1 Der Skandal des Irrationalen

Die Geschichte beginnt mit einem Geheimnis und mit einem Skandal. Vor etwa 2 500 Jahren stellten in Griechenland ein Philosoph namens Pythagoras und seine Anhänger den Leitsatz „Alles ist Zahl“ für sich auf. Diese pythagoräische Bruderschaft entdeckte viele wichtige mathematische Wahrheiten und erkundete, wie diese sich in der Welt auswirken. Aber sie hüllten sich in Dunkel, da sie sich als Hüter der mathematischen Geheimnisse gegenüber der gewöhnlichen Welt betrachteten. Durch ihre Geheimnistuerei gingen viele Einzelheiten ihrer Arbeit verloren; auch blieb unklar, inwieweit sie auf früheren Erkenntnissen aus Mesopotamien und Ägypten aufbauten.

Ihre wissenschaftlichen Nachfolger sahen in der pythagoräischen Schule den Ursprung der Mathematik. Euklids *Die Elemente*, eine meisterhafte Zusammenstellung, die mehrere hundert Jahre später geschrieben wurde, beinhaltet die pythagoräischen Entdeckungen ebenso wie spätere Arbeiten und gipfelt in der Konstruktion der fünf *platonischen Körper*. Dies sind die einzigen regelmäßigen Vielflächner (reguläre Polyeder), also durch Vielecke begrenzte Figuren mit lauter gleichen Seiten und Winkeln: das regelmäßige Tetraeder (Vierflächner), der Würfel (Hexaeder), die regelmäßigen Oktaeder (Achtflächner), Dodekaeder (Zwölfflächner) und Ikosaeder (Zwanzigflächner), siehe Abb. 1.1. Ihren wichtigsten Beitrag lieferten die Pythagoräer jedoch durch den Begriff des mathematischen Beweises, durch die Idee, aus theoretischen Aussagen eine unwiderlegbare Beweisführung erstellen zu können, die keinerlei Ausnahmen zuläßt. In diesem

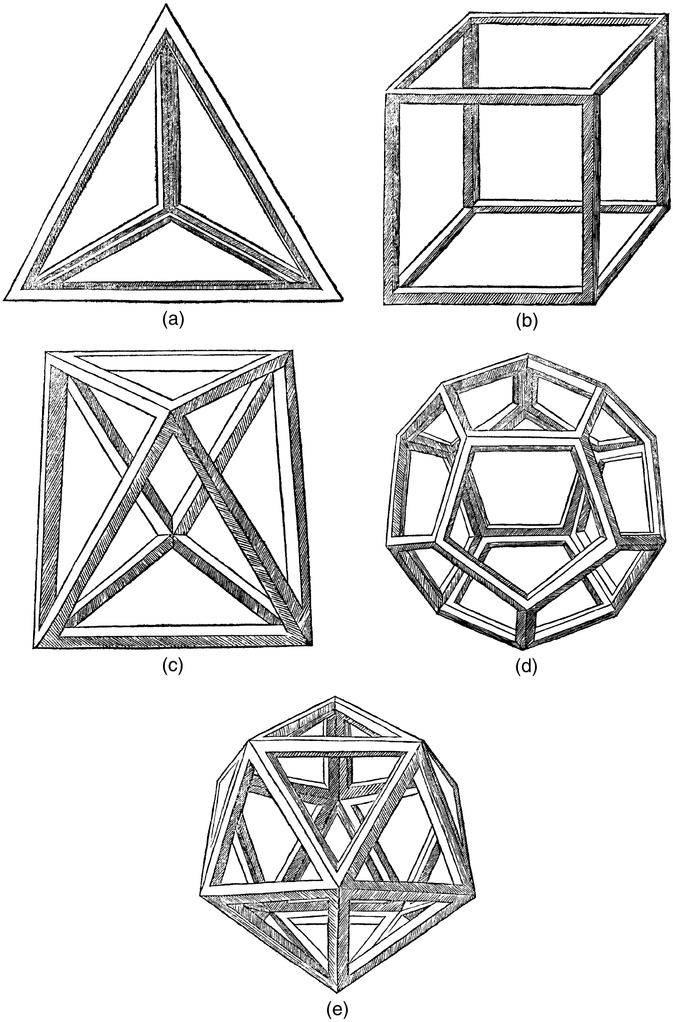


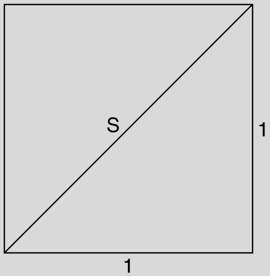
Abb. 1.1 Die fünf regelmäßigen, platonischen Körper, gezeichnet nach Leonardo da Vinci, aus Luca Pacioli, *De divina proportione* (1509). (a) Tetraeder, (b) Würfel, (c) Oktaeder, (d) Dodekaeder, (e) Ikosaeder.

Punkt gingen sie über die Babylonier hinaus, die trotz ihrer vielen mathematischen Errungenschaften offenbar kein Interesse daran entwickelt hatten, mathematische Sätze zu beweisen. Es waren tatsächlich die Pythagoräer und ihre Nachfolger, welche „die Mathematik“ in dem Sinne, wie wir ihn immer noch kennen, erschaffen haben – ein Wort, das „die gelernten Dinge“ bedeutet und sicheres, zweifelsfreies Wissen meint.

Die Mythen um die pythagoräische Bruderschaft verbergen, wer genau ihre Entdeckungen machte, und wie. Von Pythagoras selbst wird erzählt, er habe die einfachen, ganzzahligen Proportionen hinter den musikalischen Intervallen erkannt, die er von den Ambossen einer Schmiede tönen hörte: die Oktave (welche einem Verhältnis 2 : 1 entspricht), die Quinte (3 : 2), die Quarte (4 : 3), und worin sich die Verhältnisse der Gewichte der Schmiedehämmer zueinander ausdrücken. Dadurch erkannte er, daß Musik Zahlen hörbar macht. (Hier ist eine gute Stelle, um einen wichtigen Unterschied anzumerken: Der neuzeitliche Bruch $\frac{3}{2}$ bezeichnet in Teile gebrochene Einheiten, wohingegen die alten Griechen das Verhältnis, oder die Proportion, 3 : 2 benutzten, um eine Beziehung zwischen ungebrochenen Ganzen zu bezeichnen.) Eine andere Geschichte erzählt, Pythagoras habe hundert Ochsen geopfert, nachdem er den heute nach ihm benannten „Satz des Pythagoras“ entdeckt habe. Diese Geschichten erzählen Ereignisse, denen eine solche Bedeutung zugemessen wurde, daß sie einer mythischen Weitererzählung bedurften.

Es gibt einen dritten pythagoräischen Mythos, der von einer unvorhergesehenen Katastrophe erzählt. Entgegen ihrem Leitsatz „Alles ist Zahl“ entdeckten die Pythagoräer Größen, die sich grundlegend von normalen Zahlen unterscheiden. Betrachten wir zum Beispiel ein Quadrat der Seitenlänge 1. Die Länge seiner Diagonale kann dann weder als ganzzahliges Vielfaches der Seitenlänge noch in einer ganzzahligen Proportion dazu ausgedrückt werden. Sie sind *unvergleichbar* oder *inkommensurabel.* Kasten 1.1 beschreibt den einfachen Beweis dafür, wie er von Aristoteles wiedergegeben wird. Es ist ein Beispiel eines *Beweises durch Widerspruch*, einer *reductio ad absurdum*: Man beginnt

Kasten 1.1
Die Diagonale eines Quadrates ist inkommensurabel mit seiner Seite:



Die Seite des Quadrates habe die Länge 1 und die Diagonale die Länge s. Nehmen wir an, s ließe sich als ganzzahlige Proportion $s = m : n$ ausdrücken. Wir können dann annehmen, daß m und n so klein wie möglich gewählt sind, also keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Nun gilt $s^2 = m^2 : n^2 = 2 : 1$, denn nach dem Satz des Pythagoras ist das Quadrat über der Hypotenuse s gleich der Summe der Quadrate über den beiden Seiten. Also ist m^2 gerade (als Doppeltes einer natürlichen Zahl) und somit auch m (da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade wäre). Aber dann muß n ungerade sein, denn sonst könnte man m und n durch den Faktor 2 teilen und die gewählte Proportion vereinfachen. Da m gerade ist, können wir $m = 2p$ für eine natürliche Zahl p schreiben. Dann gilt $m^2 = 4p^2 = 2n^2$ und daher $n^2 = 2p^2$. Aber damit ist n^2 gerade und somit auch n. Da aber eine natürliche Zahl nicht sowohl gerade als auch ungerade sein kann, muß die ursprüngliche Annahme $s = m : n$ falsch sein. Daher läßt sich die Diagonale eines Quadrates nicht als ganzzahlige Proportion in der Seitenlänge ausdrücken.

mit der Annahme, es gäbe eine solche Proportion, und zeigt dann, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt, nämlich hier, daß ein und dieselbe Zahl sowohl gerade als auch ungerade sein muß. Daher muß die Annahme falsch sein: Keine ganzzahlige Proportion kann die Längenbeziehung zwischen Diagonale und Seite eines Quadrates beschreiben. Diese ist also, nach heutigem Sprachgebrauch, *irrational*.

Der griechische Ausdruck dafür ist schärfer. Das Wort für „Proportion" ist *logos*, was unter anderem „Wort, Rechnung" bedeutet und von einer Wurzel „aufnehmen" oder „sammeln" kommt. Die neuen Größen wurden *alogon*, also „unausdrückbar, unsagbar" genannt. Irrationale Größenverhältnisse ergeben sich zwangsläufig aus der Geometrie, aber sie sind unausdrückbar durch gewöhnliche Zahlen, und die Griechen waren sorgsam genug, verschiedene Wörter für Zahlen (*arithmos*) und für Größen (*megethos*) zu benutzen. Später verschwamm der Unterschied, aber im Augenblick ist es wichtig, darauf zu bestehen. Das Wort *arithmos* beschreibt die zum Zählen benutzten Zahlen, beginnend mit der Zwei, denn die „Einheit" oder die „Eins" (die Griechen nannten es die „Monade") sahen sie nicht als Zahl an. Die indisch-arabische Null kannten die Griechen nicht und hätten sie mit Sicherheit nicht als *arithmos* anerkannt, und auch heute zählen die Menschen üblicherweise nicht „null, eins, zwei, drei, …". Daher steht eine Wendung wie „es gibt keine Äpfel" eher für „es ist nicht der Fall, daß es Äpfel gibt" als für „hier gibt es null Äpfel".

Erst im siebzehnten Jahrhundert wurde der Begriff „Zahl" über die natürlichen Zahlen ab Zwei hinaus auch auf irrationale Größen ausgedehnt. Die alten Mathematiker dagegen betonten den Unterschied zwischen den verschiedenen Arten mathematischer Größen. Das Wort *arithmos* geht vermutlich auf die indo-europäische Wurzel *(a)rī* zurück, die in Wörtern wie *Ritus* und *Rhythmus* erkennbar ist. Im vedischen Indisch bedeutete *ṛta* die kosmische Ordnung, den regelmäßigen Ablauf der Tage und Jahreszeiten, dessen Gegenteil (*anṛta*) für Unwahrheit und Sünde stand. Somit geht das griechische Wort für „(natürliche) Zahl" auf eine Vorstellung von kosmischer Ordnung zurück, die sich in einem besonderen Ritual spiegelt: Gewisse Dinge kommen *zuerst*, andere an *zweiter* Stelle, und so weiter. Hierbei ist die rechte Ordnung wichtig; man kann keine der emporgekommenen Größen wie „ein Halb" oder gar „die Quadratwurzel aus Zwei" zwischen den ganzen Zahlen gebrauchen. Die ganzen Zahlen sind ein Muster an Integrität und Ganzheit; sie sollten nicht mit teilbaren Größen vermischt werden.

Zunächst nahmen die Pythagoräer an, alles wäre aus natürlichen Zahlen gemacht. Am Anfang floß die grundlegende Eins in die Zwei über, dann in die Drei, dann in die Vier. Den Pythagoräern waren diese vier Zahlen heilig, da $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eine volle Dekade ergibt. Sie beobachteten auch, daß den konsonanten Intervallen in der Musik Proportionen zugrundeliegen, bei denen nur Zahlen bis vier auftreten, aus der „heilgen Tetraktys" (Vierheit), wie sie es nannten. Sie vermuteten, daß die ganze Welt aus solchen einfachen Proportionen aufgebaut war. Die Entdeckung von Größen, welche sich nicht durch ganzzahlige Verhältnisse ausdrücken lassen, war daher zutiefst verstörend, da sie das Projekt, die Natur allein durch Zahlen zu erklären, bedrohte. Diese Entdeckung war das dunkelste Geheimnis der Pythagoräer, ihre Enthüllung der größte Skandal. Man kennt weder den Namen des Entdeckers noch den Namen dessen, der es der profanen Welt verraten hat. Manche vermuten, es handele sich um die gleiche Person, vielleicht um Hippasos von Metapont, ungefähr zu Ende des fünften Jahrhunderts v. Chr. Sicherlich war es nicht Pythagoras selbst oder einer seiner frühen Nachfolger. Während Pythagoras seinen Satz mit einem Tieropfer feierte, forderte das Irrationale der Legende nach ein Menschenopfer: Der Verräter des Geheimnisses ertrank im Meer. Jahrhunderte später vermutete der alexandrinische Mathematiker Pappos:

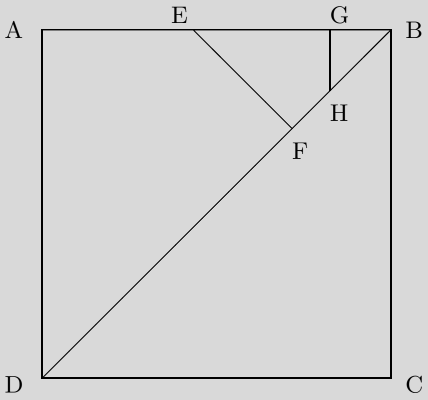
> Alles, was sich auf keine Weise ausdrücken läßt, sowohl das Unaussprechbare wie auch das Unerschaubare, verbirgt sich gern; wenn aber irgendeine Seele auf eine solche Gestalt trifft und sie öffentlich und sichtbar macht, dann wird sie in das Meer des Werdens versenkt und von dessen unsteten Wogen umhergetrieben.

Also diejenigen, welche sich ins Irrationale versenken, ertrinken nicht durch göttliche Rache oder durch die Hand einer empörten Bruderschaft, sondern im dunklen Ozean namenloser Größen. Ironischerweise ist er eine Folgerung aus der Geometrie und gar dem Satz des Pythagoras selbst! Als Pythagoras klar wurde, daß das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten ist, war er sehr nahe an der weiteren Entdeckung, daß die Seiten nicht kommensurabel sind, obwohl die Quadrate es sein können. Tatsächlich hängt das Argument in Kasten 1.1 entscheidend vom Satz des Pythagoras ab, und es legt nahe zu vermuten, daß Pythagoras, hätte er versucht, das Verhältnis von Diagonale zur Seite eines Quadrates auszudrücken, die Unmöglichkeit sofort erkannt hätte. Vermutlich hat er dies nicht getan, aber eben seine Nachfolger.

Die Entdeckung des Irrationalen hatte weitreichende Folgen. Davon ausgehend traf Pappos eine Unterscheidung zwischen solchen „kontinuierlichen Größen" einerseits und den ganzen Zahlen, welche „stufenweise fortschreiten durch Addition von dem kleinsten aus und unbeschränkt weiterlaufen, während die kontinuierlichen Größen mit einem bestimmten Ganzen beginnen und unbeschränkt oft teilbar sind." Ebenso können wir von einer nicht mehr vereinfachbaren Proportion wie $2 : 3$ ausgehend geradewegs eine Reihe vergleichbarer Proportionen bauen: $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = \ldots$. Falls es aber keine kleinste Proportion in einer Reihe gäbe, dann könnte das Ganze gar nicht durch eine Proportion ausgedrückt werden. Das Zitat von Pappos legt nahe, daß diese Argumentation den Pythagoräern die Augen geöffnet haben könnte. Betrachten wir wieder Seite und Diagonale im Quadrat. Der Versuch, beide als Vielfache einer gemeinsamen Einheit auszudrücken, führt zu einem „infiniten Regreß" (Kasten 1.2): Wie klein wir auch die Einheit wählen, das Argument verlangt nach einer noch kleineren. Wieder sehen wir, daß solch eine Einheit nicht existieren kann.

Die Herausforderung der griechischen Mathematik bestand darin, zwei unvergleichbare mathematische Welten zu meistern, nämlich Arithmetik und Geometrie, jede für sich genommen ein einsichtig geordnetes, vollkommenes Reich, jedoch in einer gewissen Spannung untereinander. In Platons Dialogen ruft diese Herausforderung tiefgehende Antworten hervor, welche über die Mathematik hinaus in das emotionale und politische Leben

Kasten 1.2
Ein geometrischer Beweis für die Inkommensurabilität der Diagonale eines Quadrates mit seiner Seite, durch infiniten Regreß:



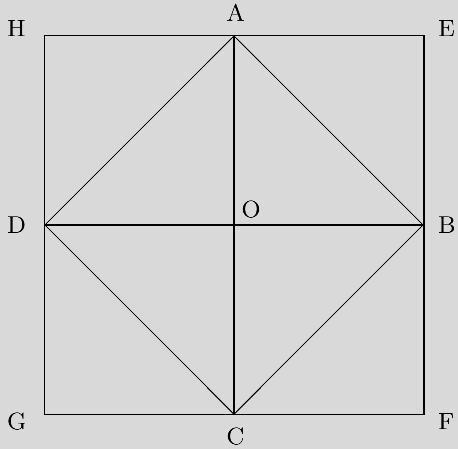
Im Quadrat $ABCD$ trägt man mit einem Zirkel die Strecke $DA = DF$ auf der Diagonalen BD ab. In F errichtet man das Lot EF. Dann ist das Verhältnis von BE zu BF, also von Hypotenuse zur Seite, dasselbe wie von DB zu DA, da die Dreiecke BAD und EFB ähnlich sind. Angenommen AB und BD wären kommensurabel. Dann gäbe es eine Strecke I, von der sowohl AB als auch BD ganzzahlige Vielfache wären. Da $DF = DA$, ist dann also auch $BF = BD - DF$ ein ganzzahliges Vielfaches von I. Nun gilt aber $BF = EF$, denn diese Seiten des Dreiecks EFB entsprechend den übereinstimmenden Seiten des Dreiecks BAD. Auch gilt $EF = AE$, denn die Dreiecke EAD und EFD (verbindet man D und E) sind kongruent. Also ist $AE = BF$ ebenfalls ein Vielfaches von I, und damit auch $BE = BA - AE$. Daher sind sowohl die Seite (BF) als auch die Hypotenuse (BE) Vielfache von I, das somit auch ein gemeinsames Maß für Diagonale und Seite des Quadrates mit Seite BF ist. Dieser Prozeß kann nun wiederholt werden: Auf EB trägt man $EG = EF$ ab und konstruiert das Lot GH auf BG. Das Verhältnis von Hypotenuse zur Seite ist wieder dasselbe, und somit haben auch die Seite des Quadrates über BG und

Kasten 1.2 *Fortsetzung*
seine Diagonale I als gemeinsames Maß. Da wir diesen Vorgang beliebig fortsetzen können, werden wir irgendwann ein Quadrat erreichen, dessen Seitenlänge kleiner als I ist, was unserer ursprünglichen Annahme widerspricht. Daher gibt es kein solches gemeinsame Maß I.

hineinreichen. Ein zentraler Moment ergibt sich im Dialog zwischen Sokrates und Menon, einem einflußreichen Thessalier, Freund und Verbündetem des persischen Königs, zu Besuch in Athen. Menon war für seine amoralische Haltung bekannt, als habgieriger und zynischer Opportunist. Merkwürdigerweise befragt er zu Ende seines Besuchs Sokrates immer wieder, ob Tugend gelehrt werden kann oder angeboren ist. Ihr Gespräch dreht sich um den Unterschied zwischen Wissen und Meinung.

Mitten in der Diskussion ruft Sokrates nach einem Sklavenjungen, den er dazu befragt, wie man die Fläche eines gegebenen Quadrates verdoppelt. Im Gegensatz zu Menon ist der Junge naiv und offenherzig; überzeugt behauptet er, die Fläche des Quadrates verdoppele sich mit doppelter Seitenlänge. Ihre Unterhaltung ist beispielhaft für Sokrates' Philosophie durch Dialog. Im Gespräch wird dem Jungen klar, daß ein Quadrat mit doppelter Seitenlänge die *vierfache* Fläche enthält, was ihn überrascht und bestürzt. Das griechische Wort für solch eine Situation, *aporia*, bedeutet Sackgasse, einen inneren Widerspruch. Kurz vor diesem Gespräch hatten Sokrates' Fragen Widersprüche in Menons Überzeugungen hinsichtlich der Tugend offengelegt, worauf Menon ärgerlich wurde und Sokrates als einen häßlichen Zitterrochen bezeichnete, der seinen Opfern schade und sie hilflos mache. Sokrates antwortet, indem er zeigt, wie gut der Sklavenjunge den „Berührungsschock“ verträgt. Der Junge ist verwundert und neugierig, aber nicht verärgert. Er folgt willig Sokrates' Anleitung zu einer neuen Zeichnung (Kasten 1.3). Mit wenigen diagonalen Strichen erscheint ein wirklich verdoppeltes Quadrat in dem vervierfachten Quadrat des Jungen. Indem er freimütig auf Sokrates' Vorschläge eingeht, erkennt der Junge dies selbst.

Kasten 1.3
Sokrates' Konstruktion des verdoppelten Quadrates in *Menon*:



Sei $AEBO$ das Ausgangsquadrat. Der Sklavenjunge dachte, das Quadrat über der verdoppelten Seite HE hätte die doppelte Fläche, bemerkt aber, daß $HEFG$ in Wirklichkeit die vierfache Fläche von $AEBO$ besitzt. Auf Sokrates' Veranlassung hin zieht er die Diagonalen AB, BC, CD, DA in das Quadrat $HEFG$. Jedes Dreieck AOB, BOC, COD, DOA besitzt nun genau die halbe Fläche des ursprünglichen Quadrates, also ergeben alle vier zusammen das wahrhaft verdoppelte Quadrat $ABCD$.

Menon muß einsehen, daß der „Schock", sein Unwissen einzusehen, dem Jungen, der seine falsche Meinung durch eine richtige ersetzt, nicht geschadet hat. Der Dialog endet mit einem innerlich weißglühenden Menon und einer Vorahnung auf die verärgerten Athener, die sich später für das Todesurteil gegen den Philosophen aussprechen werden. Diese Ungeheuerlichkeit weist auf die Kraft neuer mathematischer Einsichten hin. Obwohl Sokrates nicht auf die Irrationalität der Diagonale einging, war sie doch entscheidend. Die Verdopplung des Quadrates (ein durch und durch „rationales" Unterfangen) muß auf das Irrationale zurückgreifen: eine Tatsache, die Platon und seine Hörer sehr wohl verstanden.

Obgleich eine Folgerung aus der logischen Mathematik, hat das Wort „irrational“ hier ersichtlich bereits die emotionale Nebenbedeutung erlangt, die ihm immer noch anhaftet. In Platons *Der Staat* scherzt Sokrates, die Jugend sei „so irrational wie Strecken“ und daher solle man sie nicht „den Staat regieren lassen und das Wichtigste von ihnen abhängig machen“. Folgerichtig und doch ironisch verschreibt Sokrates diesen jungen Irrationalen die Beschäftigung mit Mathematik zusammen mit Musik und Sport, um das Ungeordnetste und Unangemessenste in ihren Seelen zu zähmen. Sein Scherz zielt auf die weitverbreitete Ansicht, das Irrationale in der Mathematik sei ein störendes Zeichen von Verwirrung und Unordnung in der Welt, eine ebenso fürchterliche Gefahr wie das Ertrinken. Sicher war diese gräßliche Aussicht den Pythagoräern eigen, aber Platons Dialoge eröffnen eine größere Perspektive. Was irrational ist, in der Seele oder in der Mathematik, kann mit dem Rationalen in Harmonie gebracht werden. Um ein unvergeßliches Bild aus einem anderen Dialog zu benutzen: Das schwarze Pferd der Leidenschaft kann mit dem weißen Pferd des Verstandes ein Gespann bilden.

Platons großer Dialog über die Natur der Erkenntnis beruht auf dieser mathematischen Schwierigkeit. Benannt ist er nach Theaitetos, einem Mathematiker, der zu Beginn des Dialoges eingeführt wird, wie er als Sterbender nach Athen zurückgebracht wird, an Ruhr erkrankt und auf dem Schlachtfeld verwundet. In einem Rückblick auf seine Jugend erfahren wir, er habe grundlegende Erkenntnisse über die irrationalen Größen und die fünf regulären Körper erlangt und kurz vor Sokrates’ Verurteilung und Tod mit diesem Gespräche geführt. Sokrates war von seiner Jugend tief beeindruckt; er schien zu großen Leistungen bestimmt und ähnelte Sokrates auch körperlich durch die „aufgeworfene Nase“ und die „hervortretenden Augen“. Bei ihrem Gespräch war auch Theodoros zugegen, ein älterer Mathematiker und Lehrer des Theaitetos, der die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}\ldots$ bewiesen hatte bis zu $\sqrt{17}$, wo er aus irgendeinem Grunde aufhörte.

Sokrates stellt seine übliche Ironie zurück, als er Theaitetos befragt, der seine Entdeckung verschiedener Grade der Irrationalität erläutert. Obgleich Größen wie die Quadratwurzeln aus 3 und aus 17 irrational sind, bleiben sie doch „vergleichbar im Quadrat“, da ihre Quadrate ein gleiches Maß besitzen (denn $(\sqrt{3})^2 = 3$ und $(\sqrt{17})^2 = 17$ sind beides ganze Zahlen). Sokrates ist von der Wahrheit und Schönheit dieser Einsicht beeindruckt und benutzt sie als Beispiel in der weiterführenden Diskussion über die Natur der Erkenntnis. Er erinnert Theaitetos und Theodoros an seinen Ruf, Verblüffung und Verwirrung zu erzeugen, und bittet scherzend Theaitetos, ihn nicht als bösen Zauberer zu denunzieren, da er in Wahrheit nur eine „Hebamme“ sei, welche den Menschen Geburtshilfe für ihre Gedanken leiste.

Als nähme er die am nächsten Tag erfolgende Anklage gegen sich vorweg, rechtfertigt sich Sokrates gegenüber diesem netten, begabten Menschen, der ihm so ähnlich ist, statt gegenüber seinen wütenden Anklägern. Theaitetos ist weit von feindschaftlichen Gefühlen entfernt und gerne bereit, sich auf eine Untersuchung einzulassen, die mit der Mathematik als einem Probierstein wahrer Erkenntnis beginnt und prüft, ob andere Erkenntnis durch die Sinne entsteht oder auf geheimnisvollere Weise aus dem Innern der Seele. Obwohl Sokrates sich selbst als unfruchtbar und bar jeder Weisheit beschreibt, verhilft er den Gedanken des Theaitetos zur Geburt und prüft danach ihre Gesundheit. Sokrates hat oft über seine eigenen häßlichen Gesichtszüge gescherzt, beschreibt aber Theaitetos als schön. Theaitetos’ mathematische Erkenntnisse entsprechen seiner Tapferkeit, mit der er für die Stadt kämpfen und als Held sterben wird: dem Mut dessen, der mit dem Irrationalen ringen konnte.

Während ihrer Unterhaltung ermuntert Sokrates seine Gäste, sich „der Prüfung, der Tortur zu unterwerfen“, womit er meint, sie sollen furchtlos sich darum bemühen, gemeinsam ihre Auffassungen zu prüfen und zu verbessern. Im Griechischen bedeutet das Wort für „Tortur“ auch „Probierstein“: ein Mineral, mit welchem man Gold von unedlen Metallen unterscheiden kann anhand der darauf hinterlassenen Spur. Dieses extreme Bild läßt an eine Folter denken, mit der ein Richter die Wahrheit aus einem Sklaven herauszupressen sucht, doch Sokrates meint damit eine Wahrheitssuche, die selbst vor starkem Schmerz und Erniedrigung nicht zurückschreckt. Wie Soldaten oder Athleten sehen Sokrates und Theaitetos im Leiden den Weg zum höchsten Vergnügen der letztendlichen Wahrheit. Dies haben sie in der Mathematik gelernt, deren Studium denjenigen oft qualvoll erscheint, welche die Freude der Einsicht nicht kennen. Kein Wunder, daß Platon über das Eingangstor seiner Akademie den Warnspruch hängte: „Kein der Geometrie Unkundiger trete hier ein!“

Theaitetos’ Entdeckungen und das Prüfen mathematischer Beweise wurden in Euklids *Elemente* aufbewahrt, die auch heute noch eine lebendige Quelle der Mathematik sind, von unschätzbarem Wert sowohl für Anfänger als auch für erfahrene Mathematiker. Euklid geht über die Darstellung seiner eigenen Ergebnisse hinaus und führt die Entdeckungen anderer ins Feld als Probierstein mathematischer Klarsicht und logischer Strenge. Im Falle des Irrationalen zieht er einen von Eudoxos eingeführten Kompromiß heran, der Zahlen und irrationale Größen streng getrennt hielt, nicht aber in der Proportion. Zum Beispiel betrachtet Euklid zwei Zahlen in einer bestimmten Proportion (etwa $2 : 3$) und zeigt, daß sie einer Proportion zwischen zwei irrationalen Größen gleich sein kann (wie $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2}$ gleich $2 : 3$ ist). Aber er würde nie die beiden verschiedenen Arten vermischen und etwa die Proportion zwischen einer Zahl und einer Größe betrachten. Dies war keine mathematische Rassentrennung, sondern die Entscheidung, Zahlen und Größen als zwei vollständig verschiedene Wesensgattungen zu betrachten, deren Vermischung zu unabsehbarer Verwirrung geführt hätte.

Euklids Beitrag ging weit über die Trennung dieser Bereiche hinaus. Im fünften Buch führt er eine weitreichende Definition von Gleichheit und Ungleichheit ein, die sich auf Proportionen irrationaler Größen ausdehnt. Eudoxos’ Vorgaben folgend schlägt er vor, um die Gleichheit zweier Proportionen zu testen, die einzelnen Glieder mit verschiedenen ganzen Zahlen zu multiplizieren und jedesmal zu prüfen, ob diese kleiner, größer oder gleich sind

(Kasten 1.4). Dieses Verfahren hängt von der Möglichkeit ab, Vielfache von Größen vergleichen zu können, auch wenn sie kein gemeinsames Maß besitzen. Es benutzt ganz beliebige Vielfache, so als könne man alle möglichen Vielfachen daraufhin prüfen, ob sie gleich werden können. Also ist es wirklich eine *Probe*, ein Entscheidungsverfahren durch Multiplikation, eine Möglichkeit, auf dem Ozean des Irrationalen einen Weg zu finden. Dagegen behandelt Euklid die ganzen Zahlen auf völlig verschiedene Weise in den Büchern VI und VII, denn ganze Zahlen sind kommensurabel, da sie eine gemeinsame Einheit besitzen.

Kasten 1.4
Euklids Definition gleicher Proportionen, die für beliebige Größen anwendbar ist (Buch V, Definition 5):

Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfachung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.

Also heißt die Proportion $a : b$ gleich der Proportion $c : d$, falls für beliebige ganze Zahlen m und n folgendes gilt: falls $ma > nb$, so auch $mc > nd$; falls $ma = nb$, so auch $mc = nd$; und falls $ma < nb$, so auch $mc < nd$.

Euklids wagemutige Erforschung des Irrationalen erscheint im zehnten Buch, worin er danach fragt, ob die irrationalen Größen eine einsichtige Ordnung aufweisen. Kann man sie in klare Kategorien mit Gattungen und Arten einordnen? Er beginnt damit zu zeigen, daß jede Größe beliebig oft geteilt werden kann. Obwohl implizit in der Geometrie enthalten, legt er damit offen, was später das *Kontinuum* genannt wurde: eine stetige und unbeschränkt unterteilbare Größe im Gegensatz zur unteilbaren Eins, deren ganzzahlige Vielfache alle Zählzahlen ergeben. Um die beliebige Unterteilbarkeit zu beweisen, zeigt Euklid, wie man immer wieder von einer Größe die Hälfte oder etwas mehr abziehen kann, und damit fährt er so lange fort, bis eine Größe erreicht wird, die einen beliebig vorgegebenen Betrag unterschreitet (Kasten 1.5). Also gibt es keine kleinste Größe, kein geometrisches „Atom", aus dem alle anderen Größen aufgebaut wären, denn dann müßten alle Größen diese kleinste Größe als gemeinsames Maß besitzen. Wieder setzt Euklid ein unbeschränkt laufendes Verfahren ein, das nicht in einer einzelnen Figur illustriert werden kann, aber doch einsichtig und logisch zwingend ist.

Kasten 1.5
Euklids Beweis der unbeschränkten Unterteilbarkeit jeder Größe (Buch X, Proposition 1):

Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.

Dann macht sich Euklid daran, verschiedene Arten des Irrationalen zu klassifizieren, zu benennen und ihren Bezug zueinander aufzuzeigen. Wie schon Theaitetos zeigte, ist Irrationalität ein relativer Begriff. Die Diagonale des Quadrates ist irrational im Verhältnis zur Seite, aber sie kann mit einer anderen Strecke kommensurabel sein, die wiederum die Seite oder Diagonale eines anderen Quadrates sein könnte. Was ausdrückbar ist, hängt vom *Verhältnis* der geometrischen Figuren zueinander ab. Euklids Klassifikation irrationaler Größen ist verwickelt, obwohl sie nicht über das hinausgeht, was wir die Quadratwurzel einer Summe oder Differenz von Quadratwurzeln nennen würden. Er macht solche Größen in der Unterteilung von Strecken ausfindig, aber wir könnten auch eine Saite unterteilen, um verschiedene Intervalle erklingen zu lassen. Dies bedeutet, daß wir eine musikalische Version der durch das Irrationale ausgelösten mathematischen Krise angeben können. Wenn wir versuchen, eine Oktave (deren

Verhältnis 2 : 1 ist) genau am Punkt des geometrischen Mittels zu unterteilen, erhalten wir das „Bastardverhältnis“ $\sqrt{2} : 1$ (Kasten 1.6). Dies liegt sehr nahe am dem hochdissonanten Tritonus, dem später so genannten „Teufel in der Musik“. Falls das ganze Universum aus Zahlen aufgebaut ist, werden solche Harmoniefragen zu Problemen.

Kasten 1.6
Der Klang der Quadratwurzeln

Man nehme zwei Saiten, eine doppelt so lang wie die andere, die also eine Oktave höher als die erste klingt. Dann suche man das geometrische Mittel zwischen den beiden Längen, also die Länge x, für die $2 : x$ dieselbe Proportion wie $x : 1$ ergibt. Aus $2 : x = x : 1$ erhält man durch Hochmultiplizieren $x^2 = 2$. Somit ist die gesuchte „Proportion“ $\sqrt{2} : 1$, was ungefähr $1,414$ in moderner Dezimalschreibweise ergibt. Dies liegt nahe am Tritonus, einem dissonanten Intervall, das später auch „der Teufel in der Musik“ genannt wurde. Der Tritonus besteht aus drei Ganztönen von je $9 : 8$, entspricht also dem Verhältnis $9 : 8 \times 9 : 8 \times 9 : 8 = 9^3 : 8^3 = 729 : 512 \approx 1,424$.
Ab dem siebzehnten Jahrhundert bot die „gleichmäßige Temperatur“ eine neue Möglichkeit an, Tonleitern zu erstellen: Sie definiert einen Halbton als $\sqrt[12]{2} : 1$, so daß zwölf gleiche Halbtöne eine Oktave $2 : 1$ ergeben, da $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$. Diese neue Stimmung setzte sich erst im neunzehnten Jahrhundert vollkommen durch; J. S. Bach benutzte eine nicht völlig gleichmäßige, „wohltemperierte“ Stimmung. Auch wenn sich heutige Ohren an diese gleichmäßige Stimmung gewöhnt haben mögen, vergewaltigt sie doch das pythagoräische Verständnis der Intervalle als ganzzahlige Verhältnisse. In der Praxis müssen beim Stimmen der Instrumente die irrationalen Intervalle der gleichmäßigen Temperatur durch irgendwelche Proportionen approximiert werden, da Meßgeräte nur eine endliche Genauigkeit haben.

Euklid stellt seine Klassifikation irrationaler Größen in etwa hundert Sätzen vor. Nach dieser anstrengenden Glanzleistung sagt er im letzten Satz des Buches etwas Erstaunliches: Von den bereits gezogenen Linien kann man weitergehen und noch mehr irrationale Linien finden, die „von unbeschränkter Anzahl sind, und keine davon ist einer vorangehenden ähnlich“. Trotz des gelassenen Tones ist dies eine ungeheure Behauptung. Das Reich des Irrationalen ist nicht nur unendlich, weil es eine unbeschränkte Anzahl irrationaler Größen eines Types gibt, sondern weil es unendliche viele Sorten solcher Größen gibt, jede eine verschiedene Art mit unendlich vielen Vertretern. Die Entdeckung des Irrationalen legte auch einen sich unendlich verzweigenden Weg offen.

Euklids leidenschaftsloser Tonfall enthüllt nicht, was er von der Lage hielt. Mit diesem letzten Satz könnte Euklid beabsichtigt haben, einen beunruhigenden Blick in den Abgrund des Irrationalen zu werfen, als wolle er sagen: Hier befindet sich ein unergründlicher, unerforschbarer Ozean von unaufhörlich verschiedenen Größen, von dem man sich mit Schrecken abwenden sollte. Aber man kann seine Stille auch anders verstehen. Er könnte gemeint haben: Hier liegt ein unerschöpflicher Vorrat an Schätzen, unendlich in der Anzahl, obwohl jeder endlich in seiner Größe ist. Schauen wir und staunen …

Springer

http://www.springer.com/978-3-540-22285-9

Abels Beweis
Pesic, P.
2005, VIII, 224 S., Hardcover
ISBN: 978-3-540-22285-9