TAYLORIN KEHITELMÄ PALKKITEHTÄVISSÄ

JOHDANTOA

Jatkuva funktio voidaan tarkasteluvälillä esittää Taylorin kehitelmänä (sarjana) tietyn pisteen suhteen. Artikkelissa käsitellään teknillistä taivutusteoriaa noudattavaa palkkia, jonka toimintaa kuvaavat perusyhtälöt aluksi esitetään. Tämän jälkeen muodostetaan Taylorin kehitelmät palkin suureille. Ottamalla huomioon palkin perusyhtälöt Taylorin kehitelmän termeissä saadaan käyttökelpoiset laskentayhtälöt, joita sovelletaan muutamien palkkitehtävien yhteydessä.

TEKNILLISEN TAIVUTUSTEORIAN PERUSYHTÄLÖT

Esitetään aluksi teknillisen taivutusteorian (Euler-Bernoullin palkkiteorian) perusyhtälöt. Palkkialkion tasapainotarkastelulla saadaan johdettua tutut tasapainoyhtälöt

$$Q' = -q \tag{1}$$

$$Q = M' \tag{2}$$

missä Q on leikkausvoima, M on taivutusmomentti ja q on poikittainen kuorma. Taivutus-momentin ja leikkausvoiman yhteys taipumaan v on differentiaaliyhtälöiden

$$M = -EIv'' \tag{3}$$

$$Q = -EIv''' \tag{4}$$

mukainen, missä EI on palkin taivutusjäykkyys. Kiertymä φ on taipuman derivaatta eli $\varphi = v'$ ja toisaalta kuorman ja taipuman yhteys on neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$EIv^{(4)} = q \tag{5}$$

mukainen. Edellä taivutusjäykkyys EI oletettiin vakioksi.

TAYLORIN KEHITELMÄT PALKIN SUUREILLE

Asteen p Taylorin kehitelmä sovellettuna taipumalle pisteen i suhteen on (Kreyszig, E. 1988)

$$v(x) = v(x_i) + v'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}v''(x_i)(x - x_i)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}v^{(p)}(x_i)(x - x_i)^p \tag{6}$$

Ottamalla kehitelmästä (6) mukaan termit asteeseen 4 asti ja kirjoittamalla se pisteelle 2 pisteen 1 suhteen päädytään tulokseen

$$v_2 = v_1 + v_1'(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}v_1''(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{6}v_1'''(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{24}v_1^{(4)}(x_2 - x_1)^4 \tag{7}$$

missä $v_1 = v(x_1)$, $v_2 = v(x_2)$ $v_1' = v'(x_1)$, jne… Ottamalla huomioon taipuman kehitelmässä (7) teknillisen taivutusteorian perusyhtälöt, saadaan se muotoon

$$v_2 = v_1 + \varphi_1(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}\frac{M_1}{EI}(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{6}\frac{Q_1}{EI}(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{24}\frac{q_1}{EI}(x_2 - x_1)^4 \tag{8}$$

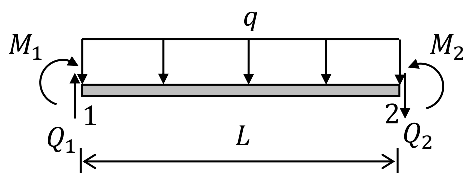
Vastaavalla tavalla voidaan kirjoittaa kiertymälle, leikkausvoimalle ja taivutusmomentille

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{M_1}{EI}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}\frac{Q_1}{EI}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{6}\frac{q_1}{EI}(x_2 - x_1)^3 \tag{9}$$

$$Q_2 = Q_1 - q_1(x_2 - x_1) \tag{10}$$

$$M_2 = M_1 + Q_1(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}q_1(x_2 - x_1)^2 \tag{11}$$

Havaitaan, että yhtälöt (10) ja (11) ovat pisteiden 1 ja 2 välisen palkin osan tasapainoyhtälöt, joista ensimmäinen on pystysuuntainen tasapainoyhtälö ja jälkimmäinen momenttitasapainoyhtälö pisteen 2 suhteen (Kuva 1), kun kuormituksen on tasainen jakaantunut kuorma.



Kuva 1: Pisteiden 1 ja 2 välinen palkki, jolla tasainen kuorma.

YHTÄLÖRYHMÄ

Yhtälöissä (8) – (11), joita on neljä kappaletta, esiintyy yhteensä kahdeksan suuretta: pisteiden 1 ja 2 taipumat ja kiertymät sekä leikkausvoimat ja taivutusmomentit. Jos neljä näistä kahdeksasta suureesta tunnetaan, voidaan loput neljä suuretta määrittää yhtälöiden (8) – (11) muodostamasta yhtälöryhmästä.

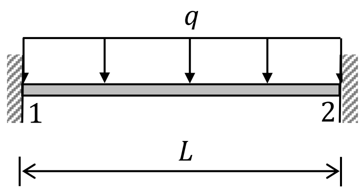
Esimerkki 1: Päistään jäykästi kiinnitetty palkki, tasainen kuorma

Kuvan 2 päistään jäykästi kiinnitetyn palkin tapauksessa sekä taipumat että kiertymät ovat sauvan päissä (pisteissä 1 ja 2) nollia. Palkin pituus on $L = x_2 - x_1$. Tässä tapauksessa yhtälöryhmä on palkin päiden leikkausvoimille ja taivutusmomenteille matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}L^3 & \frac{1}{2}L^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}L^2 & L & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -L & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{24}qL^4 \\ \frac{1}{6}qL^3 \\ -qL \\ -\frac{1}{2}qL^2 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

jonka ratkaisuna saadaan

$$Q_1 = \tfrac{1}{2}qL,\ \ Q_2 = -\tfrac{1}{2}qL,\ \ M_1 = -\tfrac{1}{12}qL^2,\ \ M_2 = -\tfrac{1}{12}qL^2. \tag{13}$$



Kuva 2: Päistään jäykästi kiinnitetty palkki, jolla tasainen kuorma.

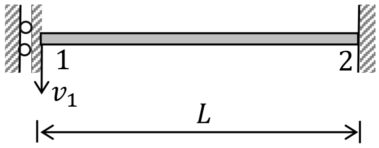
Esimerkki 2: Esimerkin 1 palkin alkupään tuen pystysiirtymän vaikutus

Kuvan 3 päistään jäykästi kiinnitetyn palkin alkupään tuki, piste 1, saa pystysiirtymän v_1. Tässä tapauksessa taipuma palkin loppupäässä, pisteessä 2, on nolla. Kiertymät ovat sauvan päissä (pisteissä 1 ja 2) myös nollia. Kuormaa ei ole eli $q = 0$. Tässä tapauksessa yhtälöryhmä on palkin päiden leikkausvoimille ja taivutusmomenteille

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}L^3 & \frac{1}{2}L^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}L^2 & L & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -L & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{14}$$

jonka ratkaisuna saadaan

$$Q_1 = -\tfrac{12EI}{L^3}v_1,\ \ Q_2 = -\tfrac{12EI}{L^3}v_1,\ \ M_1 = \tfrac{6EI}{L^2}v_1,\ \ M_2 = -\tfrac{6EI}{L^2}v_1. \tag{15}$$



Kuva 3: Päistään jäykästi kiinnitetty palkki, tuen 1 siirtymä.

Esimerkki 3: Ulokepalkki, tasainen kuorma

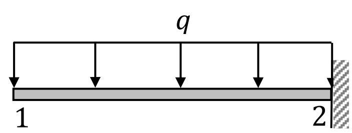
Edelliset esimerkit olivat staattisesti määräämättömiä palkkeja. Käsitellään seuraavaksi staattisesti määrättyä palkkia, jolloin sen leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvot saadaan helposti selville myös tasapainotarkastelulla. Kuvan 4 ulokepalkin tapauksessa sekä taipuma että kiertymä ovat sauvan loppupäässä, pisteessä 2, nollia. Palkin alkupäässä, pisteessä 1, leikkausvoima ja taivutusmomentti ovat sen sijaan nollia. Tässä tapauksessa yhtälöryhmä on palkin alkupään taipumalle ja kiertymälle sekä palkin loppupään leikkausvoimalle ja taivutusmomentille

$$\begin{bmatrix} -1 & -L & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{24}\frac{qL^4}{EI} \\ \frac{1}{6}\frac{qL^3}{EI} \\ -qL \\ -\frac{1}{2}qL^2 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

jonka ratkaisuna saadaan

$$v_1 = \frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI}, \;\; \varphi_1 = -\frac{1}{6}\frac{qL^3}{EI}, \;\; Q_2 = -qL, \;\; M_2 = -\frac{1}{2}qL^2. \tag{17}$$

Toisaalta yhtälöryhmän (16) ensimmäiset kaksi yhtälöä voidaan ratkaista erillisinä kuten myös yhtälöryhmän kaksi jälkimmäistä yhtälöä. Palkin loppupään leikkausvoimalle ja taivutusmomentille saatiin ulokepalkille tutut arvot.



Kuva 4: Ulokepalkki, jolla tasainen kuorma.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Soveltamalla Taylorin kehitelmää palkin perussuureille, havaitaan esimerkiksi, että leikkausvoiman ja taivutusmomentin kehitelmät ovat itseasiassa palkin tasapainoyhtälöt. Ottamalla mukaan myös taipuman ja kiertymän kehitelmät voidaan helposti määrittää palkin päissä vaikuttavien leikkausvoimien ja taivutusmomenttien arvot staattisesti määräämättömälle palkille. Menetelmä on suoraviivaisesti sovellettavissa, ainakin, jos palkin kuorma on esitettävissä yhdellä lausekkeella. Käytännössä kuormituksessa voi kuitenkin olla myös epäjatkuvuutta. Tällaisessa tapauksessa menetelmän käyttö monimutkaistuu ja laskenta pitää tehdä laskentavälillä paloittain.

LÄHTEET

Kreyszig, E, 1988: Advanced engineering mathematics, John Wiley & Sons, Inc., Sixth Edition.

Martti Perälä, TkL, lehtori
SeAMK Tekniikka