

*Die beste Art, einem Problem zu entkommen, ist, es zu lösen.
Alan Saporta*

In der Astroteilchenphysik sind die Energien der beteiligten Teilchen in der Regel so hoch, dass relativistisch gerechnet werden muss. In diesem Gebiet wird besonders deutlich, dass Masse und Energie nur unterschiedliche Ausformungen derselben Sache sind. Masse ist eine besonders kompakte Form der Energie, die durch die bekannte Einstein'sche Beziehung

$$E = mc^2 \quad (3.0.1)$$

mit der Gesamtenergie eines Teilchens verknüpft ist. In dieser Gleichung ist m die Masse eines Teilchens, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Der experimentelle Befund, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit eine Maximalgeschwindigkeit und in allen Bezugssystemen gleich ist, führt dazu, dass Teilchen mit einer Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit durch eine Beschleunigung kaum noch schneller, dafür aber schwerer werden,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0. \quad (3.0.2)$$

Dabei sind m_0 die Ruhmasse, $\beta = v/c$ die auf die Lichtgeschwindigkeit normierte Teilchengeschwindigkeit und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.0.3)$$



der Lorentz-Faktor. Damit kann Gl. (3.0.1) auch als

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (3.0.4)$$

geschrieben werden, wobei $m_0 c^2$ die Ruhenergie eines Teilchens ist. Der Impuls eines Teilchens lässt sich durch

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c \quad (3.0.5)$$

darstellen. Die Differenz

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 \beta^2 c^4$$

lässt sich mithilfe von (3.0.3) als

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2) = m_0^2 c^4 \quad (3.0.6)$$

schreiben. Die Differenz $E^2 - p^2 c^2$ stellt sich damit als lorentzinvariante Größe heraus. Sie ist in allen Systemen gleich und ist gleich dem Quadrat der Ruhenergie. Damit ergibt sich für die Gesamtenergie eines relativistischen Teilchens

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.0.7)$$

Gl. (3.0.7) gilt für alle Teilchen. Für masselose Teilchen (genauer: für Teilchen mit Ruhmasse Null) folgt

$$E = cp. \quad (3.0.8)$$

Ruhmasselose Teilchen mit einer Gesamtenergie E unterliegen aber auch der Gravitation, weil sie eine bewegte Masse von

$$m = E/c^2 \quad (3.0.9)$$

besitzen.

Einen Anschluss an den Bereich der klassischen Mechanik ($p \ll m_0 c$) erhalten wir ebenfalls aus (3.0.7) durch Reihenentwicklung. Für die kinetische Energie erhält man

$$\begin{aligned} E^{\text{kin}} &= E - m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 \\ &= m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2} - m_0 c^2 \\ &\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right) - m_0 c^2 \\ &= \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2, \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Mechanik. Aus (3.0.4) und (3.0.5) ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{p}{\gamma m_0} = \frac{c^2 p}{E}$$

oder

$$\beta = \frac{cp}{E}. \quad (3.0.11)$$

In der Relativistik ist es üblich, $c = 1$ zu setzen. Damit vereinfachen sich alle angegebenen Formeln. Zur Berechnung von Zahlenwerten ist jedoch der tatsächliche Wert der Lichtgeschwindigkeit zu berücksichtigen.

In der Astroteilchenphysik tritt häufig das Problem auf, die Schwellwertenergie für einen bestimmten Prozess der Teilchenerzeugung zu berechnen. Dazu muss im Schwerpunktsystem der Kollision mindestens die Masse aller Teilchen im Endzustand der Reaktion aufgebracht werden. In Speicherringen ist das Schwerpunktsystem meist mit dem Laborsystem identisch, sodass etwa für die Erzeugung eines Teilchens der Masse M in einer Elektron-Positron-Frontalkollision (e^+ und e^- haben beide die Energie E) gelten muss:

$$2E \geq M. \quad (3.0.12)$$

Bei der Wechselwirkung eines Teilchens der Energie E mit einem ruhenden Target, wie es für die Prozesse in der kosmischen Strahlung typisch ist, muss aber zunächst die Schwerpunktsenergie des Prozesses berechnet werden.

Für den allgemeinen Fall der Kollision zweier Teilchen mit Gesamtenergien E_1 und E_2 sowie Impulsen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 errechnet sich die lorentzinvariante Größe der Schwerpunktsenergie E_{CMS} nach Gl. (3.0.7) mithilfe von (3.0.11) zu

$$\begin{aligned} E_{\text{CMS}} &= \sqrt{s} = \{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2\}^{1/2} \\ &= \{E_1^2 - p_1^2 + E_2^2 - p_2^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\}^{1/2} \\ &= \{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 \cos \theta)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.0.13)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 . Für hohe Energien ($\beta_i \rightarrow 1$ und $m_1, m_2 \ll E_1, E_2$) vereinfacht sich (3.0.13) zu

$$\sqrt{s} \approx \{2E_1E_2(1 - \cos \theta)\}^{1/2}. \quad (3.0.14)$$

Falls ein Teilchen (z. B. das mit der Masse m_2) in Ruhe ist (Laborsystem $E_2 = m_2; \mathbf{p}_2 = 0$), folgt aus (3.0.13)

$$\sqrt{s} = \{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2\}^{1/2}, \quad (3.0.15)$$

und mit der relativistischen Näherung ($m_1^2, m_2^2 \ll 2E_1m_2$) erhält man

$$\sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1m_2}. \quad (3.0.16)$$

In einer solchen Reaktion können nur Teilchen mit Massen $M \leq \sqrt{s}$ erzeugt werden.

3.1 Beispiele für die Berechnung von Schwerpunktsenergien

Die genaue Formulierung eines Problems ist der wichtigste Schritt zu seiner Lösung.

Edwin Bliss

Beispiel 1

Ein hochenergetisches Proton der kosmischen Strahlung (Energie E_p , Impuls \mathbf{p} , Ruhmasse m_0) möge an einem ruhenden Targetproton ein Proton-Antiproton-Paar erzeugen:

$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p}. \quad (3.1.1)$$

Nach Gl. (3.0.13) errechnet sich die Schwerpunktsenergie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \{(E_p + m_0)^2 - (\mathbf{p} - 0)^2\}^{1/2} \\ &= \{E_p^2 + 2m_0E_p + m_0^2 - p^2\}^{1/2} \\ &= \{2m_0E_p + 2m_0^2\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Für den Endzustand, bestehend aus drei Protonen und einem Antiproton (die Masse des Antiprotons ist gleich der des Protons), muss also gelten

$$\sqrt{s} \geq 4m_0. \quad (3.1.3)$$

Damit folgt für die Mindestenergie des einfallenden Protons

$$\begin{aligned} 2m_0E_p + 2m_0^2 &\geq 16m_0^2, \\ E_p &\geq 7m_0 \quad (= 6,568 \text{ GeV}). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Beispiel 2

Ein energiereiches Elektron (Energie E_e , Impuls \mathbf{p} , Ruhmasse m_e) möge an einem ruhenden Targetelektron ein e^+e^- -Paar erzeugen,

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+ + e^-. \quad (3.1.5)$$

Nach Gl. (3.0.15) gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \{m_e^2 + m_e^2 + 2E_em_e\}^{1/2} \geq 4m_e, \\ E_e &\geq 7m_e, \\ E_e &\geq 3,58 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Beispiel 3

Ein Photon möge an einem ruhenden Targetelektron ein e^+e^- -Paar erzeugen,

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-. \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \{m_e^2 + 2E_\gamma m_e\}^{1/2} \geq 3m_e, \\ E_\gamma &\geq 4m_e, \\ E_\gamma &\geq 2,04 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Beispiel 4

Ein Photon möge an einem ruhenden Targetproton (Masse m_0) ein neutrales Pion (Masse $m_{\pi^0} \approx 135 \text{ MeV}$) erzeugen:

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0, \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \{m_0^2 + 2E_\gamma m_0\}^{1/2} \geq (m_0 + m_{\pi^0}), \\ m_0^2 + 2E_\gamma m_0 &\geq m_0^2 + m_{\pi^0}^2 + 2m_0 m_{\pi^0}, \\ E_\gamma &\geq \frac{2m_0 m_{\pi^0} + m_{\pi^0}^2}{2m_0} = m_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{2m_0}, \\ E_\gamma &\geq m_{\pi^0} + 9,7 \text{ MeV} \approx 145 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Für Rechnungen dieser Art ist es sinnvoll, Vierervektoren, mit denen dasselbe physikalische Objekt unabhängig vom Lorentz-System beschrieben werden kann, einzuführen. Genauso wie die Zeit t und der Ortsvektor $s = (x, y, z)$ zu einem Vierervektor zusammengefasst werden können, lässt sich der Viererimpuls

$$q = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \quad (3.1.11)$$

einführen. Wegen

$$q^2 = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \quad (3.1.12)$$

ist das Quadrat des Viererimpulses gleich dem Quadrat der Ruhmasse. Für Photonen gilt

$$q^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = 0. \quad (3.1.13)$$

Von Teilchen, für die [Gl.\(3.1.12\)](#) gilt, sagt man, sie liegen auf der Massenschale. Man nennt diese Teilchen auch reell. Daneben können sich Teilchen im Rahmen der

Heisenberg'schen Unschärferelation aus dem Vakuum für kurze Zeit Energie ‚borgen‘. Diese Teilchen bezeichnet man als virtuelle Teilchen. Sie liegen nicht auf der Massenschale. In Wechselwirkungsprozessen können sie nur als Austauschteilchen vorkommen.

Beispiel 5

Elektron-Positron-Paarerzeugung im Coulomb-Feld eines Kernes durch ein Photon (Abb. 3.1)

In diesem Beispiel ist das einlaufende Photon γ reell, und das zwischen dem Elektron und Kern ausgetauschte Photon γ^* virtuell,

$$q_\gamma + q_p \geq 2m_e + m_p,$$

$$q_\gamma^2 + q_p^2 + 2q_\gamma q_p \geq 4m_e^2 + m_p^2 + 4m_e m_p.$$

Wegen $q_\gamma^2 = 0$, und wenn man annimmt, dass der Targetkern ein Proton ist, also $q_p^2 = m_p^2$ folgt

$$2q_\gamma q_p \geq 4m_e^2 + 4m_e m_p$$

und weiter

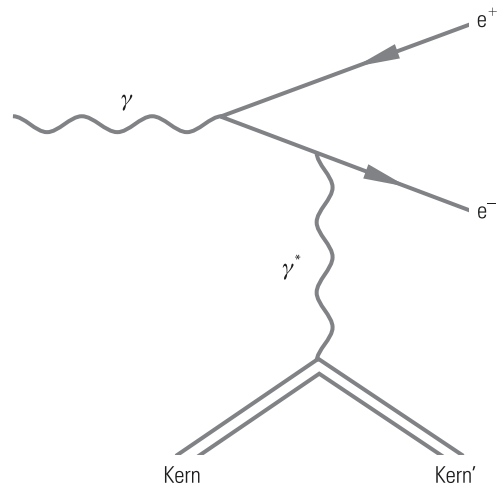
$$2 \begin{pmatrix} E_\gamma \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_p \\ 0 \end{pmatrix} = 2m_p E_\gamma \geq 4m_e^2 + 4m_e m_p,$$

denn das Targetproton ist in Ruhe ($E = m_p, \mathbf{p} = 0$). Damit wird die Schwellwertenergie

$$E_\gamma \geq 2m_e + \frac{2m_e^2}{m_p}.$$

Abb. 3.1 Der Prozess

$\gamma + \text{Kern} \rightarrow e^+ + e^- + \text{Kern}'$



Die Schwellwertenergie ist etwas größer als $2m_e$, weil das Targetproton eine gewisse Rückstoßenergie aufnimmt. Ohne Proton als Rückstoßpartner ist diese Reaktion aus Gründen der Impulserhaltung nicht möglich.

Beispiel 6

Elektron-Proton-Streuung (Abb. 3.2)

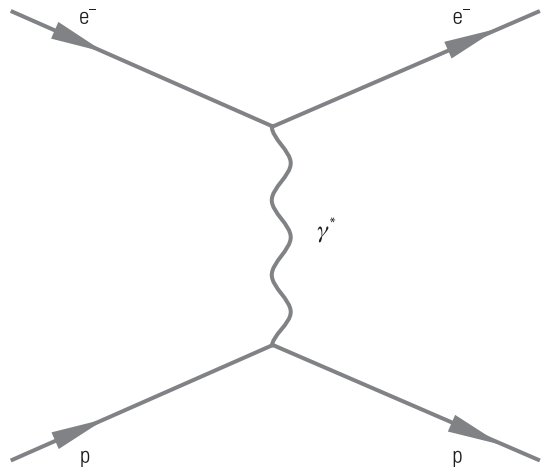
Die Virtualität des ausgetauschten Photons γ^* kann aus der Kinematik mithilfe der Vierervektoren von Elektron und Proton leicht ausgerechnet werden. Die Viererimpulse werden wie folgt definiert: einlaufendes Elektron $q_e = \begin{pmatrix} E_e \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix}$; auslaufendes Elektron $q'_e = \begin{pmatrix} E'_e \\ \mathbf{p}'_e \end{pmatrix}$; einlaufendes Proton $q_p = \begin{pmatrix} E_p \\ \mathbf{p}_p \end{pmatrix}$; auslaufendes Proton $q'_p = \begin{pmatrix} E'_p \\ \mathbf{p}'_p \end{pmatrix}$. Es gilt die Viererimpulserhaltung (Energie- und Impulserhaltung):

$$q_e + q_p = q'_e + q'_p. \quad (3.1.14)$$

Das Viererimpulsquadrat des ausgetauschten virtuellen Photons $q_{\gamma^*}^2$ ist

$$\begin{aligned} q_{\gamma^*}^2 &= (q_e - q'_e)^2 \\ &= \begin{pmatrix} E_e - E'_e \\ \mathbf{p}_e - \mathbf{p}'_e \end{pmatrix}^2 = (E_e - E'_e)^2 - (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}'_e)^2 \\ &= E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 + E_e'^2 - \mathbf{p}_e'^2 - 2E_e E'_e + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}'_e \\ &= 2m_e^2 - 2E_e E'_e (1 - \beta_e \beta'_e \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Abb. 3.2 Der Prozess
 $e^- + p \rightarrow e^- + p$



wobei β_e und β'_e die Geschwindigkeiten des einlaufenden und auslaufenden Elektrons und θ der Winkel zwischen \mathbf{p}_e und \mathbf{p}'_e sind. Für hohe Energien und nicht zu kleine Streuwinkel vereinfacht sich (3.1.15) zu

$$q_{\gamma^*}^2 = -2E_e E'_e (1 - \cos \theta) = -4E_e E'_e \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.1.16)$$

Falls sich $\sin \frac{\theta}{2}$ durch $\frac{\theta}{2}$ annähern lässt, erhält man für nicht zu kleine Winkel

$$q_{\gamma^*}^2 = -E_e E'_e \theta^2. \quad (3.1.17)$$

Das Massenquadrat des ausgetauschten Photons ist in diesem Falle negativ! Damit ist die Masse von γ^* rein imaginär. Solche Photonen nennt man raumartig.

Beispiel 7

Myonpaarerzeugung in e^+e^- -Wechselwirkungen (Abb. 3.3)

Für den Fall, dass Elektronen und Positronen gleiche Gesamtenergie E und entgegengesetzten Impuls ($\mathbf{p}_{e^+} = -\mathbf{p}_{e^-}$) haben, gilt

$$q_{\gamma^*}^2 = (q_{e^+} + q_{e^-})^2 = \left(\begin{matrix} E + E \\ \mathbf{p}_{e^+} + (-\mathbf{p}_{e^+}) \end{matrix} \right)^2 = 4E^2. \quad (3.1.18)$$

In diesem Fall ist die Masse des ausgetauschten Photons $2E$ und damit positiv. Ein solches Photon heißt zeitartig. Das Myonenpaar im Endzustand kann erzeugt werden, falls $2E \geq 2m_\mu$ ist.

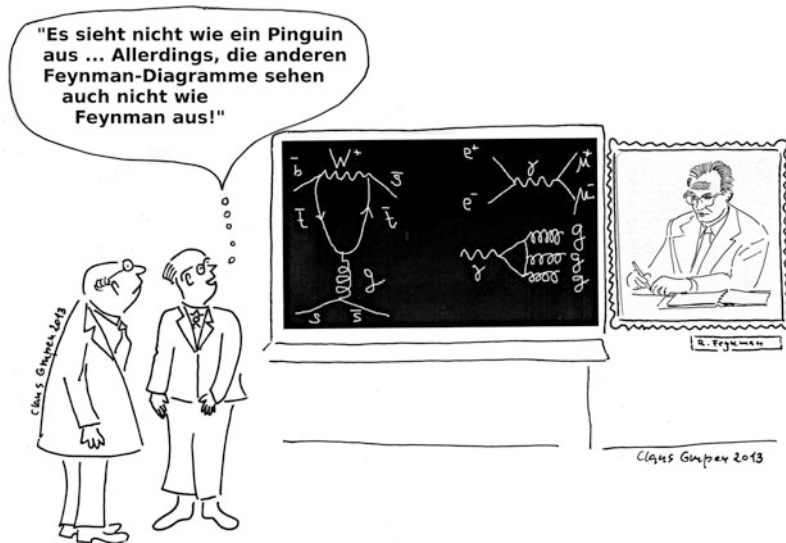
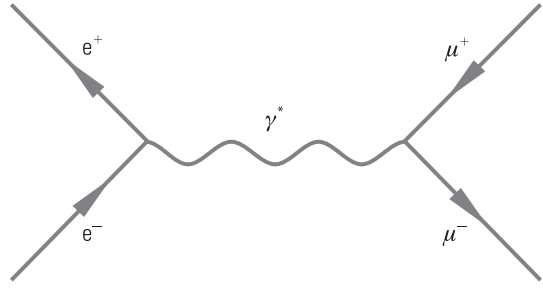


Abb. 3.3 Der Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

**Beispiel 8**

Der WIMP-Nachweis

Die Berechnung des maximalen Energieübertrages eines WIMPs ($m_W = 100 \text{ GeV}$ Masse) auf einen ruhenden Targetkern (Masse $m_T = 12 \text{ GeV}$) ist für die Suche nach supersymmetrischen und massiven schwach wechselwirkenden Teilchens von besonderer Bedeutung. Da die WIMPs möglicherweise im Halo der Milchstraße gravitativ eingefangen werden, nehmen sie auch dessen Geschwindigkeit von etwa 300 km/s an, entsprechend $\beta = 10^{-3}$. Wegen der geringen Geschwindigkeiten der WIMPs ist es in diesem Fall ausreichend, klassisch zu rechnen. Die Geschwindigkeiten des WIMPs vor dem Stoß seien u_1 bzw. v_1 nach der Wechselwirkung. v_2 sei die Geschwindigkeit des Targets nach dem Stoß. Die Masse des WIMPs sei m_W und die des Targets m_T .

Die Impulserhaltung liefert

$$m_W \cdot u_1 = m_W \cdot v_1 + m_T \cdot v_2 \quad (3.1.19)$$

oder

$$m_W \cdot v_1 = m_W \cdot u_1 - m_T \cdot v_2. \quad (3.1.20)$$

Nach dem Quadrieren erhält man

$$m_W^2 \cdot v_1^2 = m_W^2 \cdot u_1^2 + m_T^2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot m_W m_T u_1 v_2. \quad (3.1.21)$$

Die Energieerhaltung bedeutet (nach Multiplikation mit dem Faktor 2):

$$m_W \cdot u_1^2 = m_W \cdot v_1^2 + m_T \cdot v_2^2. \quad (3.1.22)$$

Diese Gleichung wird mit dem Faktor m_W multipliziert,

$$m_W^2 \cdot u_1^2 = m_W^2 \cdot v_1^2 + m_T m_W \cdot v_2^2, \quad (3.1.23)$$

und in die Impulserhaltung eingesetzt,

$$m_W^2 \cdot v_1^2 = m_W^2 \cdot v_1^2 + m_T m_W \cdot v_2^2 + m_T^2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot m_W m_T u_1 v_2, \quad (3.1.24)$$

woraus folgt:

$$2 \cdot m_W m_T u_1 v_2 = m_T m_W \cdot v_2^2 + m_T^2 \cdot v_2^2. \quad (3.1.25)$$

Nach Kürzen und Rearrangieren erhält man

$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{2m_W}{m_W + m_T}. \quad (3.1.26)$$

Nach dem Quadrieren und der Multiplikation mit $\frac{m_T}{m_W}$ folgt für das Verhältnis der Energie des Targets zur WIMP-Energie:

$$f = \frac{\frac{1}{2} m_T v_2^2}{\frac{1}{2} m_W u_1^2} = \frac{4m_T m_W}{(m_W + m_T)^2}. \quad (3.1.27)$$

Mit Zahlen findet man für die oben angegebenen Massen $f = 0,383$. Mit $u_1 = 300 \text{ km/s}$ und $m_W = 100 \text{ GeV}$ ist die kinetische Energie des einfallenden WIMPs $8 \cdot 10^{-15} \text{ Joule}$. Damit erhält man für die Rückstoßenergie des Targets wegen des Faktors f etwa 20 keV . So geringe Werte für die Rückstoßkerne sind bei einem Untergrund von Konkurrenzreaktionen sehr schwer nachzuweisen.

3.2 Beispiele für die Behandlung von Zerfällen

Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.

Galileo Galilei

Der elegante Formalismus der Viererimpulse zur Berechnung kinematischer Zusammenhänge lässt sich auch auf Zerfälle von Elementarteilchen anwenden. Bei einem Zweikörperzerfall eines Elementarteilchens aus der Ruhe heraus erhalten aus Gründen der Impulserhaltung die beiden Zerfallsteilchen wohldefinierte diskrete Energien.

Beispiel 9

Der Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

Die Viererimpulserhaltung liefert

$$q_\pi^2 = (q_\mu + q_\nu)^2 = m_\pi^2. \quad (3.2.1)$$

Im Ruhesystem des Pions fliegen das Myon und das Neutrino mit $\mathbf{p}_\mu = -\mathbf{p}_{\nu_\mu}$ auseinander,

$$\left(\begin{matrix} E_\mu + E_\nu \\ \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_{\nu_\mu} \end{matrix} \right)^2 = (E_\mu + E_\nu)^2 = m_\pi^2. \quad (3.2.2)$$

Für das Neutrino als masseloses Teilchen (bzw. mit einer für diese Betrachtung verschwindend kleinen Masse) gilt

$$E_\nu = p_{\nu_\mu}$$

und damit

$$E_\mu + p_\mu = m_\pi.$$

Durch Umstellen und Quadrieren erhält man

$$\begin{aligned} E_\mu^2 + m_\pi^2 - 2E_\mu m_\pi &= p_\mu^2, \\ 2E_\mu m_\pi &= m_\pi^2 + m_\mu^2, \\ E_\mu &= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Mit $m_\mu = 105,658\,389\text{ MeV}$ und $m_{\pi^\pm} = 139,569\,95\text{ MeV}$ erhält man $E_\mu^{\text{kin}} = E_\mu - m_\mu = 4,12\text{ MeV}$. Für den Zweikörperzerfall $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ liefert Gl. (3.2.3) $E_\mu^{\text{kin}} = E_\mu - m_\mu = 152,49\text{ MeV}$ ($m_{K^\pm} = 493,677\text{ MeV}$).

Aus Gründen der Helizitätserhaltung ist der Zerfall $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ stark unterdrückt (s. Abb. 2.11). Für diesen Zerfall erhält das Positron nach Gl. (3.2.3) eine kinetische Energie von $E_{e^+}^{\text{kin}} = E_{e^+} - m_e = \frac{m_\pi^2}{2} + \frac{m_e^2}{2m_\pi} - m_e = 69,3\text{ MeV}$, also etwa die halbe Pionmasse. Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, weil das ‚schwere‘ Pion in zwei fast masselose Teilchen zerfällt.

Beispiel 10

Der Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Die Kinematik des π^0 -Zerfalls aus der Ruhe ist extrem einfach. Beide Photonen erhalten als Energie die halbe Pionmasse. An diesem Beispiel soll aber auch der Zerfall eines π^0 im Fluge diskutiert werden. Wird ein Photon in Flugrichtung des π^0 emittiert, so erhält es eine höhere Energie als wenn es entgegengesetzt zur Flugrichtung ausgesandt wird. Für den Zerfall eines π^0 im Fluge (Lorentz-Faktor $\gamma = E_{\pi^0}/m_{\pi^0}$) erhält man ein flaches Spektrum der Photonen mit einer Maximal- und Minimalenergie. Aus der Viererimpulserhaltung

$$q_{\pi^0} = q_{\gamma_1} + q_{\gamma_2}$$

folgt

$$q_{\pi^0}^2 = m_{\pi^0}^2 = q_{\gamma_1}^2 + q_{\gamma_2}^2 + 2q_{\gamma_1} q_{\gamma_2}. \quad (3.2.4)$$

Da die Massen der reellen Photonen null sind, ergeben sich die energetischen Grenzen aus

$$2q_{\gamma_1} q_{\gamma_2} = m_{\pi^0}^2. \quad (3.2.5)$$

Für diesen Grenzfall werden die Photonen parallel bzw. antiparallel zur Flugrichtung des π^0 emittiert. Damit folgt

$$\mathbf{p}_{\gamma_1} \parallel -\mathbf{p}_{\gamma_2}. \quad (3.2.6)$$

Gl. (3.2.5) liefert damit

$$2(E_{\gamma_1} E_{\gamma_2} - \mathbf{p}_{\gamma_1} \cdot \mathbf{p}_{\gamma_2}) = 4E_{\gamma_1} E_{\gamma_2} = m_{\pi^0}^2. \quad (3.2.7)$$

Wegen $E_{\gamma_2} = E_{\pi^0} - E_{\gamma_1}$ führt Gl. (3.2.7) auf die quadratische Gleichung

$$E_{\gamma_1}^2 - E_{\gamma_1} E_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{4} = 0 \quad (3.2.8)$$

mit den symmetrischen Lösungen

$$\begin{aligned} E_{\gamma_1}^{\max} &= \frac{1}{2}(E_{\pi^0} + p_{\pi^0}), \\ E_{\gamma_1}^{\min} &= \frac{1}{2}(E_{\pi^0} - p_{\pi^0}). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

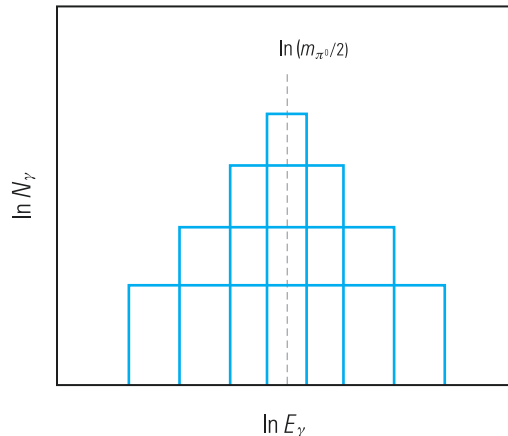
Wegen $E_{\pi^0} = \gamma m_{\pi^0}$ und $p_{\pi^0} = \gamma m_{\pi^0} \beta$ lässt sich Gl. (3.2.9) auch schreiben als

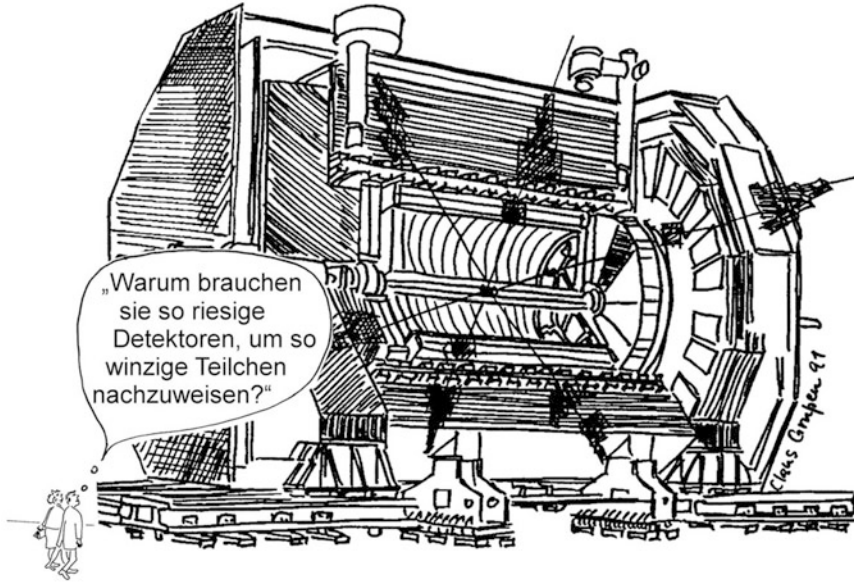
$$\begin{aligned} E_{\gamma_1}^{\max} &= \frac{1}{2} \gamma m_{\pi^0} (1 + \beta) = \frac{1}{2} m_{\pi^0} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \\ E_{\gamma_1}^{\min} &= \frac{1}{2} \gamma m_{\pi^0} (1 - \beta) = \frac{1}{2} m_{\pi^0} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Im relativistischen Grenzfall ($\gamma \gg 1$, $\beta \approx 1$) erhält das in Flugrichtung des π^0 emittierte Photon die Energie $E_{\gamma}^{\max} = E_{\pi^0} = \gamma m_{\pi^0}$ und das rückwärts emittierte Photon die Energie null.

In einer logarithmischen Skala ist die Energieverteilung der Photonen symmetrisch um die halbe π^0 -Masse. Hat man ein Spektrum von neutralen Pionen, so überlagern sich die Energieverteilungen der Zerfallsphotonen in der Weise, dass man in einer logarithmischen Darstellung ein Maximum bei der halben π^0 -Masse erhält (s. Abb. 3.4).

Abb. 3.4 Energieverteilung der Photonen beim π^0 -Zerfall in zwei Photonen für unterschiedliche Pionenenergien in logarithmischer Darstellung [22]





Viel schwieriger wird die Behandlung von Dreikörperzerfällen. Dieser Prozess soll am Beispiel des Myonzerfalls erläutert werden:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (3.2.11)$$

Wir nehmen an, dass sich das Myon ursprünglich in Ruhe befindet ($E_\mu = m_\mu$). Die Viererimpulserhaltung

$$q_\mu = q_e + q_{\bar{\nu}_e} + q_{\nu_\mu} \quad (3.2.12)$$

lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} (q_\mu - q_e)^2 &= (q_{\bar{\nu}_e} + q_{\nu_\mu})^2, \\ q_\mu^2 + q_e^2 - 2q_\mu q_e &= m_\mu^2 + m_e^2 - 2 \begin{pmatrix} m_\mu \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_e \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix} = (q_{\bar{\nu}_e} + q_{\nu_\mu})^2, \\ E_e &= \frac{m_\mu^2 + m_e^2 - (q_{\bar{\nu}_e} + q_{\nu_\mu})^2}{2m_\mu}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

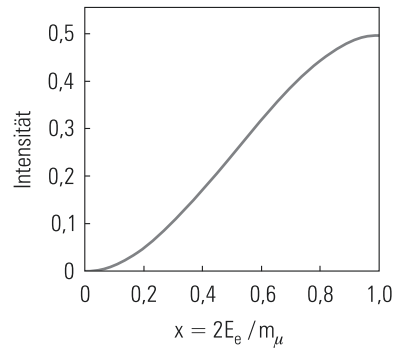
Die Elektronenenergie ist maximal, wenn $(q_{\bar{\nu}_e} + q_{\nu_\mu})^2$ minimal wird. Für verschwindende Neutrinomassen bedeutet dies, dass das Elektron eine Maximalenergie erhält, falls

$$q_{\bar{\nu}_e} q_{\nu_\mu} = E_{\bar{\nu}_e} E_{\nu_\mu} - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \cdot \mathbf{p}_{\nu_\mu} = 0 \quad (3.2.14)$$

gilt. Gl. (3.2.14) ist erfüllt für $\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \parallel \mathbf{p}_{\nu_\mu}$. Damit wird

$$E_e^{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \approx \frac{m_\mu}{2} = 52,83 \text{ MeV}. \quad (3.2.15)$$

Abb. 3.5 Energiespektrum der Elektronen aus dem Myonzerfall



Für diese Konfiguration ist also \mathbf{p}_e antiparallel zu den Neutrinoimpulsen, die wiederum zueinander parallel sind.

Unter Berücksichtigung der Spins der beteiligten Teilchen und der Struktur der schwachen Wechselwirkung erhält man für das Elektronenspektrum mit den Abkürzungen $x = 2E_e/m_\mu \approx E_e/E_e^{\max}$

$$N(x) = \text{const} \cdot x^2(1,5 - x). \quad (3.2.16)$$

Beim Dreikörperzerfall wird die zur Verfügung stehende Zerfallsenergie also wie beim Betazerfall ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) kontinuierlich auf die Endzustandsteilchen aufgeteilt (Abb. 3.5)

3.3 Lorentz-Transformationen

Mathematik ist wie Liebe – eine einfache Sache, aber sie kann kompliziert werden.

Robert J. Dr'abek

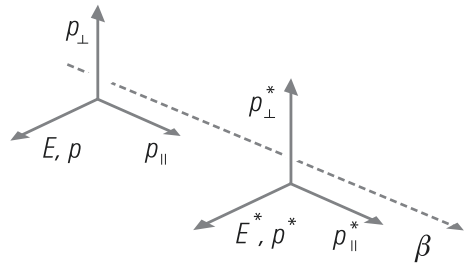
Bei der kinematischen Behandlung von Wechselwirkungs- und Zerfallsprozessen reicht es völlig aus, den Prozess im Schwerpunktsystem zu berechnen. In einem anderen System (z. B. Laborsystem) erhält man die Energien und Impulse durch eine Lorentz-Transformation. Wenn E und \mathbf{p} Energie und Impuls im Schwerpunktsystem sind und das Laborsystem sich mit der Geschwindigkeit β relativ zu p_{\parallel} bewegt, erhält man für die Größen E^* und p_{\parallel}^* im bewegten System (Abb. 3.6)

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_{\parallel}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad p_{\perp}^* = p_{\perp}. \quad (3.3.1)$$

Die Transversalimpulskomponente bleibt bei dieser Transformation erhalten. Gl. (3.3.1) ausgeschrieben lautet

$$\begin{aligned} E^* &= \gamma E - \gamma\beta p_{\parallel}, \\ p_{\parallel}^* &= -\gamma\beta E + \gamma p_{\parallel}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Abb. 3.6 Illustration zur Lorentz-Transformation



Für $\beta = 0$, entsprechend $\gamma = 1$, erhält man trivialerweise $E^* = E$ und $p_{\parallel}^* = p_{\parallel}$.

Ein Teilchen der Energie $E = \gamma_2 m_0$, gesehen von einem System, das sich relativ zum Teilchen mit γ_1 parallel zum Impuls \mathbf{p} bewegt, erhält dort die Energie

$$\begin{aligned}
 E^* &= \gamma_1 E - \gamma_1 \beta_1 p_{\parallel} \\
 &= \gamma_1 \gamma_2 m_0 - \gamma_1 \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}{\gamma_1} \sqrt{(\gamma_2 m_0)^2 - m_0^2} \\
 &= \gamma_1 \gamma_2 m_0 - m_0 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \sqrt{\gamma_2^2 - 1}.
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Falls $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ (für ein mit dem Teilchen bewegtes System) erhält man korrekterweise

$$E^* = \gamma^2 m_0 - m_0(\gamma^2 - 1) = m_0.$$



3.4 Berechnung von Wirkungsquerschnitten

Wenn man es nicht in Zahlen ausdrücken kann, dann ist es keine Wissenschaft, es ist nur Meinung.

Lazarus Long

Neben der Kinematik der Wechselwirkungsprozesse kommt der Angabe des Wirkungsquerschnitts für eine Reaktion eine besondere Rolle zu. Im einfachsten Fall kann man sich den Wirkungsquerschnitt als eine effektive Fläche vorstellen, die ein Targetteilchen dem Projektil entgegenstellt. Stellt das Target eine Fläche von πr_T^2 dar und hat das Projektil eine Größe entsprechend πr_P^2 , so ist der geometrische Wirkungsquerschnitt für eine Kollision

$$\sigma = \pi(r_T + r_P)^2. \quad (3.4.1)$$

In der Regel hängt der Wirkungsquerschnitt natürlich von weiteren Parametern, z. B. der Energie der Teilchen ab. Der atomare Wirkungsquerschnitt σ_A , gemessen in cm^2 , hängt mit der Wechselwirkungslänge λ gemäß

$$\lambda[\text{cm}] = \frac{A}{N_A[\text{g}^{-1}] \cdot \varrho[\text{g}/\text{cm}^3] \cdot \sigma_A[\text{cm}^2]} \quad (3.4.2)$$

zusammen (N_A – Avogadro-Zahl; A – Massenzahl des Targets, ϱ – Dichte). Häufig wird die Wechselwirkungslänge auch durch die Größe $\lambda \cdot \varrho$ [g/cm^2] angegeben. Entsprechend wird der Absorptionskoeffizient durch

$$\mu[\text{cm}^{-1}] = \frac{N_A \cdot \varrho \cdot \sigma_A}{A} = \frac{1}{\lambda} \quad (3.4.3)$$

beziehungsweise durch μ/ϱ [$(\text{g}/\text{cm}^2)^{-1}$] definiert.

Der Absorptionskoeffizient liefert damit auch eine nützliche Beziehung zur Berechnung von Wechselwirkungsraten,

$$\phi[(\text{g}/\text{cm}^2)^{-1}] = \frac{N_A}{A} \cdot \sigma_A. \quad (3.4.4)$$

Falls σ_N der Wirkungsquerschnitt pro Nukleon ist, gilt

$$\phi[(\text{g}/\text{cm}^2)^{-1}] = \sigma_N \cdot N_A. \quad (3.4.5)$$

Wenn j der Teilchenstrom pro cm^2 und s ist, erhält man für die Zahl dN der unter einem Winkel θ pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen

$$dN(\theta) = j \cdot \sigma(\theta) d\Omega. \quad (3.4.6)$$

Dabei ist

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

der differentielle Streuquerschnitt, der die Wahrscheinlichkeit der Streuung in den Raumwinkel

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (3.4.7)$$

darstellt (φ – Azimutwinkel, θ – Polarwinkel). Bei azimuthaler Symmetrie gilt

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta = -2\pi \, d(\cos \theta). \quad (3.4.8)$$

Neben der Winkelabhängigkeit kann der Wirkungsquerschnitt auch noch von anderen Größen abhängen, sodass man eine Vielzahl von differentiellen Wirkungsquerschnitten kennt, z. B.

$$\frac{d\sigma}{dE}, \quad \frac{d\sigma}{dp}$$

oder auch doppelt differentielle Wirkungsquerschnitte wie

$$\frac{d^2\sigma}{dE \, d\theta}. \quad (3.4.9)$$

Neben den angegebenen charakteristischen Größen gibt es noch eine Reihe anderer kinematischer Variablen, die zur Beschreibung spezieller Prozesse herangezogen werden.

Zusammenfassung

Für die Astroteilchenphysik ist die Kenntnis der Schwellwertenergien und Wirkungsquerschnitte von großer Bedeutung. In der kosmischen Strahlung war es lange Zeit üblich, nur im Laborsystem zu rechnen. Experimente der kosmischen Strahlung waren wie Experimente mit festem Target. In der Teilchenphysik, insbesondere an Speicherringen, war die Berechnung von physikalischen Größen im Schwerpunktsystem eher angemessen. Der Astroteilchenphysiker muss in beiden Lorentz-Systemen zu Hause sein. Die Kenntnis der energieabhängigen Wirkungsquerschnitte ist für den Entwurf und die Auswertung von Experimenten eine wesentliche Voraussetzung. Exemplarisch werden in diesem Kapitel die Übergänge zwischen verschiedenen Lorentz-Systemen an typischen Prozessen der Astroteilchenphysik dargestellt.

Einstieg in die Astroteilchenphysik

Grundlagen, Messungen und Ergebnisse aktueller
Forschung

Gruppen, C.

2018, X, 441 S. 290 Abb., 103 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-55270-4