituksessa rakenteen mitoitetaan käyttökelpoisuuden suhteen. Mitoitus taipumalle on yksi käyttörajatilamitoituksen osa-alue. Mitoitus taipumalle sisältyy erityisesti palkkien, niin teräs-, teräsbetoni- kuin puupalkkien käyttörajatilamitoitukseen. Taipumamitoituksessa palkin suurin taipuma käyttörajatilan kuormilla ei saa olla suurempi kuin materiaali-kohtaisissa mitoitusohjeissa annettu taipuman suurin sallittu arvo.

Kun palkin poikkileikkauksen korkeus ei ole vakio palkin jännemitan suunnassa vaan muuttuu, puhutaan muuttuvapoikkileikkauksisesta (tai vaihtuvakorkuisesta) palkista. Periaatteessa myös poikkileikkauksen leveys voi muuttua, mutta tämä on harvinaisempi tapaus. Hyviä esimerkkejä ovat: liimapuinen harjapalkki ja pulpettipalkki (Kuva 1). Muuttuvapoikkileikkauksisen palkin tapauksessa palkin mitoitus taipumalle ei ole niin yksinkertaista kuin vakiopoikkileikkauksisen palkin. Mitoitusta käsittelevästä kirjallisuudesta löytyy likimääräisiä laskentakaavoja muuttuvapoikkileikkauksisen palkin taipumamitoi-tukseen (Liimapuukäsikirja, 2015 ja Borgström, 2016).

Muuttuvapoikkileikkauksisen palkin taivutus- ja leikkausjäykkyys eivät ole vakioita, joten taipuman differentiaaliyhtälöt eivät ole helposti ratkaistavissa. Tästä syystä turvaudutaan johonkin numeeriseen ratkaisumenetelmään. Tässä artikkelissa ratkaisumenetelmäksi on valittu differenssimenetelmä. Kun palkin poikkileikkauksen korkeuden suhde palkin jännemittaan on merkittävän suuri, tulee leikkausmuodonmuutoksen vaikutus taipuma-laskennassa ottaa huomioon. Leikkausmuodonmuutoksen huomiointi johtaa ns. Timoshenkon palkkiteorian käyttöön (Pennala, 2002).



Kuva 1: (a) Symmetrinen harjapalkki ja (b) pulpettipalkki.

Artikkelin lopussa käytetään differenssimenetelmää kahden esimerkkipalkin suurimman taipuman määrittämiseen. Vertailun vuoksi määritetään nämä taipuman arvot myös mitoituskirjallisuudessa esitetyillä likikaavoilla.

PALKKITEORIOIDEN YHTÄLÖT

Tavanomaisin palkkiteoria on Euler-Bernoullin palkkiteoria (teknillinen taivutusteoria). Sen yhteydessä taipuman v derivaattaa v' nimitetään kiertymäksi φ eli $\varphi = v'$. Kiertymän derivaatalla taas on yhteys palkin taivutusmomenttiin M differentiaaliyhtälön

$$\varphi' = -\frac{M}{EI} \tag{1}$$

mukaisesti, missä EI on palkin taivutusjäykkyys. Euler-Bernoullin palkkiteorian tapauksessa yhtälöstä (1) saadaan edelleen taipumalle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$v'' = -\frac{M}{EI} \tag{2}$$

Timoshenkon palkkiteoriassa taipuman derivaatta *ei ole yhtäsuuri kuin kiertymä* eli $\varphi \neq v'$. Niiden erotusta nimitetään liukumaksi ja merkitään symbolilla γ eli $\gamma = v' - \varphi$. Kun Euler-Bernoullin palkkiteoriassa esiintyy vain yksi siirtymäsuure, taipuma, niin Timoshenkon palkkiteoriassa esiintyy kaksi siirtymäsuuretta: taipuma ja kiertymä. Tästä syystä tarvitaan myös kaksi yhtälöä, joista toinen on yhtälö (1) ja toinen on

$$v' - \varphi = \frac{Q}{\overline{GA}} \tag{3}$$

missä $\overline{GA} = kGA$ on palkin leikkausjäykkyys, missä k on ns. leikkauskorjauskerroin. Poikkileikkausmuodosta riippuva leikkauskorjauskerroin ottaa huomioon vakioarvosta poikkeavan leikkausjännityksen jakauman. Esimerkiksi suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa $k = 5/6$ (Pennala, 2002).

DIFFERENSSIMENETELMÄ TAIPUMALASKENTAAN

Taipuman derivaattojen differenssiapproksimaatiot

Taipuman asteen p Taylorin kehitelmä pisteen i suhteen on (Kreyszig, 1988)

$$v(x) = v(x_i) + v'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}v''(x_i)(x - x_i)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}v^{(p)}(x_i)(x - x_i)^p \tag{4}$$

Käytetään tasavälistä laskentaverkkoa, missä peräkkäisten laskentapisteiden väli on vakio h eli $h = x_i - x_{i-1}$. Kirjoittamalla taipuma pisteissä $i - 1$ ja $i + 1$, saadaan kaavan (4) avulla johdettua seuraava differenssiapproksimaatio taipuman derivaatalle pisteessä i (lasku-teknisiin yksityiskohtiin ei tässä esityksessä mennä)

$$v_i' = v'(x_i) \approx \frac{1}{2h}(v_{i+1} - v_{i-1}) + \cdots \tag{5}$$

missä esimerkiksi $v_{i+1} = v(x_{i+1})$ (Pennala, 2002). Kirjoittamalla vastaavasti taipuma pisteissä $i-1, i$ ja $i+1$, saadaan kaavan (4) avulla johdettua differenssiapproksimaatio taipuman toisen kertaluvun derivaatalle pisteessä i

$$v_i'' = v''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + \cdots \tag{6}$$

Differenssikaavat taipumalaskentaan

Euler-Bernoullin palkkiteorian taipuman ja taivutusmomentin välistä differentiaaliyhtälöä (2) vastaava differenssiyhtälö saadaan ottamalla huomioon yhtälössä (2) kaava (6). Lopputuloksena saadaan differenssikaava

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -\frac{h^2 M_i}{EI_i} \tag{7}$$

Timoshenkon palkkiteorian tapauksessa taipumalaskentaan liittyviä differentiaaliyhtälöitä on kaksi, yhtälöt (1) ja (3). Ottamalla niissä huomioon kaava (5) taipuman derivaatalle ja vastaava kaava kiertymän derivaatalle päädytään differenssikaavoihin

$$\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} = -\frac{2hM_i}{EI_i} \tag{8}$$

ja

$$v_{i+1} - v_{i-1} - 2h\varphi_i = \frac{2hQ_i}{GA_i} \tag{9}$$

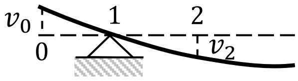
Differenssimenetelmässä differenssiyhtälöt kirjoitetaan kaikissa laskentaverkon sisäpisteissä (pisteissä, jotka eivät ole sauvan päissä). Palkin reunaehdot huomioidaan reunalla sijaitsevien pisteiden arvoissa. Tässä artikkelissa tarkastellaan vain päistään vapaasti tuettua palkkia, jolloin taipuma palkin päissä on nolla. Tällöin esimerkiksi palkin vasemmassa päässä, pisteessä 1, on oltava voimassa $v_1 = 0$. Näin menetellään Euler-Bernoullin palkkiteoriaan perustuvaa yhtälöä (7) sovellettaessa.

Timoshenkon palkkiteorian tapauksessa yhtälöiden (8) ja (9) kirjoittaminen pelkästään laskentaverkon sisäpisteissä ei riitä taipuman ja kiertymän arvojen määrittämiseen vaan tarvitaan myös kaksi lisäyhtälöä, yksi sauvan kummassakin päässä. Lisäyhtälönä käytetään yhtälöä (9). Tämä johtaa laskentaverkon laajentamiseen laskenta-alueen (palkin) ulkopuolelle. Tarkastellaan esimerkkinä palkin vasemman pään tilannetta. Viitataan laskenta-alueen ulkopuoliseen pisteeseen kuvassa 2 numerolla 0. Differenssiyhtälö (9) palkin päässä, pisteessä 1, on aluksi

$$v_2 - v_0 - 2h\varphi_1 = \frac{2hQ_1}{GA_1} \tag{10}$$

Pisteestä 1 vapaasti tuetun palkin tapauksessa, ulkopuolisen pisteen 0 taipuman arvo on $v_0 = -v_2$ (Kuva 2 havainnollistaa tilannetta), jolloin yhtälö (10) on lopulta

$$2v_2 - 2h\varphi_1 = \frac{2hQ_1}{GA_1} \tag{11}$$



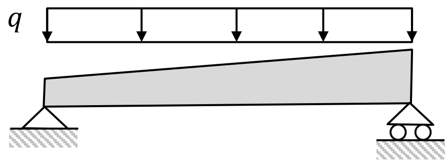
Kuva 2: Palkin vasemman pään tilanne ja ulkopuolinen laskentapiste 0.

Vastaavalla tavalla menetellään palkin oikean pään tuella. Differenssimenetelmä johtaa lopulta lineaariseen yhtälöryhmään, josta taipuman arvot laskentaverkon pisteissä voidaan määrittää.

ESIMERKKEJÄ

Esimerkki 1: Liimapuinen pulpettipalkki

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä liimapuista kuvan 3 pulpettipalkkia, jonka jännemitta $L = 12\,m$. Suorakaidepoikkileikkauksen leveys on $b = 190\,mm$, poikkileikkauksen korkeus tuilla (tukien keskilinjoilla) on $810\,mm$ ja $1560\,mm$. Materiaalin kimmomoduuli on $E = 13\,GPa$ ja leikkausmoduuli $G = 0{,}65\,GPa$. Tasaisen kuorman arvo $q = 7{,}70\,kN/m$.



Kuva 3: Pulpettipalkki, jolla tasainen kuorma.

Palkeilla, joilla $2L/(h_s + h_{max}) < 25$, pitää leikkausmuodonmuutoksen vaikutus ottaa huomioon, missä h_s on poikkileikkauksen korkeus tuella ja h_{max} on poikkileikkauksen suurin korkeus (Liimapuukäsikirja, 2015). Puurakenteiden mitoituksessa vapaasti tuettujen tasaisella kuormalla kuormitettujen pulpettipalkkien ja symmetristen harjapalkkien suurin taipuma voidaan määrittää kaavasta

$$v_{max} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI_e} + 0{,}35\,\frac{qL^2}{Gb(h_s + h_{max})} \tag{12}$$

missä ns. efektiivinen jäyhyysmomentti I_e määritetään efektiivisen korkeuden h_e avulla, joka pulpettipalkin tapauksessa määritetään kaavasta

$$h_e = h_s + 0{,}45 \cdot L \cdot tan(\alpha) \tag{13}$$

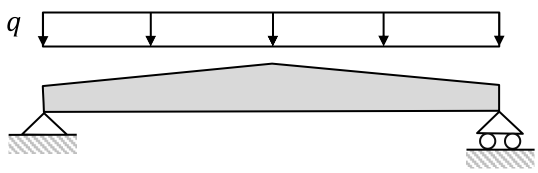
Kaavassa (12) ensimmäinen termi on Euler-Bernoullin palkkiteorian osuus ja jälkimmäinen leikkausmuodonmuutoksen huomioiva taipumalisä. Kaavasta (12) saadaan suurimmaksi taipumaksi

$$v_{max} = 6{,}72\ mm + 1{,}33\ mm = 8{,}05\ mm. \tag{14}$$

Differenssimenetelmällä vastaavaksi taipumaksi saadaan $7{,}86\ mm$, josta leikkausmuodonmuutoksen huomioiva taipumalisä on $1{,}21\ mm$. Likimääräinen mitoituskaava (12) antaa hieman suuremman taipuman arvon kuin differenssimenetelmä, eron ollessa 2,4 %.

Esimerkki 2: Liimapuinen symmetrinen harjapalkki

Tarkastellaan toisena esimerkkinä liimapuista symmetristä kuvan 4 harjapalkkia, jonka jännemitta $L = 20\ m$. Suorakaidepoikkileikkauksen leveys on $b = 240\ mm$, poikkileikkauksen korkeus tuilla ja harjalla on $1300\ mm$ ja $1850\ mm$. Materiaalin kimmomoduuli on $E = 13\ GPa$ ja leikkausmoduuli $G = 0{,}65\ GPa$. Tasaisen kuorman arvo $q = 10{,}69\ kN/m$.



Kuva 4: Symmetrinen harjapalkki, jolla tasainen kuorma.

Harjapalkille efektiivinen korkeus määritetään kaavasta

$$h_e = h_s + 0{,}33 \cdot L \cdot tan(\alpha) \tag{15}$$

Kaavasta (12) saadaan suurimmaksi taipumaksi

$$v_{max} = 18{,}62\ mm + 3{,}05\ mm = 21{,}67\ mm. \tag{16}$$

Differenssimenetelmällä vastaavaksi taipumaksi saadaan $20{,}86\ mm$, josta leikkausmuodonmuutoksen huomioiva taipumalisä on $2{,}79\ mm$. Likimääräinen mitoituskaava (12) antaa tässäkin tapauksessa hieman suuremman taipuman arvon kuin differenssimenetelmä, eron ollessa 3,7 %.

JOHTOPÄÄTÖKSET

Mitoitus taipumalle on yksi osa palkkien käyttörajatilamitoitusta. Jos palkin poikkileikkaus ei ole palkin jännemitan suunnassa vakio vaan muuttuu, puhutaan muuttuvapoikkileikkauksisesta palkista. Tässä tapauksessa suurimman taipuman määrittäminen ei ole yhtä yksinkertaista kuin vakiopoikkileikkauksisen palkin tapauksessa. Puurakenteiden mitoitus-kirjallisuudesta löytyy likikaavoja eräille muuttuvapoikkileikkauksisen palkin mitoitus-tilanteille. Differenssimenetelmä on eräs numeerinen laskentamenetelmä, jolla palkin suurimman taipuman arvo voidaan selvittää. Differenssimenetelmän yhtälöt ovat verrattain helppo muodostaa mille tahansa kuormitustapaukselle huomioiden erilaiset palkin tuentatapaukset. Tässä artikkelissa käsiteltiin esimerkkeinä liimapuista pulpetti- ja symmetristä harjapalkkia, joiden taipumalaskennassa myös leikkausmuodonmuutoksen vaikutus otettiin huomioon.

LÄHTEET

Pennala, E, 2002: Lujuusopin perusteet, Otatieto.

Kreyszig, E, 1988: Advanced engineering mathematics, John Wiley & Sons, Inc., Sixth Edition.

Liimapuukäsikirja, Osa 2, 2015, Suomen Liimapuuyhdistys ry ja Puuinfo Oy.

Borgström, E, 2016: Design of timber structures, Structural aspects of timber construction, Volume 1, Edition 2: 2016, Swedish Forest Industries Federation, Swedish Wood.

Martti Perälä, TkL, lehtori
SeAMK Tekniikka