

# Ausführliche Lösungen der Übungsaufgaben

## Kapitel 1

### Lösung von Aufgabe 1.1:

a) Wichtig ist hier, dass man die „echt kleiner“-Zeichen beachtet, es gehört also weder 3 noch 11 zur Menge  $A$ . Somit ist

$$A = \{4,5,6,7,8,9,10\}.$$

b) Das ist natürlich ein wenig zeitabhängig, zum Zeitpunkt der Drucklegung des Buches ist  $B = \{\text{Berlin, Hamburg, Köln, München}\}$ .

c) Da es keine ungerade Zahl gibt, die durch 10 teilbar ist, ist  $C = \emptyset$ .

### Lösung von Aufgabe 1.2:

a1) Das ist die Menge aller männlichen Menschen, die bereits ein Verbrechen begangen haben, sowie aller weiblichen Wesen, die höchstens 30 Jahre alt sind.

a2) Menge aller männlichen Verbrecher, die höchstens 30 Jahre alt sind.

a3) Das ist die Menge aller Männer oder Frauen, die höchstens 30 Jahre alt sind, also die Menge aller Menschen, die höchstens 30 Jahre alt sind.

b1) Getreu einem alten Liedtext heißt das zunächst, dass alle Männer Verbrecher sind; es heißt aber *außerdem*, dass alle Verbrecher Männer sind, dass es also keine weiblichen Verbrecher gibt.

b2) Das bedeutet, dass die Menge aller Frauen, die höchstens dreißig Jahre alt sind, gleich der Menge aller Frauen ist, mit anderen Worten, dass alle weiblichen Menschen höchstens 30 Jahre alt sind; hätten manche wohl gern, ist aber falsch.

Lösung von Aufgabe 1.3: Es ist  $B \cup C = \{2,3,4,5\}$ , also

$$A \cap (B \cup C) = \{1,2,4\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,4\}. \quad (1)$$

Andererseits ist  $A \cap B = \{2,4\}$  und  $A \cap C = \{2\}$ , also

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2,4\}. \quad (2)$$

Die in (1) und (2) angegebenen Mengen sind also identisch, das illustriert das erste Distributivgesetz.

Weiterhin ist  $B \cap C = \{2,3\}$ , also

$$A \cup (B \cap C) = \{1,2,4\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3,4\}. \quad (3)$$

Andererseits ist  $A \cup B = \{1,2,3,4\}$  und  $A \cup C = \{1,2,3,4,5\}$ , also

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4\}. \quad (4)$$

Die in (3) und (4) angegebenen Mengen sind also identisch, das illustriert das zweite Distributivgesetz.

**Lösung von Aufgabe 1.4:** Wichtig ist hier, dass man ebenso wie im Beweis von Teil a) beide Richtungen beweist.

Die Inklusion  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$  zeigt man so: Es sei  $x$  ein beliebiges Element von  $\overline{A \cap B}$ . Dann ist  $x$  nicht Element von  $A \cap B$ , kann also nicht gleichzeitig in  $A$  und in  $B$  liegen. Somit gilt  $x \in \overline{A}$  oder  $x \in \overline{B}$  (oder beides), also  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Somit ist

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, nehme ich ein beliebiges Element  $x$  aus  $\overline{A} \cup \overline{B}$ . Dieses Element liegt also entweder in  $\overline{A}$  und somit nicht in  $A$ , oder in  $\overline{B}$  und somit nicht in  $B$  (oder beides). Daher liegt es nicht in  $A \cap B$  und ist somit Element von  $\overline{A \cap B}$ . Daher ist

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

**Lösung von Aufgabe 1.5:** Man kann folgende Vereinfachungen vornehmen:

a)

$$\begin{aligned} \overline{\overline{B \cap (A \cap \overline{B})}} &= B \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= (B \cup A) \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= (B \cup A) \cap G \\ &= A \cup B. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &(A \cap B \cap C) \cup \overline{(A \cup \overline{B} \cup C)} \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\ &= A \cap ((B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) \\ &= A \cap ((B \cap (C \cup \overline{C})) \cup (\overline{B} \cap C)) \\ &= A \cap (B \cup (\overline{B} \cap C)) \\ &= A \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Auch  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  wäre eine korrekte Lösung.

## Lösung von Aufgabe 1.6:

a) Es ist

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Wegen  $A \cap B = \{1,3\}$  ist

$$P(A \cap B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}, \quad (5)$$

und wegen  $(A \cup C) \cap B = A \cap B$  ist die in (5) angegebene Menge auch die Potenzmenge von  $(A \cup C) \cap B$ .

b) Es ist  $A \cap B = \{1,3\}$  und somit

$$(A \cap B) \times C = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}.$$

## Lösung von Aufgabe 1.7: Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Also ist  $\sqrt{2}$  die Hälfte von  $\sqrt{8}$ , und wäre  $\sqrt{8}$  eine rationale Zahl, so wäre es auch  $\sqrt{2}$ , was aber nach Satz 1.4 des Buches nicht der Fall ist.

## Lösung von Aufgabe 1.8:

a) Das ist richtig, denn wenn  $a = \frac{p}{q}$  ist, dann ist  $a^2 = \frac{p^2}{q^2}$ , also eine rationale Zahl.

b) Das stimmt nicht, denn  $a = \sqrt{2}$  ist irrational, aber  $a^2 = 2$  ist rational.

## Lösung von Aufgabe 1.9: Alle drei Ausdrücke sind komplexe Zahlen:

a) Die Zahl  $-2 - 3i$  ist unmittelbar als solche erkennbar.

b) Da  $i^2 = -1$  ist, ist auch dies eine komplexe Zahl.

c) Die beiden Lösungen der Gleichung  $x^2 + 2 = 0$  sind die Wurzeln aus  $-2$ , also die komplexen Zahlen  $\pm i\sqrt{2}$ .

## Lösung von Aufgabe 1.10:

a) Es ist

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 5i)(-1 - 2i) = -2 - 5i - 4i - 10i^2 = -2 + 10 - 9i = 8 - 9i.$$

b) Zunächst ist

$$z_2 \cdot z_3 = -1 - 2i + 3i + 6i^2 = -7 + i.$$

Damit berechnet man:

$$\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} = \frac{2 + 5i}{-7 + i} = \frac{(2 + 5i)(-7 - i)}{49 + 1} = \frac{-14 - 35i - 2i - 5i^2}{50} = -\frac{9}{50} - \frac{37}{50}i.$$

c)

$$\frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_3} = \frac{1 + 3i}{-2 + i} = \frac{(1 + 3i)(-2 - i)}{4 + 1} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

## Lösung von Aufgabe 1.11:

a) Der Betrag von  $1 - i$  ist  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,4142$ , der Winkel ist gemäß Definition 1.21 des Buches:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) + 360^\circ = -45^\circ + 360^\circ = 315^\circ.$$

Damit ergibt sich

$$1 - i = 1,4142 \cdot (\cos(315^\circ) + i \sin(315^\circ)) = 1,4142 \cdot (0,7071 - 0,7071 i).$$

b) Der Betrag von  $-5 - 3i$  ist  $\sqrt{25 + 9} = 5,8309$ , der Winkel lautet

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-3}{-5}\right) + 180^\circ = 210,964^\circ.$$

Daraus ergibt sich die folgende trigonometrische Form:

$$-5 - 3i = 5,8309 \cdot (-0,8575 - 0,5145 i).$$

## Lösung von Aufgabe 1.12:

a) Der Betrag der Zahl  $-1 + 2i$  ist  $\sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$ , der Winkel ergibt sich durch

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + 180^\circ = \arctan(-2) + 180^\circ = -63,435^\circ + 180^\circ = 116,565^\circ.$$

Um die gewünschte Potenzierung vornehmen zu können muss ich den Betrag hoch fünf nehmen und den Winkel mit fünf multiplizieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (-1 + 2i)^5 &= \sqrt{5}^5 \cdot (\cos(582,825^\circ) + i \sin(582,825^\circ)) \\ &= 55,901 \cdot (-0,733 + i \cdot (-0,679)) \\ &= -41 - 38i. \end{aligned}$$

Die letzten Werte sind natürlich gerundet, aber das darf man machen, da man ja weiß, dass die Ergebnisse ganze Zahlen sein müssen.

b) Die Zahl

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

hat den Betrag 1, der zugehörige Winkel ist  $\varphi = \arctan(1) = 45^\circ$ . Damit hat man sofort das Ergebnis:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \cos(8 \cdot 45^\circ) + i \cdot \sin(8 \cdot 45^\circ) = \cos(360^\circ) + i \sin(360^\circ) = 1.$$

## Lösung von Aufgabe 1.13:

a) Es ist  $|z| = \sqrt{13} = 3,605$  und  $\varphi = \arctan(\frac{3}{-2}) + 180^\circ = 123,69^\circ$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \sqrt{3,605} \cdot \left( \cos\left(\frac{123,69^\circ}{2}\right) + i \sin\left(\frac{123,69^\circ}{2}\right) \right) \\ &= 1,899 \cdot (0,472 + i \cdot 0,882) = 0,8960 + i \cdot 1,6741.\end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \sqrt{3,605} \cdot \left( \cos\left(\frac{123,69^\circ + 360^\circ}{2}\right) + i \sin\left(\frac{123,69^\circ + 360^\circ}{2}\right) \right) \\ &= -0,8960 - i \cdot 1,6741.\end{aligned}$$

b) Hier geht man natürlich genauso vor wie in a). Der Betrag von 8 ist überraschenderweise gleich 8, der Winkel ist 0, denn 8 ist - interpretiert als komplexe Zahl - gleich  $8 + 0 \cdot i$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(0^\circ) + i \sin(0^\circ)) = 2 \cdot (1 + 0) = 2, \\ \zeta_1 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ)) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}, \\ \zeta_2 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(240^\circ) + i \sin(240^\circ)) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

#### Lösung von Aufgabe 1.14:

a) Es ist  $R_1 = \{(3,4), (3,5)\}$  und  $R_2 = \{(5,5)\}$ .

b) Es gilt:  $(2,4) \in R$ , denn  $2^n = 4$  mit  $n = 2$ . Auch  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  ist in  $R$ , denn  $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$ , hier ist also  $n = 3$ . Schließlich ist auch  $(3,3) \in R$ , denn  $3^1 = 3$ .  $(3,6)$  liegt nicht in  $R$ , denn keine ganzzahlige Potenz von 3 ist gleich 6.

#### Lösung von Aufgabe 1.15:

a)  $R_5$  ist reflexiv, denn  $x \leq x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  $R_5$  ist nicht symmetrisch, jedoch transitiv; diese beiden Aussagen zeigt man wie in Beispiel 1.12 b) des Buches.

b)  $R_6$  ist reflexiv, denn für jedes  $x \in \mathbb{Z}$  gilt:  $x - x = 0$ , und 0 ist gerade. Zur Symmetrie: Ist  $x - y$  gerade, so ist auch  $-(x - y) = y - x$  gerade, also ist  $R_6$  symmetrisch. Auch Transitivität gilt, denn sind  $x - y$  und  $y - z$  gerade, so ist auch  $(x - y) + (y - z) = x - z$  gerade.

c) Die kleine Vorsilbe „un“, die im Vergleich zu Teil b) hinzugekommen ist, ändert hier einiges.  $R_7$  ist nicht reflexiv, denn  $x - x = 0$  ist keine ungerade Zahl. Symmetrie ist noch gegeben, denn wenn  $x - y$  ungerade ist, so ist auch  $-(x - y) = y - x$  ungerade. Transitivität gilt hier nicht mehr, denn die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl; sind also  $x - y$  und  $y - z$  ungerade, so ist  $(x - y) + (y - z) = x - z$  gerade.

d) Sicherlich liegt jede Stadt im selben Bundesland wie sie selbst; das klingt zwar sprachlich ein wenig daneben, ist aber richtig. Liegt weiterhin  $s_1$  im selben Bundesland wie  $s_2$ , so liegt natürlich auch  $s_2$  im selben Bundesland wie  $s_1$ , also ist  $R_7$  symmetrisch. Liegt schließlich  $s_1$  im selben Bundesland wie  $s_2$  und  $s_2$  im selben Bundesland wie  $s_3$ , so liegt natürlich auch  $s_1$  im selben Bundesland wie  $s_3$ ; also ist  $R_8$  auch transitiv.

e) Die Relation  $R_9$  ist nicht reflexiv, denn  $(3,3)$  ist nicht enthalten. Sie ist auch nicht symmetrisch, denn beispielsweise ist  $(1,2) \in R_9$ , aber nicht  $(2,1)$  (auch andere Gegenbeispiele sind möglich). Sie ist aber transitiv, denn es gibt kein Elementepaar der Form  $(x,y)$  und  $(y,z)$ , das man testen müsste.

#### Lösung von Aufgabe 1.16:

a) Wenn die Differenz einer Zahl  $x$  mit der Zahl 1 gerade sein soll, dann muss  $x$  eine ungerade Zahl sein. Daher ist die Äquivalenzklasse  $[1]$  gerade die Menge der ungeraden Zahlen. Analog begründet man, dass die Klasse  $[2]$  die Menge der geraden Zahlen ist.

Da es keine Zahl gibt, die gleichzeitig gerade und ungerade ist, gilt

$$[1] \cap [2] = \emptyset.$$

Die Äquivalenzklasse  $[-12]$  ist ebenfalls die Menge der geraden Zahlen, also identisch mit  $[2]$ . Somit ist

$$[-12] \cap [2] = [2].$$

b)  $R$  ist reflexiv, denn  $(m,m), (a,a), (t,t)$  und  $(h,h)$  sind Elemente von  $R$ .  $R$  ist symmetrisch, denn mit  $(a,m)$  liegt auch  $(m,a)$  in  $R$ , und mit  $(h,t)$  liegt auch  $(t,h)$  in  $R$ . Für den Beweis der Transitivität muss man folgende Dinge überprüfen:  $(a,m)$  und  $(m,a) \in R$ , also muss  $(a,a) \in R$  sein;  $(m,a)$  und  $(a,m) \in R$ , also muss  $(m,m) \in R$  sein;  $(h,t)$  und  $(t,h) \in R$ , also muss  $(h,h) \in R$  sein;  $(t,h)$  und  $(h,t) \in R$ , also muss  $(t,t) \in R$  sein. All dies ist erfüllt, also ist  $R$  transitiv. Weiterhin ist

$$[m] = \{m, a\} \quad \text{und} \quad [t] = \{t, h\}.$$

#### Lösung von Aufgabe 1.17:

a) Induktionsanfang: Für  $n = 1$  besteht die linke Seite nur aus dem ersten Summanden und hat somit den Wert 2. Die rechte Seite lautet  $1 \cdot 2 = 2$ . Somit stimmen linke Seite und rechte Seite überein, und der Induktionsanfang ist fertig.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2) \quad (6)$$

ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1).$$

Setzt man dies in die linke Seite von (6) ein, ergibt sich

$$n(n+1) + 2(n+1),$$

also, durch Ausklammern von  $(n+1)$ :

$$(n+2)(n+1).$$

Das ist genau die rechte Seite von (6), somit ist der Induktionsschluss vollzogen.

b) Induktionsanfang: Für  $n = 1$  ist  $1^2 = \frac{1 \cdot (4-1)}{3} = 1$ .

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass

$$\frac{n(4n^2 - 1)}{3} + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(4(n + 1)^2 - 1)}{3}$$

gilt. Bringt man beide Seiten auf den Nenner 3, so lautet die Gleichung der Zähler:

$$n(4n^2 - 1) + 3(2n + 1)^2 = (n + 1)(4(n + 1)^2 - 1).$$

Multipliziert man diese Terme aus, erhält man auf beiden Seiten:

$$4n^3 + 12n^2 + 11n + 3.$$

Damit ist der Induktionsschluss vollzogen.

c) Induktionsanfang: Für  $n = 2$  ist  $8 + 1 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ .

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass

$$(n + 1)(2n + 1) - 6 + (4n + 5) = (n + 2)(2n + 3) - 6.$$

Auch hier empfiehlt es sich, beide Seiten auszumultiplizieren. Man erhält jeweils:

$$2n^2 + 7n.$$

**Lösung von Aufgabe 1.18:** Zu beweisen ist, dass die explizite Darstellung

$$a_n = 8 \cdot 3^{n-1} + 3$$

gilt. Induktionsanfang: Für  $n = 1$  ist  $a_1 = 8 \cdot 1 + 3 = 11$  in Übereinstimmung mit Formel (1.34) des Buchs.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist nun, dass gilt:

$$a_{n+1} = 8 \cdot 3^n + 3.$$

Dies zeigt man mithilfe der Rekursionsformel wie folgt:

$$a_{n+1} = 3a_n - 6 = 3 \cdot (8 \cdot 3^{n-1} + 3) - 6 = 8 \cdot 3^n + 3.$$

**Lösung von Aufgabe 1.19:**

a) Es ist  $g_1 = 1$ , da der Gastgeber mit dem ersten Gast ein Glas geleert hat. Für  $n = 2, 3, 4, \dots$  gilt:

$$g_n = g_{n-1} + n.$$

b) Im Induktionsschluss ist zu zeigen:

$$g_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Das geht so:

$$g_{n+1} = g_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 1.20:

a) Induktionsanfang: Der Induktionsanfang ist hier für  $n = 3$  zu machen; es ergibt sich  $8 > 7$ , was sicherlich richtig ist.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist:  $2^{n+1} > 2n + 3$ .

Das geht beispielsweise so:

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > (2n+1) + (2n+1) = 4n+2 = 3n + (n+2) > 2n+3,$$

da  $3n > 2n$  und  $n \geq 1$  ist.

b) Induktionsanfang: Es ist  $3 \cdot \sqrt{3} = 5,196 > 4,732 = 3 + \sqrt{3}$ .

Induktionsschluss: Zu zeigen ist:  $(n+1) \cdot \sqrt{n+1} > (n+1) + \sqrt{n+1}$ .

Das geht beispielsweise so:

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + 1 \cdot \sqrt{n+1} \\ &> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n+1 + \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

## Kapitel 2

### Lösung von Aufgabe 2.1:

- a) Dies ist ein lineares Gleichungssystem, denn die Terme  $\sin(\pi)$ ,  $e^2$  und  $\ln(3)$  sind konstante Koeffizienten.
- b) Wegen des Terms  $\sin(x)$  ist dies kein lineares Gleichungssystem.
- c) Auch dies ist keines, da  $y^2$  auftritt.

**Lösung von Aufgabe 2.2:** Jeweils eine Lösungsmöglichkeit lautet wie folgt; wenn Ihre Lösung Zeilen enthält, die Vielfache der hier genannten sind, ist das auch richtig.

- a) Auszugehen ist von dem System

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\2x + y + z &= 3 \\2y - z &= -4\end{aligned}$$

Addiert man das  $(-2)$ -Fache der ersten Zeile auf die zweite, ergibt sich

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\3y + z &= -1 \\2y - z &= -4\end{aligned}$$

Nun kann man beispielsweise die zweite Zeile mit  $-2$  und die dritte mit  $3$  multiplizieren und beide addieren. Das ergibt:

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\3y + z &= -1 \\-5z &= -10\end{aligned}$$

- b) Zieht man hier das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten ab, erhält man sofort:

$$\begin{aligned}2x - y &= 2 \\0 &= 2\end{aligned}$$

- c) Hier addiert man am besten zunächst das Doppelte der ersten auf die zweite und das Dreifache der ersten auf die dritte Zeile; das ergibt:

$$\begin{aligned}-x + 2y - 5z &= 0 \\3y - 6z &= 0 \\8y - 16z &= 0\end{aligned}$$

Addiert man nun das  $(-8/3)$ -Fache der zweiten Zeile auf die dritte erhält man das Ergebnis:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 5z &= 0 \\ 3y - 6z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

d) Gegeben ist hier das System

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Ich subtrahiere zunächst das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und das Dreifache der ersten Zeile von der dritten, danach addiere ich das Doppelte der ersten Zeile auf die dritte; das ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_2 \quad \quad + 3x_4 &= 7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nun subtrahiere ich die zweite von der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_2 \quad \quad + 3x_4 &= 7 \\ -x_3 - x_4 &= -4 \\ -2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Damit es schöner aussieht, multipliziere ich nun die dritte Zeile mit  $-1$  durch (das ist nicht zwingend nötig) und addiere anschließend ihr Doppeltes auf die vierte Zeile; das liefert die gewünschte Dreiecksform:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_2 \quad \quad + 3x_4 &= 7 \\ x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 2.3:** Auszugehen ist in jedem Fall von der in Aufgabe 2.2 ermittelten Dreiecksform.

- a) Die Lösung ist eindeutig. Die letzte Zeile des Dreieckssystems ergibt sofort  $z = 2$ . Setzt man das in die vorletzte Zeile ein, ergibt sich  $3y + 2 = -1$ , also  $y = -1$ . Dies wiederum in die erste Zeile eingesetzt ergibt  $x = 1$ .
- b) Wegen der Zeile  $0 = 2$  ist dieses System unlösbar.
- c) Es gibt unendlich viele Lösungen, mit  $z = t$  ergibt sich aus der vorletzten Zeile  $y = 2t$ . Setzt man dies in die erste Zeile ein erhält man  $-x + 2 \cdot 2t - 5t = 0$ , also  $x = -t$ .
- d) Die Lösung ist eindeutig, sie lautet  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 3$ , wie man durch Auflösung des Dreieckssystems von unten nach oben ermitteln kann.

**Lösung von Aufgabe 2.4:** Bezeichnet man den Verdienst durch eine Herzoperation mit  $h$ , den für ein künstliches Kniegelenk mit  $k$  und den für eine Gallenblasenentfernung mit  $g$ , so liefern die im Text gemachten Angaben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2h + k + g &= 47\,000 \\ h + k &= 24\,000 \\ 5h + 2g &= 106\,000 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung  $h = 20\,000$ ,  $k = 4000$  und  $g = 3000$ . Der Verdienst für eine Herzoperation war also 20 000 DM, der für ein künstliches Kniegelenk 4000 DM, und der für eine Gallenblasenentfernung 3000 DM.

**Lösung von Aufgabe 2.5:**

- a) Die im Text gemachten Angaben führen auf das System

$$\begin{aligned} s + v + a &= 200 \\ 2s - 3v &= 0 \\ 5v + 2a &= 400. \end{aligned}$$

Überführt man es in Dreiecksform, erhält man

$$\begin{aligned} s + v + a &= 200 \\ 5v + 2a &= 400 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Das System hat also keine eindeutig Lösung.

- b) Nun ist  $s = 90$ , die ersten beiden Zeilen des in Teil a) ermittelten Dreieckssystems lauten nun also:

$$\begin{aligned} v + a &= 110 \\ 5v + 2a &= 400 \end{aligned}$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung  $v = 60$ ,  $a = 50$ . V besitzt also 60 Millionen, A 50 Millionen.

**Lösung von Aufgabe 2.6:** Der Ansatz

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + a_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ -a_1 &+ 2a_3 = 0 \end{aligned}$$

Es hat die eindeutige Lösung  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . Somit kann man den Nullvektor nur dann als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren darstellen, wenn man  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  setzt.

**Lösung von Aufgabe 2.7:** Sind die Vektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  gemäß Definition 2.6 linear abhängig, so gibt es eine Linearkombination

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad (7)$$

in der mindestens ein Koeffizient  $a_i$  ungleich 0 ist. Dann kann man durch diesen dividieren und die Darstellung (7) wie folgt nach  $\mathbf{x}_i$  auflösen:

$$\mathbf{x}_i = b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} + b_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} + \dots + b_k \mathbf{x}_k \quad (8)$$

mit  $b_j = -a_j/a_i$  für alle  $j$ .

Gibt es umgekehrt eine Darstellung der Form (8), so kann man diese wie folgt umformen:

$$b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i + b_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} + \dots + b_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Da hier der Koeffizient von  $\mathbf{x}_i$  nicht 0 ist, ist dies eine Darstellung wie in Definition 2.6 gefordert.

**Lösung von Aufgabe 2.8:**

a) Für kein  $b \in \mathbb{R}$ : Der Ansatz

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

führt in der ersten Zeile auf die Bedingung  $a_1 + a_2 = 0$ , in der dritten Zeile auf  $-a_1 + a_2 = 0$ . Dies impliziert  $a_1 = a_2 = 0$ , die Vektoren sind also immer linear unabhängig.

b) Für  $b = 0$  wird  $\mathbf{x}_3$  zum Nullvektor, daher sind in diesem Fall die drei Vektoren linear abhängig. Ist  $b \neq 0$ , so folgt zunächst wie in Teil a), dass  $a_1 = a_2 = 0$  ist. Also muss  $a_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$  sein, und da  $b \neq 0$  ist, folgt  $a_3 = 0$ .

c) Für alle  $b \in \mathbb{R}$ , denn vier dreidimensionale Vektoren sind immer linear abhängig.

## Lösung von Aufgabe 2.9:

- a) Das ist richtig.  
 b) Das ist nicht richtig, beispielsweise kann man als dritten Vektor einen der beiden vorhandenen hinzunehmen.  
 c) Das ist nicht richtig, denn wenn  $n = 2$  ist, sind mehr als zwei Vektoren immer linear abhängig.

## Lösung von Aufgabe 2.10:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt  $B \cdot A$  ist nicht definiert.

## Lösung von Aufgabe 2.11: Es ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & -6 & 8 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

also

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Wegen

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist dies auch das Ergebnis der Rechnung  $A \cdot (B + C)$ .

**Lösung von Aufgabe 2.12:** Mit derselben Vorgehensweise wie in Beispiel 2.18 berechnet man:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung von Aufgabe 2.13:** Zur Berechnung von  $A^{-1}$  schreibe ich zunächst die Matrix  $A$  in ein gemeinsames Schema mit der Einheitsmatrix:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Nun addiere ich das Doppelte der ersten Zeile auf die zweite und das  $(-1)$ -Fache der ersten Zeile auf die dritte. Das ergibt:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Nun ziehe ich das Doppelte der letzten Zeile von der zweiten ab und tausche danach beide Zeilen. Dadurch erhalte ich:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 1 & -2 \end{array}$$

Nun muss man nur noch die erste Zeile mit  $-1$  multiplizieren und anschließend die zweite Zeile auf die erste addieren. Das Ergebnis ist

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 1 & -2 \end{array}$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Auf dieselbe Weise ermittelt man

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $C$  ist nicht invertierbar, denn bei Anwendung des Verfahrens entsteht eine Nullzeile.

**Lösung von Aufgabe 2.14:** Das Produkt der beiden oben bestimmten Inversen lautet:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{16}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man die Matrix

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

invertiert.

Lösung von Aufgabe 2.15: Es ist

$$\det(A) = 1 \cdot (9 \cdot 7 - 26 \cdot 13) - (-1) \cdot (4 \cdot 7 - 26 \cdot 17) = -689,$$

$$\det(B) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0$$

und

$$\det(C) = 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 17 \\ -1 & 9 & 13 \\ 0 & 26 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 17 \\ 0 & 26 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \cdot (-689) - 2 \cdot (-2931) = 2417.$$

Lösung von Aufgabe 2.16: Es ergibt sich jedesmal der Wert 4.

Lösung von Aufgabe 2.17: Man sollte nach der dritten Spalte entwickeln, da hier drei Nullen enthalten sind; die Determinante der Matrix lautet  $-15$ .

Lösung von Aufgabe 2.18: Es ist  $\det(A) = \det(B) = -1$ , also

$$\det(A) \cdot \det(B) = 1.$$

Andererseits ist  $A \cdot B = I_3$ , also auch  $\det(A \cdot B) = 1$ .

Lösung von Aufgabe 2.19:

- a) Da hier  $H_2 = 0$  ist, ist die Matrix weder positiv noch negativ definit.  
 b) Für die Matrix  $-B$  gilt:  $H_1 = 3$ ,  $H_2 = 3$  und  $H_3 = 3$ . Somit ist  $-B$  positiv definit und daher  $B$  negativ definit.

Lösung von Aufgabe 2.20: Da  $B$  als invertierbar vorausgesetzt wurde, ist  $\det(B) \neq 0$ , daher kann man durch  $\det(B)$  dividieren. Es folgt:

$$\det(B \cdot A \cdot B^{-1}) = \det(B) \cdot \det(A) \cdot \det(B^{-1}) = \det(B) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} = \det(A).$$

Lösung von Aufgabe 2.21: Die Determinante der aus den drei Vektoren gebildeten Matrix  $A$ , also

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & b \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

lautet  $\det(A) = b^2 - 1$ , die Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, wenn  $b$  ungleich  $\pm 1$  ist.

Lösung von Aufgabe 2.22:

a) Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0,$$

das System ist also eindeutig lösbar. Die Lösung lautet

$$x = \frac{1}{5} \cdot \det \begin{pmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 180 & 3 & 2 \\ 95 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 29,$$

$$y = \frac{1}{5} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 0 & 180 & 2 \\ 1 & 95 & 2 \end{pmatrix} = 38$$

und

$$z = \frac{1}{5} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 0 & 3 & 180 \\ 1 & 0 & 95 \end{pmatrix} = 33.$$

b) Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist 0, das System hat keine eindeutige Lösung.

## Kapitel 3

Lösung von Aufgabe 3.1: Es ist

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0.$$

Somit stehen nur  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  senkrecht aufeinander.

Lösung von Aufgabe 3.2: Hier ist  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$  und  $|\mathbf{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ .  
Somit ist

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{5}, \quad \text{also } \alpha = 53,13^\circ.$$

Lösung von Aufgabe 3.3: Man erhält:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3.4:

a) Die Geradengleichung lautet

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt  $Q_1$  liegt auf der Geraden (für den Parameterwert  $t = -2$ ), der Punkt  $Q_2$  nicht, denn die erste Zeile der hierfür notwendigen Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert  $t = 1$ ; für diesen Wert ist zwar noch die zweite Zeilengleichung erfüllt, nicht aber die dritte.

## Lösung von Aufgabe 3.5:

a) Die Ebenengleichung lautet

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Da der Punkt  $Q_1$  auf der Geraden durch  $P_1$  und  $P_2$  liegt, liegt er auch in jeder Ebene, die diese beiden Punkte enthält. Er muss also bei der Aufstellung der Ebenengleichung nicht berücksichtigt werden. Der Punkt  $Q_2$  wiederum liegt nicht auf dieser Geraden, somit definieren die drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $Q_2$  eine eindeutige Ebene. Die Gleichung dieser Ebene lautet:

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3.6: Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren, also der Normalenvektor der Ebene, lautet

$$n = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

somit hat die parameterfreie Ebenengleichung die Form  $4x - 2y + 2z = D$ .

Einsetzen des Ebenenpunktes  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ergibt  $D = 6$ , somit lautet die gesuchte

Ebenengleichung:

$$E : 4x - 2y + 2z = 6,$$

oder, durch 2 dividiert:

$$E : 2x - y + z = 3.$$

## Lösung von Aufgabe 3.7:

a) Zu lösen ist hier das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es hat die Lösung  $t = 1$  und  $s = 2$ . Setzt man diese Werte in die jeweilige Geradengleichung ein, ergibt sich beide Male der Schnittpunkt  $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

b) Man muss hier den Winkel  $\alpha$  berechnen, den die beiden Richtungsvektoren einschließen. Es ergibt sich

$$\cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}} = 0,9439,$$

also  $\alpha \approx 19,3^\circ$ .

c) Am besten ermittelt man zunächst die Parameterform der Ebene, indem man den in a) ermittelten Schnittpunkt als Aufpunkt und die Richtungsvektoren der beiden Geraden als Richtungsvektoren der Ebene verwendet. Es ergibt sich folgende Ebenengleichung:

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ermittelt man die gesuchte parameterfreie Ebenengleichung, sie lautet:

$$E : x - y - 2z = 1.$$

**Lösung von Aufgabe 3.8:** Die Gleichung der Geraden  $g$  durch  $P_1$  und  $P_2$  lautet

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

die Gleichung der Ebene  $E$ , die durch die Punkte  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  bestimmt ist, lautet

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Gleichsetzen von (9) und (10) liefert den Schnittpunkt

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3.9: Der Schnittpunkt lautet

$$S = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{a} \\ -1 \\ -1 - \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3.10:

a) Einsetzen der drei Komponenten der Geradengleichung in die Ebenengleichung ergibt:

$$2(1+t) - 1 + (1+t \cdot \lambda) = 1,$$

also

$$(2 + \lambda) \cdot t = -1. \quad (11)$$

Für  $\lambda = -2$  hat diese Gleichung keine Lösung, also existiert kein Schnittpunkt, die Gerade ist somit parallel zur Ebene.

b) Aus (11) ergibt sich  $t = -\frac{1}{2}$ , der Schnittpunkt ist also  $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Lösung von Aufgabe 3.11: a) Da die Gerade senkrecht auf der Ebene stehen soll, ist der Normalenvektor der Ebene, also

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ein geeigneter Richtungsvektor der Geraden. Die Geradengleichung lautet somit

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Einsetzen der Geradengleichung aus Teil a) in die Ebenengleichung liefert den Parameterwert  $t = -1$ , der Schnittpunkt ist also

$$S = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3.12: Die Schnittgerade hat die Gleichung

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die für Teil b) und c) benötigten parameterfreien Darstellungen der Ebenen lauten

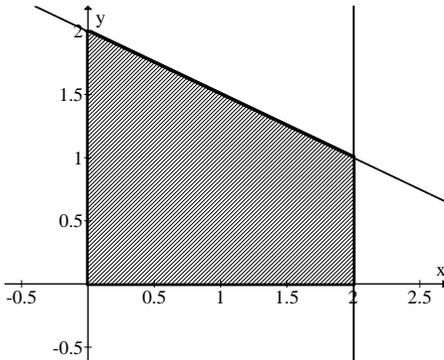
$$E_1 : x + y + z = 0$$

und

$$E_2 : 2x - y + z = 3.$$

## Kapitel 4

**Lösung von Aufgabe 4.1:** Der zulässige Bereich dieses Problems ist in Abbildung 1 gezeichnet.



**Abb. 1:** Der zulässige Bereich in Aufgabe 4.1.

Man zeichnet die Zielfunktion  $x + y = c$  für verschiedene Werte von  $c$  ein. Sie verlässt den zulässigen Bereich im Schnittpunkt der beiden Randgeraden  $x = 2$  und  $x + 2y = 4$ , also  $x = 2$  und  $y = 1$ . Der maximale Wert der Zielfunktion ist somit

$$Z(2,1) = 3.$$

**Lösung von Aufgabe 4.2:** Zunächst gibt es drei Variablen, nämlich die Anzahl der Schwarzbunten ( $x$ ), die der Rotkarierten ( $y$ ) und die der lila Kühe ( $z$ ). Da der Landwirt genau 200 Kühe anschaffen will, kann man aber eine der Variablen eliminieren, beispielsweise  $z$ : Es gilt  $z = 200 - x - y$ . Die Zielfunktion lautet zunächst  $Z = 20x + 20y + 10z$ , ersetzt man hier  $z$  durch  $200 - x - y$ , so erhält man die Zielfunktion in den beiden Variablen  $x$  und  $y$ :

$$Z(x, y) = 10x + 10y + 2000.$$

Die Nebenbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} x &\leq 120, \\ y &\leq 120, \\ x + y &\geq 80, \\ x + y &\leq 200. \end{aligned}$$

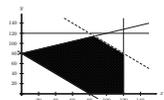
Außerdem gilt

$$100x + 1500y + 500z \leq 180\,000,$$

Hier kann man durch 100 dividieren und wiederum  $z$  durch  $200 - x - y$  ersetzen, was auf die endgültige Restriktion

$$-4x + 10y \leq 800$$

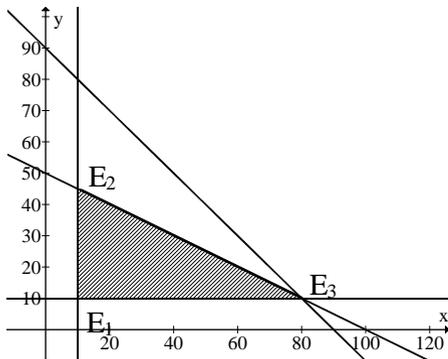
führt. In Abbildung 2 sehen Sie den zulässigen Bereich und die optimale Lage der Zielfunktion. Diese ist offenbar parallel zur Randgeraden  $x + y = 200$ . Der Landwirt hat also eine ganze Fülle von Möglichkeiten. Beispielsweise kann er den Schnittpunkt der Geraden  $x + y = 200$  mit der Geraden  $x = 120$ , also den Punkt  $(x, y) = (120, 80)$  wählen.



**Abb. 2:** Zu Aufgabe 4.2.

Der Landwirt wird also in diesem Fall 120 Schwarzbunte und 80 Rotkarierte anschaffen, der optimale Erlös ist dann  $Z(120, 80) = 4000$ .

**Lösung von Aufgabe 4.3:** In Abbildung 3 ist der zulässige Bereich mit den drei Eckpunkten  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  eingezeichnet.



**Abb. 3:** Der zulässige Bereich in Aufgabe 4.3.

Die aktiven Randgeraden lauten:

$$g_1 : x = 10$$

$$g_2 : y = 10$$

$$g_3 : x + 2y = 100$$

Der zulässige Bereich hat hier nur drei Eckpunkte. Die folgende Tabelle zeigt die Koordinaten dieser Eckpunkte und die resultierenden Werte der Zielfunktion.

Eckpunkt	Schnittgeraden	Koordinaten	Wert der Zielfunktion
$E_1$	$g_1 \cap g_2$	(10,10)	130
$E_2$	$g_1 \cap g_3$	(10,45)	165
$E_3$	$g_2 \cap g_3$	(80,10)	270

Das Optimum wird im Punkt (80,10) angenommen, der optimale Wert der Zielfunktion ist  $Z(80,10) = 270$ .

**Lösung von Aufgabe 4.4:** Die erste Simplex-Tabelle lautet:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
3	6	1	0	42
5	4	0	1	58
<b>-40</b>	<b>-60</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Da  $-60$  kleiner ist als  $-40$ , ist die zweite Spalte die Pivotspalte. Zur Ermittlung der Pivotzeile bilde ich die Quotienten  $42/5 = 7$  und  $58/4 = 14,5$ . Da 7 sicherlich kleiner ist als 14,5, ist die erste Zeile die Pivotzeile und 6 das Pivotelement.

Jetzt normiere ich die erste Zeile, indem ich alle Einträge durch 6 teile, und erhalte:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
$1/2$	1	$1/6$	0	7
5	4	0	1	58
<b>-40</b>	<b>-60</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Nun wende ich den Gauß-Algorithmus an, um die Elemente in der zweiten und der dritten Zeile der Pivotspalte zu vernutzen. Hierzu addiere ich das  $(-4)$ -fache der ersten Zeile auf die zweite und das  $60$ -fache der ersten Zeile auf die dritte Zeile. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
$1/2$	1	$1/6$	0	7
3	0	$-2/3$	1	30
<b>-10</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>420</b>

Da hier nur noch ein einziges Element der Zielfunktionszeile negativ ist, fällt die Wahl der Pivotspalte nicht schwer: ich entscheide mich für die erste. Die relevanten Quotienten in den ersten beiden Zeilen lauten  $30/3 = 10$  und  $7/(1/2) = 14$ . Somit ist die zweite Zeile die Pivotzeile, und ich normiere sie, indem ich alle Einträge durch 3 dividiere. Die Tabelle sieht dann so aus:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
$1/2$	1	$1/6$	0	7
1	0	$-2/9$	$1/3$	10
<b>-10</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>420</b>

Nun wende ich wiederum den Gauß-Algorithmus an und erhalte folgendes Bild:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
0	1	$5/18$	$-1/6$	2
1	0	$-2/9$	$1/3$	10
<b>0</b>	<b>0</b>	<b><math>70/9</math></b>	<b><math>10/3</math></b>	<b>520</b>

Damit ist der Simplex-Algorithmus beendet, denn in der Zielfunktionszeile sind nur noch nicht negative Einträge vorhanden. Der gesuchte maximale Wert der Zielfunktion lautet 520, die zugehörigen optimalen Werte der Variablen  $x$  und  $y$  sind  $x = 10$  und  $y = 2$ .

**Lösung von Aufgabe 4.5:** Nach Einführung von Schlupfvariablen lautet das Problem: Man maximiere die Zielfunktion

$$Z(x, y) = 3x + 2y$$

unter den Nebenbedingungen

$$2x + y + u_1 = 22,$$

$$x + 2y + u_2 = 23.$$

Die zugehörige Simplex-Tabelle ist:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
2	1	1	0	22
1	2	0	1	23
<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Nach Anwendung des Simplex-Algorithmus erhält man folgende Tabelle:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
1	0	$2/3$	$-1/3$	7
0	1	$-1/3$	$2/3$	8
<b>0</b>	<b>0</b>	<b><math>4/3</math></b>	<b><math>1/3</math></b>	<b>37</b>

Der maximale Gewinn ist rechts unten abzulesen, er beträgt 37 Euro pro Tag, die zugehörige Wahl der Produktionskapazitäten ist  $x = 7$  und  $y = 8$ . Der Betrieb sollte also pro Tag sieben Einheiten von Produkt 1 und acht Einheiten von Produkt 2 produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren.

**Lösung von Aufgabe 4.6:** Die erste Simplex-Tabelle sieht hier wie folgt aus:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
-1	1	1	0	0
1	1	0	1	150
<b>-15</b>	<b>-25</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Die erste Zeile entstammt der Nebenbedingung  $y \leq x$ . Hier muss man zunächst auf beiden Seiten  $x$  subtrahieren, was auf die Nebenbedingung in Normalform  $-x + y \leq 0$  führt. Nun wandelt man diese Nebenbedingung durch Einführung einer Schlupfvariablen  $u_1$  in eine Gleichung um, dies ergibt  $-x + y + u_1 = 0$ .

Anwendung des Simplex-Algorithmus ergibt die folgende Endtabelle:

$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	
0	1	$1/2$	$1/2$	75
1	0	$-1/2$	$1/2$	75
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>20</b>	<b>3000</b>

Somit haben wir das grafisch ermittelte Ergebnis bestätigt, dass die Wahl  $x = y = 75$  optimal ist und den maximalen Gewinn  $Z = 3000$  liefert.

Lösung von Aufgabe 4.7: Nach Einführung von zwei Schlupfvariablen lauten die Nebenbedingungen wie folgt:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + u_1 = 4$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + u_2 = 14$$

Anwendung des Simplex-Algorithmus liefert die folgende Endtabelle:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	
1	$-1/3$	0	$-2/3$	$1/3$	2
0	$5/3$	1	$4/3$	$-1/6$	3
<b>0</b>	<b><math>2/3</math></b>	<b>0</b>	<b><math>10/3</math></b>	<b><math>1/3</math></b>	<b>18</b>

Da der Koeffizient von  $x_2$  in der Zielfunktionszeile positiv ist, ist diese Variable gleich 0 zu setzen. Für die anderen beiden Variablen liest man die folgenden optimalen Werte ab:  $x_1 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Der optimale Wert der Zielfunktion ist  $Z(2,0,3) = 18$ .

## Kapitel 5

### Lösung von Aufgabe 5.1:

a) Die Folge  $\{a_n\}$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt, denn für gerade Werte von  $n$  gehen die Folgenglieder gegen  $+\infty$ , für ungerade gegen  $-\infty$ . Die Folge  $\{b_n\}$  ist nach oben beschränkt (z.B. durch 0), denn alle Folgeelemente sind negativ; nach unten ist sie unbeschränkt. Die Folge  $\{c_n\}$  ist nach oben durch 1 und nach unten durch 0 beschränkt, also insgesamt beschränkt. Dies sieht man am besten, indem man die Folgeelemente umschreibt zu

$$c_n = \frac{1}{n^n}.$$

b) Eine Umformung ergibt

$$a_n = \frac{n-1}{2n^2+2n}. \quad (12)$$

Es ist  $a_1 = 0$  und  $a_n > 0$  für  $n \geq 2$ , die Folge ist somit durch 0 nach unten beschränkt. Da der Zähler immer kleiner ist als der Nenner, ist sie nach oben durch 1 beschränkt, also insgesamt beschränkt.

c) Man kann die Folgenglieder umformen zu

$$a_n = \left(\frac{32}{25}\right)^n.$$

Die Folge ist nach unten durch 0 beschränkt, nach oben unbeschränkt.

### Lösung von Aufgabe 5.2:

a)  $\{a_n\}$  ist nicht monoton, denn die Folgenglieder sind abwechselnd positiv und negativ,  $\{b_n\}$  und  $\{c_n\}$  sind streng monoton fallend.

b) Die Folge ist nicht monoton. Beispielsweise ist

$$a_1 = 0 < a_2 = \frac{1}{12},$$

also kann die Folge nicht monoton fallend sein, und es ist

$$a_3 = \frac{1}{12} > a_4 = \frac{3}{40},$$

also kann sie auch nicht monoton steigend sein.

c) Die in der Lösung von 5.1 c) angegebene Umschreibung zeigt, dass diese Folge streng monoton steigend ist.

**Lösung von Aufgabe 5.3:** Zu unterscheiden sind die drei Fälle  $k > m$ ,  $k = m$  und  $k < m$ .

Ist  $k > m$ , so ist also  $k - m$  positiv. Kürzt man den angegebenen Bruch durch  $n^m$ , so erhält man

$$a_n = \frac{cn^{k-m} - 1/n^m}{d + 2/n^m}.$$

Da  $k - m$  positiv ist, wächst der Zähler über alle Grenzen, und die Folge konvergiert nicht. Ist  $k = m$ , so kürzt man durch  $n^m = n^k$  und erhält

$$a_n = \frac{c - 1/n^m}{d + 2/n^m}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht jeweils der zweite Summand in Zähler und Nenner gegen null und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{c}{d}.$$

Kürzen durch  $n^k$  liefert im Fall  $k < m$ :

$$a_n = \frac{c - 1/n^k}{dn^{m-k} + 2/n^k}.$$

Nun wächst der Nenner über alle Grenzen, und somit konvergiert die Folge gegen 0.

#### Lösung von Aufgabe 5.4:

- Die Folge ist die Differenz zweier Nullfolgen und konvergiert daher gegen 0.
- Die Folge konvergiert gegen 3, denn die höchste Potenz von  $n$  ist in Zähler und Nenner gleich, nämlich 4.
- Die Folge konvergiert nicht, die Folgeelemente werden beliebig groß.
- Die Folge konvergiert gegen 0. Das zu zeigen ist ein wenig tricky: Multipliziert man das allgemeine Folgenglied  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  mit  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ , so ergibt sich mithilfe der binomischen Formel:

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = (n+1) - n = 1. \quad (13)$$

Dividiert man nun wiederum den ersten und letzten Term in (13) durch  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ , erhält man:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Nach Teil c) dieser Aufgabe geht die rechte Seite gegen null, somit also auch die linke, also die gegebene Folge.

Lösung von Aufgabe 5.5: Ein Beispiel ist die durch

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

definierte Folge  $\{a_n\}$ . Sie konvergiert (gegen 0), ist aber weder monoton steigend noch monoton fallend.

#### Lösung von Aufgabe 5.6:

- $f_1$  ist eine Funktion, die Bildmenge ist  $\mathbb{R}$ .
- $f_2$  ist keine Funktion, da negativen Zahlen kein Funktionswert zugeordnet werden kann.

- c)  $f_3$  ist keine Funktion, denn die Zuordnungsvorschrift ist nicht eindeutig.  
 d)  $f_4$  ist eine Funktion, die Bildmenge ist  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lösung von Aufgabe 5.7:** Da der Radikand nicht negativ sein darf, müssen der Zähler  $x$  und der Nenner  $1 - x$  dasselbe Vorzeichen haben. Ist  $x \geq 0$ , so muss also  $1 - x \geq 0$  sein, und dies impliziert  $x \leq 1$ .  $x = 1$  scheidet hier auch noch aus, denn dann würde der Nenner des Radikanden gleich 0. Somit verbleibt  $0 \leq x < 1$ .

Wäre aber  $x < 0$ , so wäre  $1 - x > 1$ , also positiv, und der gesamte Bruch negativ. Dieser Fall scheidet also aus, und das Ergebnis ist  $0 \leq x < 1$ , also

$$D = [0,1).$$

**Lösung von Aufgabe 5.8:**

- a)  $f_1$  ist nicht surjektiv, denn die 2 tritt nicht als Funktionswert auf;  $f_1$  ist auch nicht injektiv, denn mehr als ein Element des Definitionsbereichs (sogar unendlich viele) werden auf denselben Wert 1 abgebildet.  
 b)  $f_2$  ist surjektiv: Um das zu zeigen, löse ich die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

für beliebiges  $y \in [0,1)$  nach  $x$  auf. Das liefert:

$$yx^2 + y = x^2,$$

also

$$yx^2 - x^2 = -y$$

oder

$$x^2(y - 1) = -y$$

und somit

$$x^2 = \frac{-y}{y - 1} = \frac{y}{1 - y}.$$

Da  $y$  dem Intervall  $[0,1)$  entstammt, ist der Nenner der rechten Seite nicht null, und der gesamte Ausdruck nicht negativ. Somit kann man die Wurzel ziehen, und daher existiert ein  $x$ , das auf  $y$  abgebildet wird.

$f_2$  ist aber nicht injektiv, beispielsweise ist  $f_2(-1) = f_2(1)$ .

- c)  $f_3$  ist surjektiv und injektiv, da sowohl der Definitions- als auch der Wertebereich nur nicht negative reelle Zahlen enthält.

**Lösung von Aufgabe 5.9:** Eine ungerade Zahl  $m$  hat die Form  $2k + 1$  mit einem  $k \in \mathbb{N}_0$ . Somit ist

$$x^m = x^{2k+1} = x^{2k} \cdot x.$$

Der Rest des Beweises verläuft analog Beispiel 5.9 c), hier ist

$$f(-x) = (-x)^m = (-x)^{2k} \cdot (-x) = x^{2k} \cdot (-x) = -x^m = -f(x).$$

### Lösung von Aufgabe 5.10:

a) Diese Aussage ist wahr. Sind  $f$  und  $g$  ungerade Funktionen, so gilt für ihre Summe:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f + g)(x).$$

b) Diese Aussage ist falsch, ein einfaches Gegenbeispiel ist  $f(x) = g(x) = x$ . Dies sind ungerade Funktionen, aber ihr Produkt  $f(x) \cdot g(x) = x^2$  ist eine gerade Funktion.

c) Das ist falsch, zahlreiche Beispiele von Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind, finden Sie im Buch.

d) Das ist falsch: Die Funktion  $f(x) = 0$  ist sowohl gerade, denn  $f(x) = 0 = f(-x)$ , sie ist aber auch ungerade, denn  $f(-x) = 0 = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### Lösung von Aufgabe 5.11:

a) Hier ist  $f(-x) = -2x - 2x^2$ , also

$$f_u(x) = \frac{2x - 2x^2 - (-2x - 2x^2)}{2} = \frac{2x + 2x}{2} = 2x$$

und

$$f_g(x) = \frac{2x - 2x^2 + (-2x - 2x^2)}{2} = \frac{-2x^2 + (-2x^2)}{2} = -2x^2.$$

b) Wegen  $\sin(-x) = -\sin(x)$  ist hier

$$f_u(x) = 4x^3 + 2\sin(x) \quad \text{und} \quad f_g(x) = 0.$$

### Lösung von Aufgabe 5.12: Es ist

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 + (x + 1) - 2 = x^2 + 3x.$$

**Lösung von Aufgabe 5.13:** Die beiden Funktionenpaare in Beispiel 5.10 sind umkehrbar; in Teil a) ergibt sich

$$(g \circ f)(y) = y^2 + 2\sqrt{y} + 1,$$

in Teil b)

$$(g \circ f)(y) = \sqrt{\frac{2y^2}{1 + y^2}}.$$

Bei den Funktionen in Übungsaufgabe 5.12 ist keine Umkehrung möglich, da  $g$  beispielsweise für  $f(0) = -2$  nicht definiert ist.

**Lösung von Aufgabe 5.14:** Der größtmögliche Definitionsbereich ist  $D = [1, \infty)$ , da der Radikand nicht negativ sein darf. Der maximale Wertevorrat ist dann die Bildmenge  $W = \mathbb{R}^+$ . Die Umkehrfunktion lautet  $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ .

**Lösung von Aufgabe 5.15:** a) Die Funktion  $f$  ist nicht streng monoton, denn beispielsweise ist

$$f(-1) = 2 > f(0) = 1 < f(1) = 2.$$

Daher ist sie auch nicht umkehrbar.

b) Die Funktion  $g$  ist streng monoton steigend, denn aus  $x_1 < x_2$  folgt immer  $x_1^3 < x_2^3$ . Die Umkehrfunktion lautet

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.16:**

a) Der linksseitige Funktionsterm kann umgeformt werden wie folgt:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x+5)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+5}{x-1}.$$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle  $\bar{x} = 2$  sind also gleich 7. Daher muss  $a^2 - 2 = 7$  sein, also  $a = 3$  oder  $a = -3$ .

b) Der linksseitige Funktionsterm kann umgeformt werden wie folgt:

$$\frac{2x^2 + 2x - 4}{x^3 - x^2} = \frac{2(x-1)(x+2)}{x^2(x-1)} = \frac{2(x+2)}{x^2}.$$

Daher ist der linksseitige Grenzwert an der Stelle  $\bar{x} = 1$  gleich 6. Dies ist auch der rechtsseitige Grenzwert und der Funktionswert, daher ist die Funktion stetig an der Stelle  $\bar{x} = 1$ .

c) Der linksseitige Grenzwert ist hier

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{(1-x)(x^2-9)}{6(x-3)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{(1-x)(x+3)}{6} = -2.$$

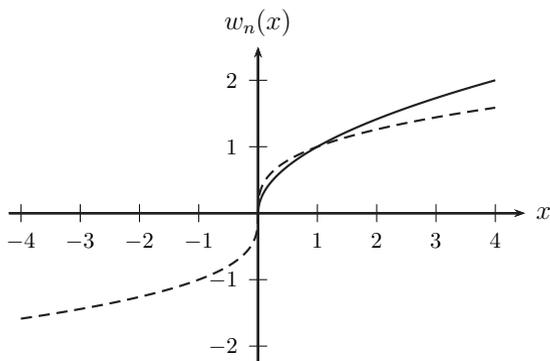
Damit der Funktionswert  $2 - a^2$  gleich diesem Wert ist, muss  $a = \pm 2$  sein. Nun ist noch zu prüfen, ob mit diesen Werten auch der rechtsseitige Grenzwert gleich  $-2$  ist. Der entsprechende Funktionsterm lautet  $16 + 9 - x^3$  und hat an der Stelle  $x = 3$  tatsächlich den Wert  $-2$ . Also ist die Funktion stetig.

**Lösung von Aufgabe 5.17:**

a) Für  $x = 0$  und  $x = 1$ .

b) Für  $x = -1$ ,  $x = 0$  und  $x = 1$ .

## Lösung von Aufgabe 5.18:



**Abb. 4:** Die Funktionen  $w_2(x)$  (schwarz) und  $w_3(x)$  (blau).

## Lösung von Aufgabe 5.19:

a) Da  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt und  $\cos^2(x)$  nicht negativ sein kann, ist  $\sin^2(x)$  nicht größer als 1, also  $\sin^2(x) \leq 1$ . Wegen  $|\sin(x)| = \sqrt{\sin^2(x)}$  gilt dies auch für den Betrag. Die Aussage über den Cosinus beweist man analog.

b) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ . Setzt man hier  $x = -\frac{\pi}{4}$  ergibt sich  $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ . Setzt man dies in die Gleichung  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  ein, folgt

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Division durch 2 und Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten ergibt die Behauptung.

**Lösung von Aufgabe 5.20:** Setzt man im ersten Additionstheorem  $x = y$ , ergibt sich

$$\sin(2x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Die Formel für  $\cos(2x)$  ergibt sich analog aus dem zweiten Additionstheorem, hier ist für  $x = y$ :

$$\cos(2x) = \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

**Lösung von Aufgabe 5.21:** Die gesuchten Werte kann man in folgender Tabelle ablesen:

a	$x = -2$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 10$
0,5	4	1	0,5	0,25	$\approx 0,00097$
1	1	1	1	1	1
2	0,25	1	2	4	1024
4	0,0625	1	4	16	1048576

**Lösung von Aufgabe 5.22:** Es ist  $e_1 = 2$ ,  $e_{12} = 2,61303$ ,  $e_{52} = 2,69259$ ,  $e_{365} = 2,71456$ ,  $e_{8760} = 2,71812$ .

**Lösung von Aufgabe 5.23:**  $\log_{10}(0,001)$  ist definitionsgemäß diejenige Zahl, mit der man 10 potenzieren muss, um 0,001 zu erhalten. Es folgt:

$$\log_{10}(0,001) = -3.$$

Analog erhält man:

$$\log_7(\sqrt[4]{7^3}) = \frac{3}{4}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.24:** Es ist

$$\log_3(7,5) = \frac{\ln(7,5)}{\ln(3)} = 1,83406.$$

## Kapitel 6

**Lösung von Aufgabe 6.1:** Der Differenzialquotient und seine Zerlegung lauten hier

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + ax + a^2 = 3a^2.$$

Die gesuchte Ableitung ist also  $f'(a) = 3a^2$ .

**Lösung von Aufgabe 6.2:**

a) Der linksseitige Grenzwert des Differenzialquotienten ist

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} 2x = 0,$$

der rechtsseitige lautet

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x = 0.$$

Da beide Werte übereinstimmen ist die Funktion differenzierbar, und es ist  $f'(0) = 0$ .

b) Der linksseitige Grenzwert des Differenzialquotienten ist

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{x \sin(x) + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \sin(x) = 0,$$

der rechtsseitige lautet

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x = 0.$$

Die Funktion ist differenzierbar, und es ist  $g'(0) = 0$ .

c) Die Funktion ist an der Stelle  $a = 0$  nicht stetig, denn der linksseitige Grenzwert der Funktion ist  $0 - 1 = -1$ , der Funktionswert und rechtsseitige Grenzwert aber  $(0 - 1)^2 = +1$ . Somit ist sie nach Satz 6.5 dort auch nicht differenzierbar.

d) Der linksseitige Grenzwert des Differenzialquotienten ist

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1,$$

der rechtsseitige lautet

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x - 0}{x - 0} = +1.$$

Die Funktion ist nicht differenzierbar in  $x = 0$ .

**Lösung von Aufgabe 6.3:** Es ist  $f'(x) = \cos(x)$ , also  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ .  
Damit ergibt sich:

$$t(x) = 1 \cdot x + (0 - 1 \cdot 0) = x.$$

**Lösung von Aufgabe 6.4:**

a) Es ist  $f'(x) = 2x$ , also  $f(1) = 1$  und  $f'(1) = 2$ . Damit ergibt sich:

$$t(x) = 2x + (1 - 2 \cdot 1) = 2x - 1.$$

b) Eine Schnittstelle  $x_S$  genügt der Gleichung

$$x_S^2 = 2x_S - 1, \quad \text{also} \quad x_S^2 - 2x_S + 1 = 0.$$

Diese hat nur die Lösung  $x_S = 1$ , somit gibt es keine weitere Schnittstelle.

**Lösung von Aufgabe 6.5:**

a) Nach der Produktregel ist

$$h_1'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

b) Um die Produktregel anzuwenden, schreibt man die Funktion zunächst um in die Form  $h_2(x) = e^x \cdot x^{-2}$ . Dann ergibt sich:

$$h_2'(x) = e^x \cdot (x^{-2} - 2x^{-3}).$$

c) Wegen  $h_3(x) = e^{2x} = (e^x)^2 = e^x \cdot e^x$  gilt

$$h_3'(x) = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^x \cdot e^x = 2e^{2x}.$$

**Lösung von Aufgabe 6.6:** Gemäß dem Hinweis wendet man zunächst die Produktregel auf  $(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)$  an; das ergibt

$$(f \cdot g \cdot h)'(x) = (f \cdot g)'(x) \cdot h(x) + (f \cdot g)(x) \cdot h'(x),$$

und nochmalige Anwendung der Produktregel, diesmal auf  $(f \cdot g)'(x)$ , liefert die zu beweisende Behauptung.

**Lösung von Aufgabe 6.7:**

a)

$$h_1'(x) = \frac{4x \cdot \sqrt{x} - (2x^2 + 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x^2 - x^2 - \frac{3}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 - \frac{3}{2}}{x\sqrt{x}}$$

b)

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot (\cos(x)e^x + \sin(x)e^x) + \sin^2(x)e^x}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{(\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x) + \sin^2(x))e^x}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 6.8: Es ist

a)

$$h_1'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

b)

$$h_2'(x) = \frac{\sin(x^2) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x) \cdot 2x \cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$$

c) Hier sind drei Funktionen verkettet; die Ableitung des inneren Funktionenpaares  $e^{\sin(x)}$  lautet  $\cos(x)e^{\sin(x)}$ , damit ist

$$h_3'(x) = \frac{\cos(x)e^{\sin(x)}}{2\sqrt{e^{\sin(x)}}}.$$

Lösung von Aufgabe 6.9: Diese Aufgabe bearbeitet man in völliger Analogie zu Beispiel 6.13, Teil a). Es ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{m}.$$

Lösung von Aufgabe 6.10: Hier ist

$$f(x) = 10^x = \exp_{10}(x)$$

zu setzen. Nach Satz 6.3 gilt

$$f'(x) = \ln(10) \cdot 10^x.$$

Dann folgt in Analogie zum Beweis von Satz 6.12:

$$\lg'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\ln(10) \cdot 10^a} = \frac{1}{\ln(10) \cdot 10^{\lg(b)}} = \frac{1}{b \cdot \ln(10)},$$

also

$$\lg'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Lösung von Aufgabe 6.11: Die Ableitungen lauten wie folgt:

a)

$$h_1'(x) = (1 + x \cdot \cos(x))e^{\sin(x)}$$

b)

$$h_2'(x) = \frac{2e^{2x}(1+x^2) - e^{2x}2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(1+x^2)^2}$$

c)

$$h_3'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = 0$$

**Lösung von Aufgabe 6.12:** Die Ableitung der gegebenen Funktion ist

$$f'(x) = 2x \cos(x^2) e^{\sin(x^2)}.$$

Daher ist  $f(\sqrt{\pi}) = 1$  und  $f'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$ . Damit lautet die gesuchte Tangentengleichung

$$t(x) = -2\sqrt{\pi}x + (1 + 2\pi).$$

**Lösung von Aufgabe 6.13:** Die Ableitung der Funktion  $f(x)$  lautet

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x)^4}.$$

Nun ist das Vorzeichen von  $f'(x)$  zu untersuchen. Der Nenner ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  positiv, macht also keine Sorgen. Der Zähler und somit der ganze Ausdruck ist genau dann positiv, wenn  $-1 < x < 1$  ist, er ist genau dann negativ, wenn  $x < -1$  oder  $x > 1$  ist.

Die Funktion ist somit streng monoton fallend für  $x < -1$  und  $x > 1$  sowie streng monoton steigend für  $-1 < x < 1$ .

**Lösung von Aufgabe 6.14:**

a) Die Ableitung lautet  $p'(x) = 2ax$ . Ist  $a$  ungleich 0, hat diese genau eine Nullstelle, die Funktion also höchstens ein Extremum. Ist  $a = 0$ , ist die Funktion konstant und hat unendlich viele Extremstellen.

b) Der einzige Kandidat ist  $x = 0$ , hier ist  $p(0) = b$ . Ist  $x$  verschieden von 0, so ist  $ax^2 > 0$  und somit  $p(x) > p(0)$ . Daher ist 0 Minimalstelle.

**Lösung von Aufgabe 6.15:** Die gesuchten Ableitungen lauten wie folgt:

a)

$$f_1'(x) = (3x^2 - x^3) \cdot e^{-x},$$

also

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= (6x - 3x^2) \cdot e^{-x} - (3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} \\ &= (x^3 - 6x^2 + 6x) \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

b)

$$f_2'(x) = 2x \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x^2}{3} \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right),$$

also

$$f_2''(x) = \left(2 - \frac{x^2}{9}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{4x}{3} \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

c)

$$f_3'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1,$$

also

$$f_3''(x) = \frac{1}{x}.$$

**Lösung von Aufgabe 6.16:** Es ist  $f'(x) = \cos(x)$ ,  $f''(x) = -\sin(x)$ ,  $f'''(x) = -\cos(x)$  und  $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ .

Die vierte Ableitung ist also wieder gleich der Funktion, und daher gilt

$$f^{(4k)}(x) = \sin(x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Daher ist auch  $f^{(40)}(x) = \sin(x)$  und  $f^{(49)}(x) = (f^{(48)})'(x) = \cos(x)$ .

**Lösung von Aufgabe 6.17:**

a) Nach der Kettenregel ist  $f'_1(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ , die einzige Nullstelle hiervon ist  $x_0 = 0$ . Die zweite Ableitung lautet  $f''_1(x) = (2 + 4x^2) \cdot e^{x^2}$ , also ist  $f''_1(0) = 2 > 0$ . Somit hat die Funktion  $f_1(x) = e^{x^2}$  bei  $x_0 = 0$  eine Minimalstelle.

b) Es ist  $f'_2(x) = e^x$ , und da die Exponentialfunktion niemals 0 wird, hat die Funktion  $f_2(x)$  keine Extremalstellen.

c) Hier ist  $f'_3(x) = 3x^2 - 4x + 1$  und  $f''(x) = 6x - 4$ . Die quadratische Gleichung  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  hat die beiden Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = \frac{1}{3}$ , dies sind also die Nullstellen von  $f'(x)$ . Einsetzen in  $f''(x)$  liefert  $f''(1) = 2 > 0$  und  $f''(\frac{1}{3}) = -2 < 0$ . Die Funktion nimmt also in  $x_1$  ein Minimum und in  $x_2$  ein Maximum an.

d) Die erste Ableitung lautet  $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ , ihre einzige Nullstelle im Intervall  $(0, \pi)$  ist  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , denn dies ist die einzige Nullstelle des Cosinus in  $(0, \pi)$ , und der Sinus hat keine Nullstelle in diesem Intervall. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)),$$

also ist  $f''(\frac{\pi}{2}) = -2 < 0$ . Die Funktion  $f(x)$  nimmt in  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  ein Maximum an.

**Lösung von Aufgabe 6.18:** Die ersten Ableitungen der Funktion  $f(x)$  lauten

$$f^{(n)}(x) = m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1) \cdot (1+x)^{m-n},$$

für  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , und  $f^{(m)}(x) = m!$ .

Insbesondere ist also

$$f'(-1) = f''(-1) = \dots = f^{(m-1)}(-1) = 0$$

und  $f^{(m)}(-1) = m! > 0$ . Andere Nullstellen gibt es nicht. Damit hat man folgendes Ergebnis: Ist  $m$  ungerade, so hat die Funktion keine Extremalstelle, ist  $m$  gerade, so hat sie in  $x_0 = -1$  ihre einzige Extremalstelle, und diese ist eine Minimalstelle.

**Lösung von Aufgabe 6.19:**

a) Die ersten Ableitungen dieser Funktion sind  $g'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$  und  $g''(x) = (-2 + 4x^2) \cdot e^{-x^2}$ . Die Nullstellen dieser zweiten Ableitung sind

$$x_{01} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad x_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Als dritte Ableitung findet man

$$g'''(x) = (-2 + 4x^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} + 8x \cdot e^{-x^2}.$$

Einsetzen von  $x_{01}$  und  $x_{02}$  liefert jeweils einen von 0 verschiedenen Wert, es handelt sich also in beiden Fällen um eine Wendestelle. Da die erste Ableitung an beiden Stellen nicht verschwindet, liegt kein Sattelpunkt vor.

b) Es ist  $h'(x) = 3x^2 + 2$ ,  $h''(x) = 6x$  und  $h'''(x) = 6$ . Wegen  $h''(0) = 0$  und  $h'''(0) \neq 0$  ist  $x = 0$  eine Wendestelle. Da  $h'(0) = 2 \neq 0$  ist, ist dies kein Sattelpunkt.

### Lösung von Aufgabe 6.20:

a) Da  $\pi$  eine Nullstelle des Nenners und des Zählers ist, kann die Regel von l'Hopital angewendet werden und liefert folgendes Ergebnis:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x)}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

b) Auch hier liefert eine direkte Anwendung der Regel das Ergebnis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) + \sin(x)}{e^x + e^{-x}} = \frac{0}{2} = 0.$$

c) Hier gehen Zähler und Nenner gegen Unendlich, und daher ist auch hier die Regel anwendbar. Es folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{(\ln(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

## Kapitel 7

Lösung von Aufgabe 7.1: Die Punkte  $\xi_i$  lauten hier

$$\xi_i = x_i = i \cdot \frac{b}{n} \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

An die Stelle von Formel (7.4) des Buches tritt nun

$$F_n(f) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ist

$$F_n(f) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2n},$$

also

$$\int_0^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = \frac{b^2}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 7.2: Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = \ln(|x|) + e^x - \frac{x^4}{4}.$$

Lösung von Aufgabe 7.3: Jede Stammfunktion hat die Form  $F(x) = x^2 + x + C$ , die Bedingung  $F(0) = 3$  liefert  $C = 3$ , also

$$F(x) = x^2 + x + 3.$$

Lösung von Aufgabe 7.4: Die gesuchten Integrale lauten wie folgt:

a)

$$\int_0^2 2x \, dx = x^2 \Big|_0^2 = 4 - 0 = 4.$$

b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} -\sin(x) \, dx = \cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = -1 - (-1) = 0.$$

c)

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) \Big|_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$$

## Lösung von Aufgabe 7.5:

a)

$$\int \frac{2+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+(1+x^2)}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int 1 dx = \arctan(x) + x + C.$$

b)

$$\int_1^2 \frac{x \cdot e^x - 1}{x} dx = \int_1^2 e^x - \frac{1}{x} dx = e^x - \ln(x) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln(2).$$

## Lösung von Aufgabe 7.6:

a) Hier setzt man  $u(x) = x$  und  $v'(x) = \cos(x)$ , dann ist  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = \sin(x)$ . Das ergibt

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x).$$

b) Ich berechne zunächst das unbestimmte Integral. Zweifache partielle Integration liefert hier

$$\begin{aligned} \int (x^2 - x + 1) \cdot e^x dx &= (x^2 - x + 1) \cdot e^x - \int (2x - 1) \cdot e^x dx \\ &= (x^2 - x + 1) \cdot e^x - \left( \int (2x - 1) \cdot e^x dx - 2 \int e^x dx \right) \\ &= (x^2 - 3x + 4) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) \cdot e^x dx = (x^2 - 3x + 4) \cdot e^x \Big|_0^1 = 2e - 4.$$

c) Ein Zwischenergebnis ist

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

Löst man dies nach  $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$  auf, erhält man

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x).$$

**Lösung von Aufgabe 7.7:** Die Teilaufgaben a), b) und c) kann man mithilfe linearer Substitution bearbeiten und erhält:

a)

$$\int_0^1 (3x - 3)^3 dx = \frac{(3x - 3)^4}{12} \Big|_0^1 = -\frac{27}{4}.$$

b)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1}.$$

c)

$$\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1}.$$

d) Hier muss man den allgemeinen Satz anwenden; man setzt  $f(z) = z$  und  $g(x) = \ln(x)$  mit  $g'(x) = 1/x$  und erhält

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

### Lösung von Aufgabe 7.8:

a) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet hier

$$\frac{18x}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

und führt auf die Gleichung

$$18x = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1).$$

Entweder durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen geeigneter  $x$ -Werte findet man:  $A = 2$ ,  $B = -2$  und  $C = 12$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{18x}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{12}{(x+2)^2} dx \\ &= 2 \ln(|x-1|) - 2 \ln(|x+2|) - \frac{12}{x+2} + C. \end{aligned}$$

b) Die Zerlegung lautet

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1},$$

das gesuchte Integral somit

$$\int \frac{6x^2 - x + 1}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx = -\ln|x| + 3 \ln|x-1| + 4 \ln|x+1| + C.$$

c) Der Nenner hat die dreifache Nullstelle  $x_1 = -2$ ; die Zerlegung lautet

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3},$$

das gesuchte Integral ist daher

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx = \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + C.$$

Lösung von Aufgabe 7.9: Es ist

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Lösung von Aufgabe 7.10: Eine Polynomdivision liefert die Zerlegung

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{(x - 1)^2} = x + \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Partialbruchzerlegung des zweiten Summanden ergibt

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2},$$

somit ist

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{(x - 1)^2} dx = \frac{x^2}{2} + \ln(|x - 1|) - \frac{1}{x - 1} + C.$$

Lösung von Aufgabe 7.11:

a) Eine Stammfunktion ist  $2\sqrt{x - 2}$ , daher lautet das gesuchte Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x - 2}} dx = \lim_{a \rightarrow 2} \int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x - 2}} dx = \lim_{a \rightarrow 2} (2 - 2\sqrt{2 - a}) = 2.$$

b) Hier ist  $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$  eine Stammfunktion. Das gesuchte uneigentliche Integral ist somit

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) = 2.$$

c) Stammfunktion ist hier  $2\sqrt{x}$ , da dieser Ausdruck für  $x$  gegen unendlich ebenfalls gegen unendlich geht, existiert kein uneigentliches Integral.

d) Mithilfe partieller Integration ermittelt man die Stammfunktion

$$-x \cdot e^{-x} - e^{-x}.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -x \cdot e^{-x} - e^{-x} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -b \cdot e^{-b} - e^{-b} + 1 = 1. \end{aligned}$$

## Lösung von Aufgabe 7.12:

a) Hier ist  $F'(x) = f(x)$ , also

$$\sqrt{1 + (F'(x))^2} = \sqrt{1 + (4x^4 - 1)} = 2x^2.$$

Damit ist die gesuchte Länge  $L$  gleich

$$L = \int_1^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{14}{3}.$$

b) Zunächst berechnet man

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}, \end{aligned}$$

und die gesuchte Länge ist

$$L = \int_1^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x} \Big|_1^2 = \frac{17}{12}.$$

## Lösung von Aufgabe 7.13:

a) Das gesuchte Volumen ist

$$V = \pi \cdot \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^a x dx = \pi \cdot \frac{a^2}{2}.$$

b) Man benutzt die Funktion  $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$  über dem Intervall  $[0, h]$ . Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers ist

$$V = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{3}.$$

## Kapitel 8

Lösung von Aufgabe 8.1: Es ist

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{(p+1)} = 1,$$

also konvergiert die Reihe, und der Reihenwert ist 1.

Lösung von Aufgabe 8.2: Man setzt  $q = \frac{1}{2}$  und wertet die geometrische Reihe aus. Dies ergibt zunächst

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Nun muss man beachten, dass die Schokoladenhalbierung mit dem Summanden  $\frac{1}{2}$  (und nicht 1) beginnt, man muss also die Summation mit  $i = 1$  beginnen, das heißt, vom Ergebnis noch 1 abziehen. Dies liefert

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - 1 = 1.$$

Lösung von Aufgabe 8.3:

- a) Die Folge der Summanden geht nicht gegen 0, damit kann die Reihe nicht konvergieren.  
 b) Das Quotientenkriterium liefert:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{10^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot 10^i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{10}{i+1} \right| = 0.$$

Die Reihe konvergiert also.

- c) Den Summanden  $2^{-i}$  kann man umschreiben in

$$2^{-i} = \frac{1}{2^i} = \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Die vorgelegte Reihe ist also eine geometrische Reihe (mit  $q = \frac{1}{2}$ ) und somit konvergent.

- d) Es gilt  $\cos(i\pi) = (-1)^i$ , somit ist diese Reihe gerade die alternierende harmonische Reihe, und diese konvergiert.

Lösung von Aufgabe 8.4:

- a) Die Reihe der Beträge dieser Reihe lautet

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)},$$

und diese konvergiert, wie in Aufgabe 8.1 gezeigt wurde. Somit ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i(i+1)}$$

absolut konvergent.

b) Nach Beispiel 8.5 des Buches konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Da aber für alle  $n \geq 2$  gilt:

$$\frac{1}{i^n} \leq \frac{1}{i^2},$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$$

nach dem Majorantenkriterium absolut.

**Lösung von Aufgabe 8.5:**

a) Hier ist  $c_i = \frac{1}{2^i}$ , der Konvergenzradius  $r$  ist damit

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{i+1}}{2^i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

b) Hier ist

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{10^i \cdot (i+1)!}{i! \cdot 10^{i+1}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{10} = \infty.$$

Die Reihe konvergiert also für alle reellen Zahlen  $x$ .

**Lösung von Aufgabe 8.6:** In beiden Teilaufgaben bestimmt man zunächst den Konvergenzradius  $r$  und untersucht danach die Randpunkte.

a) Hier ist

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{(i+1)^4 \cdot 4(i+1)}{i^4 \cdot 4i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(i+1)^5}{i^5} = 1.$$

Die Reihe konvergiert also für  $-1 < x+2 < 1$ , d.h.  $-3 < x < -1$ .

Für  $x = -3$  erhält man die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^4 \cdot 4i},$$

die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, für  $x = -1$  erhält man

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4 \cdot 4i},$$

die nach dem Majorantenkriterium konvergiert; als Vergleichsreihe kann beispielsweise die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$$

dienen, die nach Aufgabe 8.4 b) konvergiert.

Der Konvergenzbereich der Reihe ist also das Intervall  $[-3, -1]$ .

b) Der Konvergenzradius ist hier

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{i \cdot 3^{i+1}}{(i+1) \cdot 3^i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3i}{i+1} = 3.$$

Die Reihe konvergiert also für  $-3 < x < 3$ . Für  $x = -3$  erhält man die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} \cdot (-3)^i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot i,$$

für  $x = 3$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} \cdot 3^i = \sum_{i=1}^{\infty} i.$$

Beide konvergieren nicht, da die Summanden nicht gegen 0 gehen. Der Konvergenzbereich der Reihe ist also das offene Intervall  $(-3, 3)$ .

**Lösung von Aufgabe 8.7:** In der Notation von Satz 8.11 ist hier

$$c_j = \frac{1}{j!} \quad \text{und} \quad b_{i-j} = \frac{1}{(i-j)!}.$$

Es folgt also nach demselben Satz

$$d_i = \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!(i-j)!} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j}.$$

Wegen

$$\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} = 2^i$$

folgt

$$d_i = \frac{2^i}{i!}.$$

Somit lautet die gesuchte Produktreihe

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \cdot x^i.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{2^i \cdot (i+1)!}{2^{i+1} \cdot i!} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{2} = \infty,$$

die Reihe konvergiert also für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Das kann man natürlich auch direkt aus Satz 8.11 des Buches schließen.

**Lösung von Aufgabe 8.8:** Die Ableitung darf man summandenweise vornehmen, es ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot x^{i-1}. \quad (14)$$

Da die geometrische Reihe die Funktion  $1/(1-x)$  darstellt, stellt die Reihe in (14) deren Ableitung dar, also

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

**Lösung von Aufgabe 8.9:**

a) Für die Funktion  $f(x) = e^x$  gilt für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $f^{(i)}(x) = e^x$ . Damit sind aber auch alle Ableitungen an der Stelle  $x = 1$  gleich, es gilt:  $f^{(n)}(1) = e$ . Die gesuchte Taylor-Reihe lautet also:

$$T_e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e}{i!} \cdot (x-1)^i.$$

b) Man berechnet mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) = 1 + \ln(x), & f''(x) &= \frac{1}{x}, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Werte am Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ :

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 1, \quad f'''(1) = -1, \quad f''''(1) = 2$$

Somit ist das gesuchte Taylor-Polynom

$$T_{f,4}(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4.$$

**Lösung von Aufgabe 8.10:** Die benötigte fünfte Ableitung der Funktion lautet

$$f^{(5)}(x) = \frac{-6}{x^4}.$$

Der gesuchte Fehler  $R_4(2)$  wird gegeben durch die Formel

$$R_4(2) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (2-1)^5 = \frac{-6}{\xi^4 \cdot 120} = \frac{-1}{20 \cdot \xi^4}.$$

Dieser Wert wird betragsmäßig am größten, wenn der Nenner am kleinsten ist, und da  $\xi$  zwischen 1 (Entwicklungspunkt) und 2 ( $x$ -Wert) liegt, ist das für  $\xi = 1$  der Fall. Somit lautet die gesuchte Abschätzung:

$$|R_4(2)| \leq \frac{1}{20}.$$

### Lösung von Aufgabe 8.11:

a) Die kleinste Periode der Cosinusfunktion ist  $2\pi$ , durch den Vorfaktor 2 verkürzt sich diese zu  $\pi$ , denn es gilt für alle  $x$ :

$$f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x).$$

b) Mit den gleichen Überlegungen wie in Teil a) findet man heraus, dass die Funktion  $\cos(\frac{x}{2})$  die Periode  $4\pi$  und die Funktion  $\sin(\frac{x}{3})$  die Periode  $6\pi$  hat. Die Gesamtfunktion, also die Summe dieser beiden Funktionen, wiederholt sich daher zum ersten Mal nach  $12\pi$ , dies ist also die gesuchte kleinste Periode von  $g(x)$ .

c) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  hat die Sinusfunktion die Eigenschaft  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ . Durch das Quadrieren fällt das Minuszeichen weg, und somit gilt:

$$h(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = \sin^2(x) = h(x).$$

Die gesuchte kleinste Periode ist also  $\pi$ .

**Lösung von Aufgabe 8.12:** Die in Beispiel 8.12 c) des Buches definierte Sägezahnfunktion  $s(x)$  hat die Periode 1. Mithilfe der unmittelbar vor der Aufgabe stehenden Bemerkung hat daher die Funktion

$$\tilde{s}(x) = \frac{x}{2\pi} - \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor$$

die gewünschte Periode  $2\pi$ .

### Lösung von Aufgabe 8.13:

a) Zunächst findet man

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Für  $n \geq 1$  findet man die  $a_n$  mithilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{x}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( 0 + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

Analog berechnet man die Koeffizienten  $b_n$  für  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{-x}{n} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{-2\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx) \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet somit:

$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

b) Wegen der Betragsbildung ist die Funktion gerade, daher gilt  $b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Berechnung der  $a_n$  erfolgt nach der Formel; es ist also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |\sin(x/2)| \cdot \cos(nx) dx.$$

Wenn sich  $x$  im Integrationsbereich zwischen 0 und  $2\pi$  bewegt, dann bewegt sich  $x/2$  im Bereich zwischen 0 und  $\pi$ . Dort ist aber Sinus niemals negativ, und das bedeutet, dass man die Betragsstriche um den Sinus einfach weglassen kann; es ist also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(x/2) \cdot \cos(nx) dx.$$

Benutzt man nun den in der Aufgabe gegebenen Hinweis, so findet man, dass

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(-n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$$

ist. Integration und Zusammenfassen liefern:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{1}{-n + \frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\left(-n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{-4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Fourier-Reihe lautet somit

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos x - \frac{4}{15\pi} \cdot \cos(2x) - \dots$$

**Lösung von Aufgabe 8.14:** Hier ist für alle  $n$ :

$$b_n = \frac{2}{n} \text{ und } a_n = 0.$$

Somit ist  $c_0 = 0$  und

$$c_n = \frac{-i}{n} \quad \text{und} \quad c_{-n} = \frac{i}{n} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Um die Reihe übersichtlicher schreiben zu können, spalte ich sie nun in den positiven und negativen Indexbereich auf und erhalte:

$$F_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-i}{n} \cdot e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{n} \cdot e^{inx}.$$

Die erste Reihe kann man umschreiben zu:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-i}{n} \cdot e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} \cdot e^{-inx},$$

und damit lautet das Ergebnis:

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i}{n} \cdot e^{-inx} - \frac{i}{n} \cdot e^{inx} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} \cdot (e^{-inx} - e^{inx}).$$

## Kapitel 9

**Lösung von Aufgabe 9.1:** Sind  $a$  und  $b$  zwei beliebige verschiedene Punkte aus  $I$ , so gilt nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

$$\frac{v(b) - v(a)}{b - a} = v'(\xi)$$

mit einem Punkt  $\xi$ , der zwischen  $a$  und  $b$  liegt. Somit liegt  $\xi$  in  $I$ , und daher ist nach Voraussetzung  $v'(\xi) = 0$ . Also ist  $v(b) = v(a)$ ,  $v$  hat also in  $a$  und  $b$  denselben Funktionswert, und da diese Punkte beliebig waren, heißt das:  $v$  hat auf dem ganzen Intervall  $I$  denselben Funktionswert, ist also dort konstant.

**Lösung von Aufgabe 9.2:**

a) Es ist

$$y(x) = c \cdot e^{(\ln(1/2)/T) \cdot x} = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}.$$

b) Aus a) folgt unmittelbar

$$y((n+1)T) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)T}{T}} = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot y(nT).$$

**Lösung von Aufgabe 9.3:**

a) Das ist keine Differenzialgleichung, da keine Ableitung von  $y$  auftritt.

b) Dies ist eine explizite Differenzialgleichung erster Ordnung.

c) Dies ist eine explizite Differenzialgleichung zweiter Ordnung, man kann sie in der Form

$$y'' = \frac{x}{1+x}$$

schreiben.

**Lösung von Aufgabe 9.4:**

a) Jede Lösung der Differenzialgleichung hat gemäß Beispiel 9.4 des Buches die Form

$$y(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$$

mit reellen Konstanten  $a$  und  $b$ . Einsetzen der Anfangsbedingung  $y(\pi) = -1$  liefert  $b \cos(\pi) = -b = -1$ , also  $b = 1$ .

Die Ableitung der allgemeinen Lösung lautet

$$y'(x) = a \cos(x) - b \sin(x),$$

setzt man hier die zweite Anfangsbedingung  $y'(\pi) = -1$  ein, erhält man  $a \cos(\pi) = -a = -1$ , also  $a = 1$ . Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \sin(x) + \cos(x).$$

b) Die Lösung der Differentialgleichung ist hier  $y(x) = ae^{2x}$ . Einsetzen des Anfangswertes ergibt  $ae^2 = e$ , also  $a = e^{-1}$ . Daher lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = e^{2x-1}.$$

### Lösung von Aufgabe 9.5:

a) Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, denn sie kann in der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

mit

$$g(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{2y}$$

geschrieben werden. Anwendung des im Text geschilderten Verfahrens liefert

$$\int 2y \, dy = \int \cos(x) \, dx,$$

also

$$y^2 = y^2(x) = \sin(x) + C.$$

Die Lösung ist daher

$$y(x) = \pm \sqrt{\sin(x) + C}.$$

b) Dies ist keine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

c) Umschreiben in  $y' = x(y^2 + 1)$  zeigt, dass die Methode hier anwendbar ist. Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x \, dx,$$

also

$$\arctan(y) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert  $C = \pi/4$ , die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

### Lösung von Aufgabe 9.6:

a) Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}.$$

Der Ansatz

$$y(x) = \frac{C(x)}{x}$$

mit der Ableitung

$$y'(x) = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2}$$

führt nach Einsetzen in die Differenzialgleichung auf die Beziehung

$$\frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)}{x^2} + \sin(x),$$

also

$$C'(x) = x \sin(x).$$

Mithilfe partieller Integration ermittelt man hieraus

$$C(x) = \sin(x) - x \cos(x) + K,$$

die Lösung der angegebenen Differenzialgleichung ist damit

$$y(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x) + K}{x}.$$

b) Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(x) = C \cdot e^{-x^3}.$$

Der Ansatz

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-x^3}$$

liefert die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y(x) = \left( \frac{x^4}{4} + K \right) \cdot e^{-x^3}.$$

Einsetzen des Anfangswerts ergibt  $y(0) = K = 1$ , damit lautet die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \left( \frac{x^4}{4} + 1 \right) \cdot e^{-x^3}.$$

**Lösung von Aufgabe 9.7:** Hier ist

$$u = u(x) = 4x + y(x) + 1,$$

also  $a = 4$  und  $b = 1$ , sowie  $g(u) = u^2$ . Gleichung (9.36) des Buches nimmt hier die Form

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = x + C$$

an. Integration der linken Seite mithilfe der Substitutionsregel liefert

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = x + C,$$

also ist

$$u = u(x) = 2 \tan(2(x + C)).$$

Ersetzt man hier nun wieder  $u(x)$  durch  $4x + y(x) + 1$ , erhält man

$$y(x) = 2 \tan(2(x + C)) - 4x - 1 = 2 \tan(2x + K) - 4x - 1$$

mit  $2C = K$ .

### Lösung von Aufgabe 9.8:

a) Die beiden Funktionen sind offenbar linear unabhängig und lösen die homogene Differenzialgleichung, wie man durch Einsetzen verifiziert. Daher bilden sie ein Fundamentalsystem.

b) Zweimaliges Ableiten und Einsetzen der Ansatzfunktion  $y(x) = a \cdot e^{-x}$  liefern

$$a \cdot e^{-x} - 5(-a \cdot e^{-x}) + 6a \cdot e^{-x} = 12a \cdot e^{-x} = e^{-x},$$

also  $a = 1/12$ .

c) Durch Kombination der Ergebnisse in a) und b) erhält man die allgemeine Lösung

$$y_a(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{12} \cdot e^{-x}.$$

### Lösung von Aufgabe 9.9:

a) Das charakteristische Polynom lautet  $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$  und hat die reelle Nullstelle  $\lambda_1 = -1$ . Daher ist  $y(x) = e^{-x}$  eine Lösung der Differenzialgleichung.

b) Da in der Differenzialgleichung der Term  $y$  nicht vorkommt, ist  $y(x) = 1$  eine Lösung.

### Lösung von Aufgabe 9.10:

a) Das charakteristische Polynom lautet  $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$ , es hat offenbar die Nullstelle  $\lambda_1 = 1$ . Spaltet man diese ab, erhält man die Zerlegung

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2,$$

es existiert also noch die doppelte Nullstelle  $\lambda_2 = -1$ . Somit lautet das gesuchte Fundamentalsystem:

$$\{e^x, e^{-x}, x e^{-x}\}.$$

b) Das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \lambda^4$  hat die vierfache Nullstelle  $\lambda_1 = 0$ , das Fundamentalsystem ist (wegen  $e^{0x} = 1$ ) also

$$\{1, x, x^2, x^3\}.$$

c) Gemäß dem Hinweis in der Aufgabenstellung kann man aus dem charakteristischen Polynom den Faktor  $(\lambda - 2)$  ausdividieren; dies liefert

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1).$$

Das Restpolynom  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$  hat offensichtlich die Nullstelle  $\lambda_2 = 1$ , und diese ist sogar dreifache Nullstelle, wie man zum Beispiel durch sukzessives Abspalten des Faktors  $(\lambda - 1)$  herausfindet. Damit lautet das Fundamentalsystem:

$$\{e^{2x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}.$$

### Lösung von Aufgabe 9.11:

a) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

hat die doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = 2$ , damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Ihre Ableitung ist

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 (e^{2x} + 2x e^{2x}).$$

Einsetzen der ersten Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = c_1 = 1,$$

also ist

$$y'(x) = 2e^{2x} + c_2 (e^{2x} + 2x e^{2x}).$$

Setzt man hier die zweite Anfangsbedingung ein, erhält man

$$y'(0) = 2 + c_2 = 2,$$

also  $c_2 = 0$ . Somit lautet die spezielle Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = e^{2x}.$$

b) Die allgemeine Lösung lautet hier

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + c_3 e^{-\frac{2}{5}x},$$

die Anfangsbedingungen ergeben dann die spezielle Lösung

$$y(x) = -1 + e^{\frac{1}{2}x}.$$

### Lösung von Aufgabe 9.12:

a) Das charakteristische Polynom lautet  $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ . In der Bezeichnungswise von Satz 9.9 ist  $\alpha = -2$  und  $\beta = 1$ , damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos(x) + c_2 e^{-2x} \sin(x).$$

b) Hier ist  $\alpha = 4$  und  $\beta = 5$ , die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{4x} \cos(5x) + c_2 e^{4x} \sin(5x).$$

Sie hat die Ableitung

$$y'(x) = c_1(4e^{4x} \cos(5x) - e^{4x} 5 \sin(5x)) + c_2(4e^{4x} \sin(5x) + e^{4x} 5 \cos(5x)).$$

Einsetzen der ersten Anfangsbedingung in die Funktion ergibt

$$y(0) = c_1 = 1,$$

also

$$y'(x) = (4e^{4x} \cos(5x) - e^{4x} 5 \sin(5x)) + c_2(4e^{4x} \sin(5x) + e^{4x} 5 \cos(5x)).$$

Setzt man hier nun wiederum die zweite Anfangsbedingung ein, ergibt sich

$$y'(0) = 4 + c_2 \cdot 5 = -1,$$

also  $c_2 = -1$ . Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = e^{4x} \cos(5x) - e^{4x} \sin(5x).$$

### Lösung von Aufgabe 9.13:

a) Ich verwende die Notation von Satz 9.10 des Buches. Hier ist  $a = 0$ , und dies ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Somit ist die Ansatzfunktion für die partikuläre Lösung ein Polynom zweiten Grades, also

$$y_p(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Setzt man dieses Polynom und seine Ableitungen, also  $y'_p(x) = 2b_2x + b_1$  und  $y''_p(x) = 2b_2$ , in die Differenzialgleichung ein, erhält man:

$$2b_2 + 4(2b_2x + b_1) + 29(b_2x^2 + b_1x + b_0) = -29x^2 + 21x + 60,$$

also

$$29b_2x^2 + (8b_2 + 29b_1)x + (2b_2 + 4b_1 + 29b_0) = -29x^2 + 21x + 60.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$b_2 = -1, \quad b_1 = 1, \quad b_0 = 2.$$

Die gesuchte allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1e^{-2x} \cos(5x) + c_2e^{-2x} \sin(5x) - x^2 + x + 2.$$

b) Der Wert  $a = 4$  ist hier einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, daher lautet der richtige Ansatz:  $y_p(x) = bxe^{4x}$ . Die Ableitung hiervon ist

$$y'_p(x) = be^{4x} + 4bxe^{4x},$$

die zweite Ableitung lautet

$$y''_p(x) = 8be^{4x} + 16bxe^{4x}.$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:

$$8be^{4x} + 16bx e^{4x} - 4(be^{4x} + 4bx e^{4x}) = 3e^{4x},$$

also

$$4be^{4x} = 3e^{4x}$$

und damit  $b = \frac{3}{4}$ . Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} + \frac{3}{4} x \cdot e^{4x}.$$

c) Hier ist  $a = -3$  doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Die richtige Ansatzfunktion für die partikuläre Lösung ist daher

$$y_p(x) = bx^2 \cdot e^{-3x}.$$

Dieselbe Vorgehensweise wie in den Teilen a) und b) liefert die allgemeine Lösung

$$c_1 e^{-3x} + c_2 x \cdot e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 \cdot e^{-3x}.$$

**Lösung von Aufgabe 9.14:** Die gesuchte Transformation ist

$$Y(s) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt.$$

Mittels partieller Integration kann man dies umformen zu

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{t}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte von  $y(t) = t$  ist also

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

**Lösung von Aufgabe 9.15:** Nach Definition ist

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = \int_0^{\infty} y'(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^{\infty} y'(t) \cdot e^{-st} dt = y(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt.$$

Einsetzen der Grenzen liefert das Endergebnis

$$-y(0) + s \cdot \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = -y(0) + s \cdot Y(s).$$

## Lösung von Aufgabe 9.16:

a) Hier muss man  $Y$  wie folgt umschreiben:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Damit ist gemäß Tabelle 9.1 des Buches

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2t).$$

b) Der Ansatz

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

führt auf die Lösungen  $A = 2$  und  $B = -1$ , also ist

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Somit ist die gesuchte Zeitfunktion hier, ebenfalls mithilfe von Tabelle 9.1,

$$y(t) = 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t}.$$

## Lösung von Aufgabe 9.17: Die Transformation der rechten Seite liefert

$$\mathcal{L}\{3t \cdot e^{-t}\} = 3 \cdot \frac{1}{(s+1)^2},$$

die der linken

$$s \cdot Y(s) - 2 + 4 \cdot Y(s) = Y(s) \cdot (s+4) - 2.$$

Gleichsetzen ergibt

$$Y(s) \cdot (s+4) - 2 = 3 \cdot \frac{1}{(s+1)^2},$$

also

$$Y(s) = \frac{2(s+1)^2 + 3}{(s+4)(s+1)^2}.$$

Eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2(s+1)^2 + 3}{(s+4)(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+4}$$

liefert

$$\frac{2(s+1)^2 + 3}{(s+4)(s+1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{s+4}.$$

Die Zeitfunktion hiervon, also die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, ist somit

$$y(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t} + \frac{7}{3} \cdot e^{-4t}.$$

## Kapitel 10

### Lösung von Aufgabe 10.1:

a) Es ist

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{11},$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-(-1))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{6}.$$

b) Es handelt sich um die Kugel im  $\mathbb{R}^3$  mit Mittelpunkt  $(1,0,1)$  und Radius 1. Wegen

$$d((0,0,0), (1,0,1)) = \sqrt{2} > 1$$

liegt der Nullpunkt nicht in  $M$ .

Lösung von Aufgabe 10.2: Wegen

$$\mathbf{x}_m = \left(1 - \frac{3}{m}, 3 + \frac{4}{m}\right)$$

gilt

$$d(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{x}}) = \sqrt{\frac{9}{m^2} + \frac{16}{m^2}} = \frac{5}{m}.$$

Der Rest des Beweises verläuft analog Beispiel 10.3 des Buches.

Lösung von Aufgabe 10.3:

a) Auf der  $y$ -Achse gilt  $x = 0$ , also haben alle Punkte auf dieser Achse den Funktionswert 0, und damit ist auch der Grenzwert der Funktionswerte auf dieser Achse gleich 0. Auf der Winkelhalbierenden gilt  $x = y$ , hier gilt also

$$f(x, y) = f(y, y) = \frac{y^2}{e^{y^2} - 1}.$$

Mithilfe der l'hopitalschen Regel folgt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{e^{y^2} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{2ye^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^{y^2}} = 1.$$

Die Funktion hat also keinen Grenzwert in  $(0,0)$ .

b) In Beispiel 10.5 c) wurde bereits gezeigt, dass der Funktionsteil in  $x^2 + y^2 \leq 1$  stetig ist, ebenso ist natürlich die Konstante 0 außerhalb dieses Bereichs stetig. Noch zu zeigen ist, dass auch der Übergang zwischen beiden Bereichen stetig ist. Sei dazu  $(x, y)$  ein Punkt auf der Grenzlinie  $x^2 + y^2 = 1$ . Nähert sich eine Punktfolge von außen diesem Punkt, so ist die Folge ihrer Funktionswerte und damit auch deren Grenzwert 0. Nähert sich eine Punktfolge von innen diesem Punkt, so konvergiert die Folge ihrer Funktionswerte gegen

$$1 - (x^2 + y^2) = 1 - 1 = 0.$$

Somit ist die Funktion stetig.

**Lösung von Aufgabe 10.4:** Die partiellen Ableitungen lauten:

a)

$$f_x(x, y) = (1 - x)y \cdot e^{-(x+y)},$$

$$f_y(x, y) = (1 - y)x \cdot e^{-(x+y)}.$$

b)

$$g_x(x, y, z) = 3z \cos(3xz) \cdot \left(x^2 + y + \frac{1}{z}\right) + 2x \sin(3xz),$$

$$g_y(x, y, z) = \sin(3xz),$$

$$g_z(x, y, z) = 3x \cos(3xz) \cdot \left(x^2 + y + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z^2} \sin(3xz).$$

c)

$$h_x(x, y, z) = y \cdot x^{y-1} \cdot z,$$

$$h_y(x, y, z) = \ln(x) \cdot x^y \cdot z,$$

$$h_z(x, y, z) = x^y.$$

**Lösung von Aufgabe 10.5:** Die partiellen Ableitungen lauten

$$f_x(x, y) = (x + 2) \cdot e^{x+2y} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = (2x + 2) \cdot e^{x+2y}.$$

Damit ist

$$t(x, y) = 2e + 3e(x - 1) + 4ey.$$

**Lösung von Aufgabe 10.6:**

a) Es ist

$$f_x(x, y) = 2x + 2y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 2x.$$

Damit ergeben sich die folgenden Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 6y \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2.$$

b) Es ist

$$g_x(x, y) = (1 - x)ye^{-x-y} \quad \text{und} \quad g_y(x, y) = (1 - y)xe^{-x-y}.$$

Damit berechnet man:

$$g_{xx}(x, y) = (x - 2)ye^{-x-y}, \quad g_{yy}(x, y) = (y - 2)xe^{-x-y}$$

und

$$g_{yx}(x, y) = g_{xy}(x, y) = (1 - x)(1 - y)e^{-x-y}.$$

Lösung von Aufgabe 10.7: Es ist

$$h_{xxy}(x, y) = h_{xyx}(x, y) = h_{yxx}(x, y) = 8y(1 + 4x^2)e^{2x^2}.$$

Lösung von Aufgabe 10.8:

a) Die partiellen Ableitungen wurden bereits in Übungsaufgabe 10.6 b) berechnet. Durch Nullsetzen der beiden ersten Ableitungen findet man die beiden Kandidaten

$$\mathbf{a}_1 = (0,0) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = (1,1).$$

Wegen  $D_f(0,0) = -1 < 0$  liegt hier kein Extremum vor. Weiterhin gilt

$$f_{xx}(1,1) = -e^{-2} < 0 \quad \text{und} \quad D_f(1,1) = e^{-4} > 0,$$

daher nimmt die Funktion in  $(1,1)$  ein lokales Maximum an.

b) Die ersten partiellen Ableitungen lauten

$$g_x(x, y) = 3x^2 - 3 \quad \text{und} \quad g_y(x, y) = 3y^2 - 12.$$

Diese sind gleichzeitig 0, wenn  $x = \pm 1$  und  $y = \pm 2$  ist, es gibt also vier Kandidaten:

$$\mathbf{a}_1 = (1,2), \quad \mathbf{a}_2 = (-1,2), \quad \mathbf{a}_3 = (1,-2), \quad \mathbf{a}_4 = (-1,-2).$$

Die Hesse-Matrix lautet

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix},$$

somit ist  $D_g(x, y) = 36xy$ . Für  $\mathbf{a}_2 = (-1,2)$  und  $\mathbf{a}_3 = (1,-2)$  ist dieser Wert negativ, hier liegt also kein Extremum vor. In  $\mathbf{a}_1 = (1,2)$  hat die Funktion eine lokale Minimalstelle, in  $\mathbf{a}_4 = (-1,-2)$  eine lokale Maximalstelle.

c) Die ersten partiellen Ableitungen sind hier

$$h_x(x, y) = 2xe^{-y} \quad \text{und} \quad h_y(x, y) = (2y - y^2 - x^2)e^{-y}.$$

Die Bedingung  $h_x(x, y) = 0$  impliziert sofort  $x = 0$ . Somit muss gelten:

$$h_y(0, y) = (2y - y^2)e^{-y} = 0.$$

Dies ist erfüllt, wenn  $y = 0$  oder  $y = 2$  ist. Es ergeben sich die beiden Kandidaten

$$\mathbf{a}_1 = (0,0) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = (0,2).$$

Die Hesse-Matrix lautet

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2 - 4y + x^2 + y^2)e^{-y} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_h(0,2) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$$

ist  $(0,0)$  eine lokale Minimalstelle, in  $(0,2)$  liegt kein Extremum vor.

d) Die ersten partiellen Ableitungen sind

$$k_x(x, y) = 2x - y + 9 \quad \text{und} \quad k_y(x, y) = -x + 2y - 6.$$

Gleichzeitiges Nullsetzen dieser beiden Terme liefert die eindeutige Lösung  $(x, y) = (-4, 1)$ . Die Hesse-Matrix ist hier konstant:

$$H_k(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie ist positiv definit, daher liegt in  $(-4, 1)$  ein lokales Minimum vor.

**Lösung von Aufgabe 10.9:** Einsetzen der Nebendingung  $x^2 = z + 1$  in die Zielfunktion liefert

$$f(y, z) = y^2 + z^2.$$

Diese hat ihr einziges Minimum an der Stelle  $(y, z) = (0, 0)$ . Aus  $x^2 = 1$  folgt  $x = \pm 1$ , also hat die Ausgangsfunktion die beiden Minimalstellen

$$(1, 0, 0) \quad \text{und} \quad (-1, 0, 0).$$

**Lösung von Aufgabe 10.10:** Da der Punkt  $P$  auf dem Kreis um 0 mit Radius 1 liegt, sind seine Koordinaten  $P = (x, \sqrt{1 - x^2})$ . Die Fläche des Rechtecks ist somit

$$F(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

mit  $0 < x < 1$ . Dies ist eine univariate Funktion, ihre Ableitung lautet

$$F'(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Nullstellen hiervon findet man durch Lösen der Gleichung

$$\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

also

$$1 - x^2 = x^2$$

oder

$$x^2 = \frac{1}{2}.$$

Die negative Lösung hiervon,  $-1/\sqrt{2}$ , liegt nicht im betrachteten Bereich  $0 < x < 1$ , also ist die einzige infrage kommende Lösung  $x_0 = 1/\sqrt{2}$ . Der Funktionswert an dieser Stelle ist positiv, und da  $F(0) = F(1) = 0$  ist, muss es sich um eine Maximalstelle handeln; selbstverständlich können Sie auch die zweite Ableitung berechnen und feststellen, dass diese an der Stelle  $x_0$  negativ ist.

Die optimalen Koordinaten sind also

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

das optimale Rechteck ist somit ein Quadrat.

## Kapitel 11

**Lösung von Aufgabe 11.1:** Bei jedem Zug gibt es 32, insgesamt also

$$32^3 = 32\,768$$

Möglichkeiten, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{1}{32\,768} \approx 0,00003052.$$

**Lösung von Aufgabe 11.2:** Das ist ein Fall für die Auswahl mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge. Wegen  $n = 7$  und  $l = 5$  gibt es  $\binom{11}{5} = 462$  Möglichkeiten, von denen nur eine einzige das gewünschte Wort ergibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{1}{462} \approx 0,00216.$$

**Lösung von Aufgabe 11.3:** Hier haben wir es mit der Auswahl ohne Zurücklegen, aber mit Beachtung der Reihenfolge zu tun. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{(7-5)!}{7!} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{2\,520} \approx 0,0003968.$$

**Lösung von Aufgabe 11.4:** Hier müssen die drei genannten Mannschaftsteile separat analysiert werden, die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten werden anschließend multipliziert.

Der Trainer hat

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{2}{1} = \frac{7! \cdot 6! \cdot 2!}{5! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 252$$

Möglichkeiten.

**Lösung von Aufgabe 11.5:**

a) Es gibt  $3^{11} = 177\,147$  verschiedene Tipps.

b) Bei „5 aus 25“ ist die Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer gleich

$$\binom{25}{5}^{-1} = \frac{1}{53\,130},$$

bei „4 aus 20“ ist sie dagegen

$$\binom{20}{4}^{-1} = \frac{1}{4\,845},$$

also wesentlich höher.

c) Insgesamt haben die Fahrgäste

$$\frac{7!}{(7-4)!} = 840$$

Möglichkeiten.

d) Der Veranstalter hat

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = \frac{12! \cdot 8!}{4! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 4!} = 34\,650$$

Möglichkeiten.

**Lösung von Aufgabe 11.6:**

- a) Wurf einer geraden Zahl.
- b) Wurf einer 3.
- c) Dieses Ereignis ist unmöglich.

**Lösung von Aufgabe 11.7:** Zur Auswahl stehen hier nur die Ergebnisse 1, 3, 4, und 5. Die einzige gerade Zahl ist hier also die 4, und diese ist weder durch 3 teilbar noch gleich 5. Die einzige durch 3 teilbare Zahl ist die 3 selbst, und die ist weder gerade noch gleich 5. Somit sind die drei Ereignisse unvereinbar.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind  $p(A) = 1/6$ ,  $p(B) = 1/3$ ,  $p(C) = 1/6$ . Somit ist

$$p(A) + p(B) = 1/2,$$

$$p(B) + p(C) = 1/2,$$

$$p(A) + p(C) = 1/3.$$

Andererseits ist  $A \cup B = \{3,3,4\}$ , also  $p(A \cup B) = 1/2$ . Ebenso ergibt sich  $p(B \cup C) = 1/2$  und  $p(A \cup C) = 1/3$ .

**Lösung von Aufgabe 11.8:** Es sei  $E$  „Schüler lernt Englisch“ und  $L$  „Schüler lernt Latein“. Da 35 von 50 Schülern Englisch, 25 von 50 Latein lernen, ergibt sich

$$p(E) = \frac{35}{50} = 0,7 \quad \text{und} \quad p(L) = \frac{25}{50} = 0,5.$$

Da jeder Schüler mindestens eine Sprache erlernt, ist  $p(E \cup L) = 1$ . Es folgt:

- a)  $1 = p(E) + p(L) - p(E \cap L)$ , also  $p(E \cap L) = 0,2$ ,
- b)  $p(\text{„nur Englisch“}) = p(E) - p(E \cap L) = 0,5$ ,
- c)  $p(\text{„nur eine Sprache“}) = p(\text{„nur Englisch“}) + p(\text{„nur Latein“}) = 0,8$ .

**Lösung von Aufgabe 11.9:** Es sei  $S$  das Ereignis „hat die S-Bahn benutzt“ und  $B$  das Ereignis „war vor 9 Uhr im Büro“. Dann gilt

$$p(S) = \frac{6}{10} \quad \text{und} \quad p(B) = \frac{7}{10}.$$

Weiterhin ist

$$p(B|S) = \frac{8}{10}.$$

Nach dem Multiplikationssatz ist  $p(S|B) \cdot p(B) = p(B|S) \cdot p(S)$ , also

$$p(S|B) = \frac{p(B|S) \cdot p(S)}{p(B)} = \frac{24}{35} \approx 0,686.$$

### Lösung von Aufgabe 11.10:

a) Für jedes  $i$  gilt: In genau zwei von vier Fällen ist an der  $i$ -ten Stelle eine 0. Daher ist  $p(A_i) = \frac{1}{2}$  für alle  $i$ . Außerdem tritt in jeweils einem von vier Fällen das Ereignis ein, dass an der  $i$ -ten und an der  $j$ -ten Stelle eine 0 steht, also gilt  $p(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}$  für alle  $i$  und  $j$ . Daher ist

$$p(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(A_i) \cdot p(A_j)$$

für alle  $i$  und  $j$ .

b) Nein. Beispielsweise ist dann

$$p(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = p(A_2) \cdot p(A_3).$$

### Lösung von Aufgabe 11.11: Es ist

$$p(a \leq x \leq b) = F_X(b) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} F_X(x)$$

und

$$p(a \leq x < b) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} F_X(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} F_X(x).$$

### Lösung von Aufgabe 11.12: Die drei Einzelwahrscheinlichkeiten sind

$$p(X = 1) = 0,2, \quad p(X = 2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$$

(denn wenn er mit dem zweiten Schuss trifft, bedeutet das, dass er mit dem ersten nicht getroffen hat), und

$$p(X = 3) = 1 - (p(X = 1) + p(X = 2)) = 0,64.$$

Die Verteilungsfunktion lautet also

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 0,2, & \text{falls } 1 \leq x < 2, \\ 0,36, & \text{falls } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{falls } 3 \leq x. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 11.13: Hier ist  $x_k = E(X)$  für  $k = 1, 2, \dots, 6$ . Daher ist

$$V(X) = \sigma(X) = 0.$$

Lösung von Aufgabe 11.14: Es ist

$$E(X) = \frac{1}{3}(1 + 4 + 13) = 6$$

und

$$V(X) = \frac{1}{3}(1 + 16 + 169) - 36 = 26.$$

Lösung von Aufgabe 11.15: Hier ist  $n = 20$  und  $p = 0,95$ . Damit folgt:

a)  $p(X = 20) = 0,95^{20} \approx 0,358,$

b)  $p(X = 16) = \binom{20}{16} 0,95^{16} \cdot 0,05^4 \approx 0,013,$

c)  $p(X < 18) = 1 - (p(X = 18) + p(X = 19) + p(X = 20)) \approx 0,075.$

Lösung von Aufgabe 11.16: Hier ist

$$\lambda = \frac{15}{10} = 1,5.$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= 1 - (p(X = 0) + p(X = 1)) \\ &= 1 - \left( \frac{1,5^0}{0!} e^{-1,5} + \frac{1,5^1}{1!} e^{-1,5} \right) \approx 0,4422. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 11.17: Hier ist  $\lambda = 2$ . Es folgt

a)

$$p(X = 0) = e^{-2} \approx 0,1353,$$

b)

$$p(X = 2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0,2707,$$

c)

$$\begin{aligned} p(X > 5) &= 1 - p(x \leq 5) \\ &= 1 - (p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &\quad + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)) \\ &\approx 0,0166. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 11.18: Zunächst ist

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)x dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von

$$V(X) = \int_0^1 (x-1)^2 x dx + \int_1^2 (x-1)^2 (2-x) dx$$

berechne ich zunächst das erste Teilintegral und erhalte:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)^2 x dx &= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Für das zweite Teilintegral findet man

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-1)^2 (2-x) dx &= \int_1^2 -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x \Big|_1^2 \\ &= -4 + \frac{32}{3} - 10 + 4 - \left( -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Also ist

$$V(X) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} = 0,1667.$$

Lösung von Aufgabe 11.19:

a) Mit der im Beispiel definierten standardnormalverteilten Zufallsgröße  $Y$  folgt:

$$p(X > 5,03) = p(Y > 1,5) = 1 - p(Y \leq 1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 0,0668.$$

Es sind also etwa 6,68 % Ausschuss zu erwarten.

b)

$$\begin{aligned} p(|X-5| > 0,03) &= p(X < 4,97) + p(X > 5,03) = \\ &= p(Y < -1,5) + p(Y > 1,5) \\ &= 2 \cdot (1 - \Phi(1,5)) \approx 0,1336. \end{aligned}$$

Es sind also etwa 13,36 % Ausschuss zu erwarten.

Lösung von Aufgabe 11.20: Es ist

$$p(X > 125) = 1 - p(X \leq 125) = 1 - \Phi\left(\frac{125 - 120}{5}\right) = 1 - \Phi(1) = 0,1587.$$

Lösung von Aufgabe 11.21: Es ergeben sich folgende Werte:  $Q_{1/2} = 1950$ ,  $Q_{1/4} = 1560$ ,  $Q_{3/4} = 2300$ ,  $\bar{x} = 2002,86$ ,  $d_7 = 404,29$ ,  $v_7 = 292\,023,81$ .

Lösung von Aufgabe 11.22:

a) Es ist

$$H_0 : p \geq \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad H_1 : p < \frac{1}{6}.$$

b) Mit den Daten aus Beispiel 11.39 folgt:

$$\mu - 1,64 \cdot \sigma = 1000 - 1,64 \cdot 28,87 = 952,65.$$

Der Würfel ist also vermutlich nicht gezinkt, da  $966 > 952,65$  ist.

## Kapitel 12

**Lösung von Aufgabe 12.1:** Mit  $x_0 = 1$  ist  $x_1 = 0,54030$ , also

$$|x_0 - x_1| = 0,45970.$$

Weiterhin ist nach Beispiel 12.3 des Buches

$$\varrho = |-\sin(1)| = 0,84147.$$

a) Es ist festzustellen, für welches  $i$  erstmals die Ungleichung

$$\frac{\varrho^i}{1 - \varrho} \cdot |x_1 - x_0| \leq 10^{-2},$$

also

$$\varrho^i \leq \frac{1 - \varrho}{|x_1 - x_0|} \cdot 10^{-2} = 0,00345,$$

erfüllt ist. Entweder durch Logarithmieren oder Ausprobieren findet man heraus, dass dies für  $i = 33$  gilt.

b) Es ist  $x_{20} = 0,73918$ . Mit  $x_{19} = 0,73894$  folgt:

$$\frac{\varrho}{1 - \varrho} \cdot |x_{20} - x_{19}| = 0,00127.$$

Der Wert  $x_{20}$  ist also höchstens mit einem Fehler von etwa einem Tausendstel behaftet.

**Lösung von Aufgabe 12.2:**

a) Das Verfahren lautet

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^m - a}{m x_i^{m-1}} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

b) Hier ist  $m = 3$  und  $a = 7$ , das Verfahren lautet also

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 7}{3x_i^2} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

Wegen  $2^3 = 8$  ist  $x_0 = 2$  eine gute Wahl. Man erhält dann folgende Werte:

$$x_1 = 1,91666667, \quad x_2 = 1,91293846, \quad x_3 = 1,91293118.$$

c) Für  $m = 1$  lautet das Verfahren:  $x_{i+1} = x_i - (x_i - a) = a$ , es liefert also im ersten Schritt das exakte Ergebnis.

**Lösung von Aufgabe 12.3:** Mit dem Newton-Verfahren berechnet man die Nullstelle der Funktion  $f(x) = \cos(x) - x$ . Die Iteration lautet dann:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\cos(x_i) - x_i}{\sin(x_i) + 1}.$$

Beginnend mit  $x_0 = 1$  erhält man:

$$x_1 = 0,7504, \quad x_2 = 0,7391, \quad x_3 = 0,7391.$$

#### Lösung von Aufgabe 12.4:

a) Wegen  $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$  ist die Funktion überall streng monoton steigend, kann also höchstens eine Nullstelle haben. Wegen  $f(0) = -2 < 0$  und  $f(1) = 1 > 0$  hat sie eine Nullstelle im Intervall  $[0,1]$ .

b) Mit  $x_0 = 1$  ergeben sich folgende Werte:

$$x_1 = 0,857143, \quad x_2 = 0,835579, \quad x_3 = 0,835123.$$

#### Lösung von Aufgabe 12.5:

Die beteiligten Matrizen sind hier:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Verfahren lautet dann

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Verwendet man wie vorgegeben als Startvektor  $x^{(0)}$  den Nullvektor, erhält man die folgenden Werte:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max_i  x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)} $
0	0,0000	0,0000	0,0000	
1	1,1667	-0,8000	-2,7500	2,7500
2	0,8417	-1,9000	-3,0417	1,1000
3	0,9764	-2,0167	-2,9604	0,1347
4	1,0094	-1,9842	-2,9941	0,0337

Damit ist die gewünschte Genauigkeit erreicht und

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1,0094 \\ -1,9842 \\ -2,9941 \end{pmatrix}$$

ist die gesuchte Näherung an die exakte Lösung.

### Lösung von Aufgabe 12.6:

Die Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Wegen

$$\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4} < 1$$

ist das Zeilensummenkriterium erfüllt.

b) Wegen

$$\max\left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{5}{2} > 1$$

ist das Spaltensummenkriterium nicht erfüllt.

**Lösung von Aufgabe 12.7:** Die beteiligten Matrizen wurden bereits in der Lösung zu Aufgabe 12.5 bestimmt. Das Verfahren lautet

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k+1)} + \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Verwendet man wie vorgegeben als Startvektor  $x^{(0)}$  den Nullvektor, erhält man die folgenden Werte:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max_i  x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)} $
0	0,0000	0,0000	0,0000	
1	1,1667	-0,8000	-3,0417	3,0417
2	0,7931	-2,0167	-2,9483	1,2167
3	1,0114	-1,9793	-3,0028	0,0545
4	0,9961	-2,0011	-2,9990	0,0218

Damit ist die gewünschte Genauigkeit erreicht und

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,9961 \\ -2,0011 \\ -2,9990 \end{pmatrix}$$

ist die gesuchte Näherung an die exakte Lösung.

### Lösung von Aufgabe 12.8:

a) Es ist

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max\left\{ \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{6} \right\} = 1,$$

das Zeilensummenkriterium ist also nicht erfüllt (da das Maximum kleiner als 1 sein müsste).

b) Es ist

$$\max_{j \in \{1,2,3\}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| = \max\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6} \right\} = \frac{3}{4} < 1,$$

das Spaltensummenkriterium ist also erfüllt.

### Lösung von Aufgabe 12.9:

Die beteiligten Matrizen sind hier:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Verfahren lautet dann

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} x^{(k+1)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die berechneten Näherungen sind:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\max_i  x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)} $
0	0,0000	0,0000	0,0000	
1	0,2500	-0,1875	-0,0313	0,2500
2	0,3516	-0,1387	-0,0231	0,1016
3	0,3251	-0,1514	-0,0252	0,0264

Damit ist die gewünschte Genauigkeit erreicht.

**Lösung von Aufgabe 12.10:** Das konstante Polynom  $p(x) = 1$  liegt im Polynomraum  $\Pi_{100}$ , denn sein Grad ist nicht größer als 100. Weiterhin erfüllt es offenbar die Interpolationsbedingungen. Wegen der in Satz 12.10 formulierten Eindeutigkeit der Lösung ist es sogar das einzige Polynom in  $\Pi_{100}$ , das diese Aufgabe löst.

Lösung von Aufgabe 12.11: Es ist

$$L_0^3(x) = \frac{1}{-40}(x-1)(x-3)(x-4) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{19}{40}x + \frac{3}{10}$$

und

$$L_2^3(x) = -\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 12.12: Ich bestimme zunächst die vier notwendigen Lagrange-Polynome; diese sind:

$$\begin{aligned} L_0^3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{-6} = \frac{x-x^3}{6}, \\ L_1^3(x) &= \frac{(x+2)x(x-1)}{2} = \frac{x^3+x^2-2x}{2}, \\ L_2^3(x) &= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{-2} = \frac{-x^3-2x^2+x+2}{2}, \\ L_3^3(x) &= \frac{(x+2)(x+1)x}{6} = \frac{x^3+3x^2+2x}{6}. \end{aligned}$$

Somit lautet das gesuchte Polynom:

$$\begin{aligned} p(x) &= -11 \cdot \frac{x-x^3}{6} - 1 \cdot \frac{x^3+x^2-2x}{2} \\ &\quad + 1 \cdot \frac{-x^3-2x^2+x+2}{2} + 1 \cdot \frac{x^3+3x^2+2x}{6} \\ &= x^3 - x^2 + 1. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 12.13:

a) Es ist

$$L_0^2(x) = \frac{x(x-2)}{3}, \quad L_1^2(x) = -\frac{(x+1)(x-2)}{2}, \quad L_2^2(x) = \frac{x(x+1)}{6}.$$

b) Die Summe dieser drei Polynome hat den konstanten Wert 1. Das kann man sich ganz allgemein überlegen, da es sich um ein Polynom zweiten Grades handelt, das an drei verschiedenen Stellen den Wert 1 hat, oder man kann es einfach zu Fuß ausrechnen:

$$\begin{aligned} L_0^2(x) + L_1^2(x) + L_2^2(x) &= \frac{x(x-2)}{3} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} + \frac{x(x+1)}{6} \\ &= \frac{2(x^2-2x) - 3(x+1)(x-2) + (x^2+x)}{6} = \frac{6}{6} = 1. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 12.14: Es ist die Interpolationsaufgabe

$$p(0) = 0, \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad p(\pi) = 0$$

zu lösen. Da die Funktionswerte an den Stellen 0 und  $\pi$  gleich null sind, benötigt man die zugehörigen Lagrange-Polynome  $L_0^2(x)$  und  $L_2^2(x)$  nicht. Wegen

$$L_1^2(x) = \frac{-4x(x-\pi)}{\pi^2} = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$$

folgt sofort:

$$p(x) = 1 \cdot L_1^2(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x.$$

**Lösung von Aufgabe 12.15:**

a) Die Werte lauten:

$$\begin{aligned}\Delta(-1) &= 1, \quad \Delta(1) = -1, \quad \Delta(2) = 4, \quad \Delta(5) = 1, \\ \Delta(-1,1) &= -1, \quad \Delta(1,2) = 5, \quad \Delta(2,5) = -1, \\ \Delta(-1,1,2) &= 2, \quad \Delta(1,2,5) = -\frac{3}{2}, \\ \Delta(-1,1,2,5) &= -\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

b) Hier ist

$$\begin{aligned}\Delta(0) &= 1, \quad \Delta(1) = 2, \quad \Delta(2) = 0, \quad \Delta(3) = 1, \quad \Delta(4) = -1, \\ \Delta(0,1) &= 1, \quad \Delta(1,2) = -2, \quad \Delta(2,3) = 1, \quad \Delta(3,4) = -2 \\ \Delta(0,1,2) &= -\frac{3}{2}, \quad \Delta(1,2,3) = \frac{3}{2}, \quad \Delta(2,3,4) = -\frac{3}{2} \\ \Delta(0,1,2,3) &= 1, \quad \Delta(1,2,3,4) = -1, \\ \Delta(0,1,2,3,4) &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 12.16:** Der Punkt  $x_n$  hat Einfluss auf den Koeffizienten

$$b_n = \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

und somit auf das gesamte Interpolationspolynom.

**Lösung von Aufgabe 12.17:** Es ist  $\Delta(0) = 1$ . Alle dividierten Differenzen zweiter und damit auch alle höherer Ordnung sind 0, und damit lautet das Polynom:  $p(x) = 1$ .

**Lösung von Aufgabe 12.18:**

a) Das Polynom lautet

$$p(x) = 1 - (x+1) + 2(x+1)(x-1) - \frac{7}{12}(x+1)(x-1)(x-2).$$

b) Das Polynom lautet

$$p(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x(x-1) + x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

## Lösung von Aufgabe 12.19:

a) Zunächst berechnet man  $\Delta(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c$  für  $i = 0, 1, 2$  und

$$\Delta(x_0, x_1) = \frac{a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} = a(x_0 + x_1) + b$$

sowie

$$\Delta(x_1, x_2) = \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b.$$

Also ist

$$\Delta(x_0, x_1, x_2) = \frac{a(x_0 + x_1) + b - (a(x_1 + x_2) + b)}{x_0 - x_2} = a.$$

b) Einsetzen der Daten aus Teil a) liefert

$$\begin{aligned} p(x) &= (ax_0^2 + bx_0 + c) + (a(x_0 + x_1) + b)(x - x_0) + a(x - x_0)(x - x_1) \\ &= ax_0^2 + bx_0 + c + ax_0x + ax_1x + bx - ax_0^2 - ax_1x_0 - bx_0 \\ &\quad + ax^2 - ax_0x - axx_1 + ax_0x_1 \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man natürlich auch mit der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms begründen, hier sollte es jedoch explizit berechnet werden.

## Lösung von Aufgabe 12.20:

Hier ist

$$h = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Damit ergeben sich folgende Werte:

$i$	$x_i$	$f_i$	$f_i$
0	0,000	1 0000	
1	0,125		0,9846
2	0,250		0,9412
3	0,375		0,8767
4	0,500		0,8000
5	0,625		0,7191
6	0,750		0,6400
7	0,875		0,5664
8	1,000	0,5000	
$\Sigma$		1,5000	5,5280

Somit ist

$$T^{0,125} = \frac{0,125}{2} \cdot (1,5000 + 2 \cdot 5,5280) = 0,7848.$$

#### Lösung von Aufgabe 12.21:

Da mit  $n = 4$  begonnen werden soll, ist  $h = h_0 = 0,25$ . Man erhält hierfür den Wert

$$T^{0,25} = 0,357515.$$

Mit der halbierten Schrittweite  $h_1 = 0,125$  ergibt sich

$$T^{0,125} = 0,358726.$$

Wegen

$$\left| T^{0,25} - T^{0,125} \right| = 0,001211 > \varepsilon$$

ist die gewünschte Genauigkeit noch nicht erreicht (wenn auch knapp, aber knapp daneben ist auch vorbei).

Für  $h_2 = 0,0625$  erhält man schließlich

$$T^{0,0625} = 0,359037.$$

Wegen

$$\left| T^{0,125} - T^{0,0625} \right| = 0,000311 < \varepsilon$$

ist die gewünschte Genauigkeit nun erreicht und  $T^{0,0625} = 0,359037$  ist die gesuchte Näherung.

#### Lösung von Aufgabe 12.22:

Die gemäß der Simpson-Regel notierten Funktionswerte und deren Summen finden Sie in folgender Tabelle:

$i$	$x_i$	$f_i$	$f_i$	$f_i$
0	0,000	1,0000		
1	0,125		0,9846	
2	0,250			0,9412
3	0,375		0,8767	
4	0,500			0,8000
5	0,625		0,7191	
6	0,750			0,6400
7	0,875		0,5664	
8	1,000	0,5000		
$\Sigma$		1,5000	3,1468	2,3812

Somit ist

$$S^{0,125} = \frac{0,125}{3} \cdot (1,5000 + 4 \cdot 3,1468 + 2 \cdot 2,3812) = 0,7854.$$

Dieser Wert stimmt übrigens in allen angezeigten Stellen mit dem wahren Wert des Integrals, nämlich  $\frac{\pi}{4}$ , überein.

### Lösung von Aufgabe 12.23:

Für  $2n = 4$ , also

$$h = h_0 = \frac{3}{4} = 0,75,$$

erhält man folgende Tabelle:

$i$	$x_i$	$f_i$	$f_i$	$f_i$
0	-1,00	0,00000		
1	-0,25		0,01105	
2	0,50			0,12500
3	1,25		-1,38107	
4	2,00	0,00000		
$\Sigma$		0,00000	-1,37002	0,12500

Somit ist

$$S^{0,75} = \frac{0,75}{3} \cdot (4 \cdot (-1,37002) + 2 \cdot 0,12500) = -1,30752.$$

Halbierung der Schrittweite führt auf  $h_1 = 0,375$ . Die sich hierfür ergebende Tabelle sehen Sie hier:

$i$	$x_i$	$f_i$	$f_i$	$f_i$
0	-1,000	0,00000		
1	-0,625		0,22556	
2	-0,250			0,01105
3	0,125		0,00075	
4	0,500			0,12500
5	0,875		0,25637	
6	1,250			-1,38107
7	1,625		-3,96438	
8		0,00000		
$\Sigma$		0,00000	-3,48170	-1,24502

Dies führt auf die Näherung

$$S^{0,375} = \frac{0,375}{3} \cdot (4 \cdot (-3,48170) + 2 \cdot (-1,24502)) = -2,05211.$$

Ganz offensichtlich ist die gewünschte Genauigkeit noch nicht erreicht, und es muss mit der erneut halbierten Schrittweite  $h_2 = 0,1875$  weitergerechnet werden. Auf die Angabe der Wertetabelle verzichte ich jetzt, ich denke, die können Sie nun schon längst selbst erstellen.

Als Näherungswert für das Integral ergibt sich

$$S^{0,1875} = \frac{0,1875}{3} \cdot (4 \cdot (-5,77971) + 2 \cdot (-4,72673)) = -2,03577.$$

Wegen

$$\left| S^{0,375} - S^{0,1875} \right| = |-2,05211 - (-2,03577)| = 0,01634$$

ist die gewünschte Genauigkeit leider immer noch nicht erreicht, und man muss noch eine Runde drehen.

Für  $h_3 = 0,09375$  erhält man

$$S^{0,09375} = \frac{0,09375}{3} \cdot (4 \cdot (-11,02461) + 2 \cdot (-10,50644)) = -2,03473.$$

Wegen

$$\left| S^{0,1875} - S^{0,09375} \right| = |-2,03577 - (-2,03473)| = 0,00104 < \varepsilon$$

ist die gewünschte Genauigkeit nun endlich erreicht, und somit ist der Wert

$$S^{0,09375} = -2,03473$$

eine gute Näherung an das Integral

$$I = \int_{-1}^2 x^3 \sin(\pi x) dx.$$