

2 Zählendes Rechnen

Zählende Vorgehensweisen bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben können in der Primarstufe häufig beobachtet werden. Dabei gilt zählendes Rechnen sowohl als elementarer Zugang zur Mathematik als auch als Symptom für grundlegende Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Vom verfestigten zählenden Rechnen wird gesprochen, wenn die Kinder am Ende des ersten Schuljahres und darüber hinaus zählende Strategien häufig bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben verwenden (Schipper, 2002). Die Kinder scheinen keine weiterführenden Strategien zu entwickeln, sondern „in die »Sackgasse« des sich immer mehr verfestigenden zählenden Rechens geraten zu sein“ (Lorenz & Radatz, 1993; Scherer & Moser Opitz, 2010).

Nahezu alle Grundschüler mit Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht werden im Laufe des ersten Schuljahres zählende Rechner, sie verfestigen diese Strategie, und ohne individuelle Förderung blieben sie mehrere Schuljahre »Zähler«. Es handelt sich hier ganz offensichtlich um einen sehr zentralen Aspekt des Phänomens »Rechenschwäche« (Lorenz & Radatz, 1993, S. 116).

Das Zitat von Lorenz und Radatz ist prototypisch für den in vielen Publikationen zu findenden Zusammenhang zwischen zählendem Rechnen und Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (Gerster & Schultz, 2004; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schipper, 2002). Dabei wird zählendes Rechnen als „Symptom“ (Schipper, 2002, S. 250) oder „zentraler Aspekt“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 116) von (mathematischer) Lernschwäche beschrieben.

Um sich den Chancen und Gefahren des zählenden Rechnens zu nähern, werden im Folgenden zunächst das Zählen und das zählende Rechnen als entwicklungsgemäßer Zugang zur Mathematik dargestellt. Die Risiken des verfestigt zählenden Rechnens und Möglichkeiten zur Ablösung sind Schwerpunkt der Erörterungen im zweiten Teil des Kapitels.

2.1 Zählen und zählendes Rechnen als entwicklungsgemäßer Zugang zur Mathematik

2.1.1 Mathematische Kompetenzen bis zum Schulbeginn

Mathematische Kompetenzen im Vorschulalter werden seit vielen Jahren untersucht. Es gibt eine Vielzahl von Entwicklungsmodellen, beschriebenen Teilkompetenzen, theoretischen Annahmen und empirischen Ergebnissen, die an

dieser Stelle nicht umfänglich dargestellt werden können (Hasemann & Gasteiger, 2014; Hess, 2012; Moser Opitz, 2008). Im Hinblick auf den Fokus der Arbeit, die „Ablösung vom zählenden Rechnen“, werden die Kompetenzen dargestellt und erläutert, deren Entwicklung im Vorschulalter beginnt und die weit in die Grundschulzeit hineinreicht. Dazu gehören »Verbales Zählen«, »Anzahlerfassung« und »Teile-Ganzes-Konzept« als numerische Kompetenzen sowie das Erkennen von Strukturen, welches Lüken (2010) mit dem Begriff »Struktursinn« beschreibt.

Verbales Zählen

Die Entwicklung des verbalen Zählens wurde ausführlich von Fuson (1988) untersucht und als Modell beschrieben. Gemäß ihrem Modell beginnen Kinder im Alter von zwei Jahren zu zählen, indem sie die Zahlwörter, die sie von ihren Eltern oder anderen Bezugspersonen hören, wiederholen und rezitieren. Dabei differenzieren die Kinder noch nicht zwischen den einzelnen Zahlwörtern, sondern verwenden die Zahlwörter als gesamtes »Wortgebilde« wie ein Gedicht (z.B. „einszweidreivier“). Durch die Beobachtung von Bezugspersonen und durch die Anwendung gliedern sich die einzelnen Zahlwörter heraus, so dass die Kinder die Zahlwörter mit der Zeit als einzelne Wörter unterscheiden können. Beim Zählen beginnen sie jedoch zunächst immer mit eins. Fuson (1988, S. 45) bezeichnet dieses Stadium als „unbreakable list level“, übersetzt wird es mit „unflexible Zahlreihe“ (Moser Opitz, 2008, S. 86) oder „unzerbrechliche Liste“ (Weißhaupt & Peucker, 2009, S. 59), während Oehl (1935) den Begriff der »starren« Zahlreihe verwendet. Kinder im Entwicklungsstadium der starren Zahlenreihe beginnen i. d. R. von eins, um eine Position oder Anzahl zu bestimmen (Schmidt, 2003; Schmidt & Weiser, 1982).

Gefolgt wird die Phase der unflexiblen Zahlreihe von „breakable chain level“ (Fuson, 1988, S. 45) bzw. der gegliederten Zahlenreihe. Wird das Stadium der gliederten Zahlenreihe erreicht, „vermögen die Kinder ohne weiteres von beliebigen Punkte [...] aus weiterzuzählen, sie können sich mit Hilfe der erkannten Gesetzmäßigkeit rasch und sicher orientieren“ (Oehl, 1935, S. 329). Kinder sind also in der Lage, Vorgänger und Nachfolger von Zahlen zu bestimmen und von beliebigen Zahlen vorwärts zu zählen. Das Rückwärtszählen gelingt jedoch erst teilweise. „Etwa mit fünf Jahren müssen die Dinge zum Zählen nicht mehr unmittelbar vorhanden sein, die Zahlwörter selbst sind zählbar“ (Weißhaupt & Peucker, 2009, S. 64). Dieses innerliche Zählen kann realisiert werden, ohne dass Kinder über ein voll entwickeltes Verständnis von Zahlen als Anzahlen verfügen. Gemäß Steffe (1992) werden Zahlwörter als Einheiten, die aus anderen Einheiten bestehen, erst in einem weiteren Schritt entwickelt.

Der letzte Schritt, den Steffe beschreibt und der gemäß der Ausführungen von Weißhaupt und Peucker (2009) der letzten Niveaustufe Fusons entspricht,

ist die vollständig reversible Zahlwortreihe. Auf dieser Ebene ist das Kind in der Lage die Teile aus dem Abschnitt der Zahlwortreihe als Teil eines Ganzen zu betrachten. Zählt das Kind bspw. bis sechs, so weiß es, dass „fünf“ nicht nur der Vorgänger von „sechs“ ist, sondern eine Gesamtmenge von fünf Objekten beschreibt, die eine Teilmenge von sechs Objekten sind.

Anzahlen bestimmen

In den obigen Ausführungen wurde bereits deutlich, dass Zählen i. d. R. mit einer Bestimmung von Anzahlen einhergeht. Haben die Kinder die Stufe der gegliederten Zahlwortreihe erreicht, können sie das verbale Zählen zur Bestimmung von Mengen nutzen. Dazu ist es notwendig, dass sie über die sogenannten Zählprinzipien verfügen (Gellmann & Gallistel, 1978), d. h. wissen, wie zu zählen ist (»how to count«) und was gezählt werden kann (»what to count«). Zu den ersten Prinzipien gehören das Eindeutigkeitsprinzip (jedem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet), das Prinzip der stabilen Ordnung (die Zahlwörter werden in einer festen Reihenfolge genannt) und das Kardinalzahlprinzip, welches besagt, dass das letztgenannte Zahlwort die Anzahl angibt. Zudem müssen die Kinder wissen, dass jede beliebige Menge unabhängig von der Art der Objekte gezählt werden kann (Abstraktionsprinzip) und es irrelevant ist, in welche Reihenfolge die Objekte gezählt werden (Prinzip der Irrelevanz der Reihenfolge). Wird mit Hilfe der Zahlwortreihe und unter Berücksichtigung der Zählprinzipien eine Menge erfasst, spricht man von »Abzählen«. Etwa im Kindergartenalter sind Kinder in der Lage, Mengen durch Abzählen zu bestimmen (Gerlach, Fritz, Ricken, & Schmidt, 2007; Krajewski, Renner, Nieding, & Schneider, 2008).

Weitere Möglichkeiten, die Anzahl einer Menge zu bestimmen, sind Subitizing, Schätzen oder das Herstellen von Stück-zu-Stück-Korrespondenz (Moser Opitz, 2008, S. 90). Subitizing wird als schnelles, richtiges und sicheres Erfassen von kleinen Anzahlen beschrieben (Desoete, Ceulemans, Roeyers, & Huylebroek, 2009, S. 57). Für kleine Mengen von einem, zwei oder drei Objekten beherrschen dies bereits Kinder von zwei bis drei Jahren (Strakey & Cooper, 1995). Eine simultane Anzahlerfassung über drei bis vier Elemente hinaus erfordert eine Vertrautheit mit der Anordnung, wie dies von Würfelbildern oder von Fingerbildern beschrieben wird (Scherer, 2009b, S. 28; Steffe, 1992), so dass die visuelle Anordnung mit einer Zahl verbunden ist. Größere Anzahlen müssen als Einzelelemente oder, gebündelt in gleichmächtige Teilmengen, in Schritten gezählt werden. Eine andere Möglichkeit der Anzahlbestimmung ist das Nutzen von Strukturen wie z. B. der »Kraft der Fünf« (Krauthausen, 1995). Mengen werden in kleinere oder vertraute Teilmengen zerlegt, die »simultan« erfasst werden können. Um Mengen quasi-simultan zu erfassen, ist es unbedingt notwendig, dass diese (visuell) in Teilmengen strukturiert werden können.

Zwischenfazit zur Bedeutung des Zählens

In der frühen mathematischen Entwicklung von Kindern nimmt das Zählen eine entscheidende Rolle ein: „Counting has been described as the key ability which makes the bridge between the innate sense of numbers and the more advanced arithmetic abilities that are culturally expected“ (Desoete et al., 2009, S. 57). Dabei ist die Kenntnis der Zahlwortreihe eine Grund- oder Basiskompetenz. (Fritz & Ricken, 2009; Krajewski & Ennemoser, 2013; Weißhaupt & Peucker, 2009). Übereinstimmend wird davon ausgegangen, dass die Weiterentwicklung des Zählens zum flexiblen Zählen und das Anzahlkonzept sich gegenseitig bedingen und beeinflussen (Fuson, 1992a; Gerlach et al., 2007; Moser Opitz, 2008; Weißhaupt & Peucker, 2009). Zu Schulbeginn ist die Zählkompetenz keine reine verbale mehr, sondern die Kinder verfügen i. d. R. über ein Anzahlkonzept auf der Basis ihrer Zählkompetenzen (Schmidt & Weiser, 1982, S. 247). Dabei ist die Entwicklung des Zählens und der Mengenerfassung zu Schulbeginn nicht abgeschlossen, sondern muss im Anfangsunterricht aufgegriffen und kultiviert werden (Wember, 2003, S. 62).

Teile-Ganzes-Konzept

Aufbauend auf dem Anzahlkonzept erkennen die Kinder, dass mit Zahlen auch Beziehungen zwischen Mengen beschrieben werden können. Zahlen können gemäß Resnick (1983, S. 114) als Zusammensetzungen von anderen Zahlen verstanden werden – das sogenannte Teile-Ganzes-Konzept (part-whole-schema) bildet sich aus. Hier kann ein protoquantitatives von einem quantitativen Verständnis unterschieden werden. Beim protoquantitativen Verständnis handelt es sich um nicht-quantifizierte Zusammenhänge zwischen Zahlen, wie z. B. die Einsicht, dass ein Ganzes, welches in zwei Teile zerlegt wurde, nicht mehr oder weniger geworden ist, oder die Erkenntnis, dass sich das Ganze verändert, wenn ein Teil verändert wird (Gerster & Schultz, 2004). Ein derartiges Verständnis ist wichtig, um mathematische Beziehungen wie die Kommutativität und die Assoziativität zu verstehen. Das heißt auch, dass zentrale mathematische Gesetzmäßigkeiten bereits erkannt werden können, ohne dass Kinder diese numerisch fassen.

Gemäß Resnick (1983) entwickelt sich das Teile-Ganzes-Konzept im Kindergartenalter zuerst an kleinen Zahlen und wird am einfachsten bei kontextgebundenen Aufgabenstellung in kleinen Zahlenraum erkannt. Bei Problemstellungen, in denen es um die Addition und Subtraktion kleiner Zahlen geht, besteht die Chance, dass das Kind erkennt, dass das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema auf Anzahlen angewendet werden kann (Gerster & Schultz, 2004, S. 78).

In der Folge lernen Kinder Zahlen als Zusammensetzungen und Zerlegungen von Zahlen sowie Differenzen zwischen Zahlen zu erkennen und zu be-

schreiben (Krajewski & Ennemoser, 2013). Dieses quantitative Verständnis wird als entscheidend für ein weiteres, erfolgreiches mathematisches Lernen angesehen (Ennemoser & Krajewski, 2007; Fritz & Ricken, 2009; Resnick, 1983). Ein ausgebildetes Teile-Ganzes-Konzept beinhaltet, dass die Kinder über ein Verständnis von Zahlen auf der Grundlage unterschiedlicher Zahlaspekte verfügen, Anzahlen bestimmen, Beziehungen zwischen Zahlen erkennen und nutzen sowie Rechengesetze wie das Kommutativ- und Assoziativgesetz anwenden können – ohne diese formal zu kennen.

Der Zusammenhang zwischen dem Teile-Ganzes-Konzept und dem Verstehen und Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben ist nicht genau beschrieben. Übereinstimmend wird davon ausgegangen, dass das Teile-Ganzes-Konzept eine „grundlegende Bedeutung für das Verständnis einer Vielzahl von Rechenoperationen“ hat (Fritz & Ricken, 2009, S. 384f). Inwieweit bspw. das als Teilkompetenz des Teile-Ganzes-Konzepts beschriebene Verständnis von einer Zahl als Differenz zwischen zwei Zahlen (Krajewski & Ennemoser, 2013, S. 160) mit einem Verständnis von Subtraktion als Vergleich übereinstimmt oder wo genau die Unterschiede sind, ist bislang kaum herausgearbeitet. Dies zeigt sich insbesondere in Studien, in denen Aufgaben des gleichen Typs einerseits dem Teile-Ganzes-Konzept zugeordnet (Ehlert, Fritz, Arndt, & Leutner, 2013), andererseits zur Untersuchung eines Verständnisses von Subtraktion benutzt werden (Peltenburg, van den Heuvel-Panhuizen, & Doig, 2009; Schwätzer, 2013)¹.

Innerhalb der Entwicklungsmodelle wird davon ausgegangen, dass auf der Grundlage des ausgebildeten Teile-Ganzes-Konzepts Additions- und Subtraktionsaufgaben auf symbolischer Ebene gelöst werden. Dabei wird angenommen, dass die meisten Kinder in der Schuleingangsphase das Teile-Ganzes-Konzept numerisch ausschärfen (Ehlert et al., 2013). Zahlentrippl wie $7/3/4$ werden erkannt und automatisiert, so dass Aufgaben wie $3+4=7$ abgerufen werden können. Zudem kann diese numerische Beziehung des Teile-Ganzes-Konzeptes genutzt werden, um Aufgaben aus Kernaufgaben abzuleiten. Das heißt, die Aufgabe $3+4$ kann auf die Kernaufgabe $3+3$ zurückgeführt und die Beziehung $3+4 = 3+(3+1) = (3+3) + 1$ bei der Lösung der Aufgabe genutzt werden. Verfügen die Kinder über diese Kompetenzen wird davon gesprochen, dass ein flexibles Teile-Ganzes-Konzept ausgebildet ist. „These shortcut procedures provide evidence

¹ Aufgabenzuordnung als Teile-Ganzes-Konzept zu Addition oder Subtraktion: „Auf dem Markt wurden am Freitag und Samstag zusammen 133 kg Kartoffeln verkauft. Am Freitag wurden 78 kg verkauft. Wie viel kg wurden am Samstag verkauft?“ (Ehlert et al., 2013, S. 249)

Aufgabenzuordnung als Subtraktion: “The album has space for 51 cards. 49 are already included. How many more cards can be added? (Peltenburg, van den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2012)

that children understand the compositional structure of numbers and are able to partition and recombine quantities with some flexibility” (Resnick, 1983, S. 121f). In dieser Argumentation umfasst das Teile-Ganzes-Konzept auch das Operationsverständnis von Addition und Subtraktion, ohne dass genau herausgearbeitet wird was dies ausmacht.

Erkennen von Mustern und Strukturen

Neben den numerischen Kompetenzen scheint auch die Strukturierungsfähigkeit von Kindern einen entscheidenden Einfluss auf die mathematischen Kompetenzen in der Schule zu haben. Lüken (2012) kommt in einer Studie zu Muster- und Strukturkompetenzen am Schulbeginn zu dem Schluss, dass dem sogenannten »Struktursinn« (Lüken, 2010) ein ähnlich hoher Einfluss auf das Rechnenlernen zugeschrieben werden kann wie dem Zahlenvorwissen (Krajewski & Schneider, 2006). Eine mathematische Struktur wird dabei definiert als „way a mathematical patterns is organised“ (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 34), wobei unter einem Muster „any predictable regularity, usually involving numerical, spatial or logical relationship“ (2009, S. 34) verstanden wird, bzw. Struktur als „Art und Weise bezeichnet, in der ein Muster strukturiert ist“ und Muster als „regelmäßige numerische oder räumliche Regelmäßigkeit“ (Lüken, 2012, S. 22).

Dabei wurden in den Studien nicht reine numerische Muster untersucht wie z. B. »Zahlenfolgen« oder »Schöne Päckchen«, sondern z. B. Rechteckfelder, bestehend aus Quadraten, Muster in Perlenketten aber auch Zahlen auf Zifferblättern und Linealbildern. In ihren Studien mit Kindern vor und in den ersten Jahren der Schule zeigten Mulligan und Mitchelmore den Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, Strukturen in Mustern zu erkennen und wiederzugeben und der arithmetischen Kompetenz der Kinder (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2013; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011). Dies konnte in der Studie von Lüken (2012) bestätigt werden, in der eine signifikante Korrelation zwischen der Leistung von Kindern in Muster- und Strukturaufgaben und Niveau der Zahlbegriffsentwicklung festgestellt wurde (Lüken, 2012, S. 172). Es zeigte sich einerseits, dass leistungsschwache Kinder Schwierigkeiten zu haben schienen Strukturen zu erkennen (Mulligan, 2013; Mulligan & Mitchelmore, 2009). Andererseits wiesen Kinder, die zu Schulbeginn Schwierigkeiten mit der Strukturerkennung hatten, am Ende des 2. Schuljahres geringe mathematische Leistungen auf (Lüken, 2012; Mulligan & Mitchelmore, 2009). Lüken folgert daraus, dass „Muster- & Strukturaufgaben eine gute Voraussagequalität für die mathematische Leistung am Ende des 2. Schuljahres [...] für Probanden mit niedrigen Werten in den Muster- & Strukturaufgaben“ bieten (2012, S. 178). Dieser Zusammenhang zwischen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und Schwächen in der Mustererkennung findet sich auch in der Untersuchung zur visuellen Strukturierungsfähig-

keit von Kindern (Söbbeke, 2005) oder im Zusammenhang zwischen Mengenerfassung und Blickbewegungen (Fischer, 2011). Das Erkennen von Strukturen stellt ähnlich dem Teile-Ganzes-Konzept ein Konstrukt dar, welches von vielen Kinder bereits zu Beginn der Schule in ausreichendem Maße beherrscht wird (Lüken, 2012, S. 178). Ist es jedoch nicht in notwendigen Maße vorhanden, scheint den Schülerinnen und Schüler ein erfolgreiches Lernen von Mathematik erschwert.

Vergegenwärtigt man sich die Kompetenzen, die Kinder zeigen müssen, um die Struktur eines Musters zu erkennen und nachzulegen oder zu zeichnen, so wird deutlich, dass hierzu neben Strukturierungsfähigkeiten auch Kompetenzen in der Mengenerfassung sowie im Teile-Ganzes-Konzept notwendig sind – bspw. um, wie in der Studie von Lüken (2010), ein Zwanzigerfeld mit vorgegebenen Quadraten auf einer Unterlage nachzulegen (vgl. Abb. 2.1).

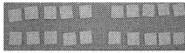
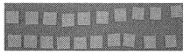
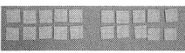






	%	vier Gruppierungen	zwei Reihen	zwei Blöcke
1) gleiche Anzahl an Quadraten wie auf Vorlage	64			
2) mehr/ weniger Quadrate als auf Vorlage	16			
3) Gruppen enthalten unterschiedlich viele Quadrate	20			

Abbildung 2.1: Aufgabenlösungen zur Aufgabe „Zwanzigerfeld“ – Reproduktion (Lüken, 2012, S. 168)

Das zeigt sich auch in den Kategorienschemata Lükens (2012, S. 193), bei denen zur Beschreibung der Strukturierung z. B. auf Aspekte der Mengenerfassung zurückgegriffen wird. So wird die Strukturierungskompetenz bei der Aufgabe „Zwanzigerfeld“ (vgl. Abb. 2.1) u. a. darüber erfasst, ob gleich viele Quadrate in jeder Struktureinheit gelegt wurden. Das Legen gleich vieler Quadrate umfasst jedoch auch numerische Kompetenzen, da die Anzahl der Quadrate bestimmt werden muss, um zu prüfen, ob es gleich viele sind. Zugleich werden numerische Kompetenzen an Aufgaben mit Materialien erhoben, die ihrerseits als mathematische Muster beschrieben werden können. So werden Kinder z. B. im Rahmen der Diagnose von »Kalkulie« (Fritz, Ricken, & Gerlach, 2007) aufgefordert, die Anzahl von 14 Punkten, dargestellt im Zwanzigerfeld, zu bestimmen. Beim Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) soll das Punktbild gefunden werden, dass zwischen das Punktbild mit sieben und mit neun Punkten passt (van Luit, van de Jijt, & Hasemann, 2001).

Struktursinn und numerische Kompetenzen scheinen demnach nicht klar zu trennen oder nicht voneinander abgegrenzt zu messen sein. Im Rahmen der Darstellung der Zählentwicklung betont Steffe entsprechend die Bedeutung von

Mustern und erläutert, wie beim (Ab)Zählen von „Mustern“ Elemente der Muster als einzelne Objekte und gleichzeitig als das Muster bildende, zusammengesetzte Einheiten fungieren (Steffe, 1992, S. 88). Das Muster wird so zu einem Objekt der Reflexion und Abstraktion des Zählprozesses. Ebenso erfordert die quasi-simultane Erfassung von Mengen, wie beschrieben, die (visuelle) Strukturierung der Menge, ähnlich wie ein strukturiertes Abzählen eine Strukturierung der Menge in gleichmächtige Teilmengen voraussetzt.

Die Entwicklung numerischer Kompetenzen und die Fähigkeit zur Strukturierung stehen in enger Verbindung zueinander. Deutlich machen die Studien zum Erkennen von Mustern und Strukturen, dass bei der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen nicht allein numerische Aspekte ausschlaggebend sind. Wie genau die Beziehung zwischen der Entwicklung von Zählen, Mengenerfassung, Teile-Ganzes-Konzept und der Fähigkeit zum Erkennen von Mustern und Strukturen ist, muss sowohl theoretisch ausgeschärft als auch im Hinblick der Wahrnehmung der Kinder untersucht werden.

Zusammenfassung

Als zentrale Kompetenzen in der Entwicklung des mathematischen Verständnisses bis zum Grundschulalter wurden Zählen und die Bestimmung von Anzahlen, das Teile-Ganzes-Konzept sowie das Erkennen von Strukturen betrachtet. Bei den Analysen wurde deutlich, dass die unterschiedlichen Kompetenzen nicht trennscharf voneinander zu betrachten sind. Zum einen stehen sie in einem wechselseitigen Entwicklungsprozess und zum anderen werden ähnliche Aufgaben je nach Blickrichtung unterschiedlichen theoretischen Konzeptionen zugeordnet. Überlappungen gibt es sowohl zwischen dem eher numerisch gedachten Teile-Ganzes-Konzept und dem Erkennen von Strukturen als auch zwischen Addition und Subtraktion und dem Teile-Ganzes-Konzept.

Insgesamt ist wichtig, dass die Bedeutung der genannten Kompetenzen für die frühe mathematische Entwicklung von Kindern betont wird. In Hinblick auf die in der Schule zu erwerbenden Kompetenzen kann hier von notwendigen Vorkenntnissen gesprochen werden (vgl. 2.2.3), wobei sich alle Kompetenzen auch in der Schulzeit weiterentwickeln und ausschärfen. Sowohl das Zählen als auch das Zerlegen von Zahlen sind Kompetenzen, die in der Schuleingangsphase aufgegriffen und weiterentwickelt werden. „Für den Unterricht kommt es darauf an, den Zahlbegriff vielseitig zu entwickeln und insbesondere das Zählen und Rechnen stets mit Sinn und Bedeutung zu füllen“ (Müller & Wittmann, 1984, S. 179). Im Verlauf des ersten Schuljahres sind die Kinder dann auch aufgefordert, Additions- und Subtraktionsaufgaben zu lösen (*Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*, 2008). Aus didaktischer Sicht sollte dies auf der Grundlage eines möglichst ausgebildeten Teile-Ganzes-Konzepts und unter Ausnutzung vom Strukturen (am Material oder auf symboli-

scher Ebene) geschehen – und damit, zum Ende des ersten Schuljahres, nicht (mehr) zählend.

2.1.2 Vorgehensweisen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben unter besonderer Berücksichtigung des Zählens

Zählen wird nicht nur zur Anzahlerfassung einer Menge benutzt. Kinder im Vorschulalter und zu Schulbeginn greifen beim Rechnen auf zählende Strategien zurück. So finden sich unter den, übereinstimmend in der Literatur genannten, Grundstrategien, die Kinder bei der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben benutzen (Carpenter & Moser, 1982, 1984; Oehl, 1935; Schmidt & Weiser, 1982; Siegler & Shrager, 1984), auch zwei zählende Strategien. Im Folgenden werden zunächst alle vier zusammenfassend vorgestellt, anschließend wird anhand von empirischen Studien der Verlauf des Erwerbs erörtert und diskutiert (2.2.3).

Alles-Zählen

»Alles-Zählen« gilt als elementare und an geringe Voraussetzungen gebundene Strategie (Carpenter & Moser, 1982, S. 14). Kinder zählen bei der Addition zunächst jeden Summanden separat an Material oder an den Fingern ab und zählen dann das gesamte Material bzw. alle ausgestreckten Finger in einem Zug noch einmal durch, um die Gesamtmenge zu bestimmen. Groen und Parkmann (1972) beschreiben dabei auch eine Variante dieses Vorgehens ohne konkret vorliegende Objekte. Dabei schließen sie in ihrer Studie aus der benötigten Zeit die benutzte Strategie des Kindes. Diese Methode wurde auch von Ashcraft (1982) benutzt. Sie wurde u. a. von Baroody kritisiert (Baroody, 1983), da allein aus der Zeit für die Aufgabenlösung auf die Strategie geschlossen wird. Die Strategie des »Alles-Zählen« – ausgeführt an Materialien oder Fingern – wurde in Studien mit anderen Methoden ebenfalls beobachtet (Carpenter & Moser, 1982) und ist unstrittig. Sie erfordert, dass die Kinder die Zahlreihe gemäß der Entwicklung von Fuson (1988) als unflexible (starre) Zahlenkette beherrschen und mit eins zu zählen beginnen.

Eine Variante des »Alles-Zählen« ist die sogenannte »shortcut-sum-Strategie« (Shrager & Siegler, 1998), bei der nach dem einzelnen Auszählen des ersten Summanden direkt weiter gezählt wird (vgl. auch Oehl 1935, S. 335). Sie setzt jedoch voraus, dass das Weiterzählen von einem (mental) Auszählen des zweiten Summanden begleitet wird. Die zweite Variante ist das sogenannte »count-Fingers«, bei dem die Finger gemäß der Summanden nicht-zählend ausgestreckt werden, die Gesamtsumme aber zählend bestimmt wird. Ähnlich dem »count-Fingers« beschreibt Gaidoschik (2010) das »Finger-Teilzählen«, bei dem Ausgangs- und Endzahl quasi-simultan an den Finger dargestellt bzw. abgelesen werden: „Die Operation selbst [wird] aber zählend durch[ge]führt, in-

dem [das Kind] die Finger einzeln ausstreckte bzw. umklappte und dabei von eins beginnend mitzählte, bis die dem zweiten Summanden bzw. Subtrahenden entsprechende Zahl erreicht war“ (Gaidoschik, 2010, S. 244). Beiden letztgenannten Strategien ist gemeinsam, dass nicht mehr jede Anzahl abgezählt wird, sondern das Darstellen von Anzahlen bereits verkürzt wird.

Weiterzählen

Beim »Weiterzählen« wird das Ergebnis einer Addition dadurch gewonnen, dass vom ersten Summanden aus weiter-, bzw. bei einer Subtraktion vom Minuenden aus rückwärts oder von Subtrahend aus hochgezählt wird (Carpenter & Moser, 1984, S. 182). Die Strategie verlangt das „Aufbrechen der Zahlenkette“ (Hess, 2012, S. 114). Das bedeutet, dass die Kinder beim »Weiterzählen« bei einer Zahl ungleich eins beginnen und bei der Subtraktion rückwärts zählen. Dieses Vorgehen kann durch sukzessives Darstellen des zweiten Summanden bzw. Subtrahenden an den Fingern (Aufklappen oder Tippen), durch leises mentales Zählen (Siegler & Shrager, 1984) oder rhythmische Bewegungen begleitet werden.

»Weiterzählen« wird im Vergleich zum »Alles-Zählen« als Weiterentwicklung oder „weiterer Meilenstein“ (Hess, 2012, S. 114) bezeichnet. Gaidoschik ist weniger optimistisch und stellt heraus, dass das Verständnis von Zahlen beim Weiterzählen nicht im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts erfolgt, sondern Zahlen weiterhin als „Zusammensetzung aus lauter Einzelnen“ (Gaidoschik, 2010, S. 109) aufgefasst werden. Insofern sei zwar von einem prozeduralen, nicht aber zwangsläufig von einem konzeptionell tieferen Verständnis auszugehen.

Dies gilt gleichermaßen für das »Weiterzählen vom größeren Summanden«. Bei dieser Vorgehensweise schauen die Kinder zunächst, welcher der Summanden größer ist und zählen von diesem weiter. Groen und Parkman (1972) bezeichnen dieses Vorgehen als min-Strategie, wobei „min“ für „minimum addend“ steht (Groen & Parkman, 1972). Grundlage dieser Strategie ist somit die Kommutativität der Addition. Wenn die Kinder verständnisorientiert die Summanden tauschen und somit den Rechenvorteil bewusst nutzen, lässt dies auf Einsicht in das Teile-Ganzes-Konzept schließen. Allerdings ist es auch möglich, das »Weiterzählen vom größeren Summanden« algorithmisch zu verwenden und ohne Verständnis für die dahinterliegende kommutative Struktur zu nutzen.

Das gezielte (Hoch)zählen, ausgehend vom Subtrahenden zum Minuenden, wird ebenfalls als »min-Strategie« bezeichnet, wenn es zu einer Verringerung der Schritte führt, d.h. die Differenz kleiner ist als der Subtrahend. Diese Strategie setzt zum einen voraus, dass Kinder das Ergebnis der Subtraktion nicht ausschließlich als Rest, sondern als Unterschied interpretieren können (Selter, Prediger, Nührenböcker, & Hußmann, 2011). Zum anderen erfordert das bewusste Anwenden dieser Strategien einen gezielten Blick auf die Zahlen der

Vom Zählen zum Rechnen

Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen
Lernumgebungen

Häsel-Weide, U.

2016, XI, 237 S. 66 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-10693-5