



Drucker-Prager

Um modelo constitutivo para solos

O modelo constitutivo de Drucker-Prager (DP), e sua versão estendida (EDP) consistem basicamente de modelos de comportamento elasto-plástico, onde o escoamento é controlado por uma combinação entre a tensão hidrostática e a tensão desviatória.

O comportamento dos solos é um tema que vem sendo estudado amplamente desde a antiguidade. Grandes e importantes construções têm sido afetadas pela falta ou imprecisão dos estudos e conhecimentos na área. Um claro exemplo disto é a famosa Torre de Pisa, na figura acima, que não deixa dúvidas sobre a complexidade e importância da predição do comportamento dos solos.

Como todas as outras ciências, o estudo do comportamento dos solos teve início com a simples prática da observação e ensaios, até que ganhasse corpo, status e pudesse se converter na disciplina que conhecemos atualmente por geotecnia ou mecânica dos solos. Há muitos anos as bases do comportamento dos solos estão assentadas em teorias e fórmulas analíticas, aliadas a grandes fatores de segurança a fim de incluir as incertezas inerentes às variações nas propriedades de material, assim como a própria não exatidão das teorias disponíveis.

Se quisermos obter uma maior quantidade e melhor qualidade de informação do comportamento dos solos, seja para corroborar as teorias vigentes e/ou por sua vez melhorar ou refinar as análises, devemos recorrer a modelos complexos do tipo não-linear com plasticidade, que sejam capazes de representar um comportamento similar ao do material solo, ao que denominamos modelos constitutivos.

Um modelo constitutivo permite relacionar as tensões com as deformações unitárias produzidas no interior do material em função de um número determinado de parâmetros que dependem das propriedades mecânicas do solo. Para que o modelo seja realmente útil, deve ser completo (*determinar o comportamento*

do material para todo tipo de carregamento), deve possuir parâmetros identificáveis (*mediante um número reduzido de ensaios simples*) e deve ser capaz de interpretar fisicamente a resposta do material (*frente a qualquer mudança de tensões ou deformações*).

O modelo constitutivo de Drucker-Prager (DP), e sua versão estendida (EDP) consistem basicamente de modelos de comportamento elasto-plástico, onde o escoamento é controlado por uma combinação entre a tensão hidrostática e a tensão desviatória (*desequilíbrio das tensões entre os diferentes eixos*). Ambos os modelos são uma extensão e aperfeiçoamento do conhecido modelo de falha dos solos de Mohr-Coulomb (1773).

Antes de continuar com o modelo constitutivo de DP, é importante recordar alguns conceitos básicos da teoria da elasto-plasticidade, que definem o alcance de cada modelo associado ao tipo de comportamento do material que pretendemos simular.

Em primeiro lugar, o comportamento plástico pode depender ou não da velocidade de aplicação da carga. No caso em que sejam dependentes da velocidade, denominam-se “rate dependent plasticity”, ou “viscoplasticity”. Um exemplo disto é o que denominamos “creep”. No caso da independência da velocidade, denominam-se “rate independent plasticity”, caracterizados por produzir deformações instantâneas e irreversíveis, sendo o comportamento associado aos modelos de DP e EDP deste tipo.

Para caracterizar um modelo de comportamento plástico, é necessário ter claro três conceitos: “yield criterion”, “flow rule” e “hardening rule”, conceitos estes que tentaremos explicar de maneira bem didática.

O primeiro deles, critério de escoamento (yield criterion), consiste em definir uma função das tensões que nos permita conhecer se o material está no estado plástico ou elástico. No caso de tensão uniaxial, isto corresponde simplesmente à condição $\sigma < \sigma_y$ (um único ponto). No entanto, surge a pergunta: como podemos avaliar se o material está em estado plástico ou elástico em um estado triaxial de tensões? Aqui devemos avaliar uma combinação das tensões e compararmos com algum valor que defina o limite elástico, ou "yield criterion", que no caso 3D corresponde a uma superfície. Para o caso do modelo de DP 3D, a superfície de escoamento pode ser definida como:

$$F = 3\beta\sigma_m + \frac{\sigma_{eqv}}{\sqrt{3}} - \sigma_y = 0 \quad , \text{onde:}$$

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

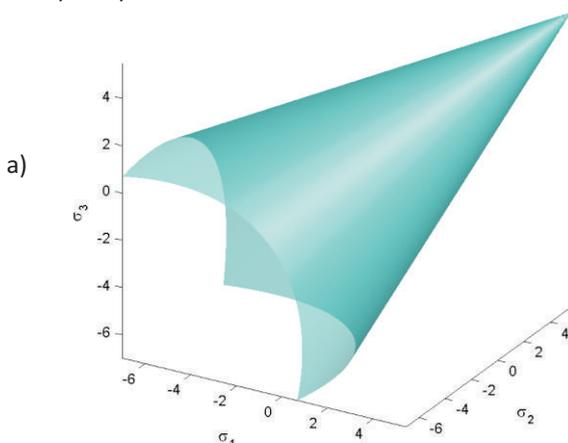
$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_y = \frac{6(c)\cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}$$

$$\beta = \frac{2 \sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}$$

c = coesão do material
 ϕ = ângulo de fricção interna

A forma da superfície de escoamento se mostra nas figuras a) e b):



Figuras a) e b) - "Yield Surface" do modelo de Drucker-Prager.

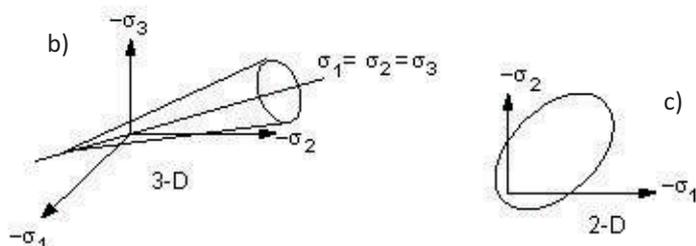
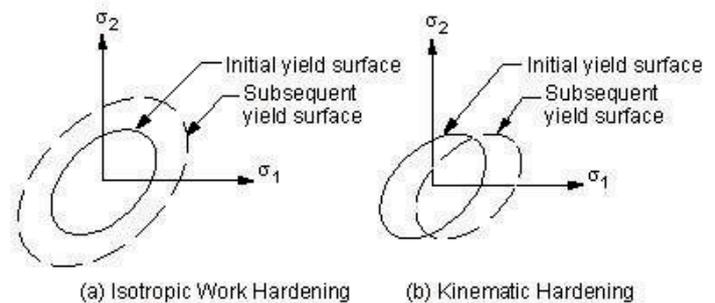


Figura c) - Yield line

O segundo conceito, denominado "flow rule", corresponde à função que define a direção das deformações, quando o material alcança o estado de comportamento plástico. Muitas vezes a "flow rule" é idêntica ao "yield criterion", denominando-se do tipo associativa e no caso em que sejam diferentes, corresponde ao tipo não associativa.

No caso do modelo de DP e EDP, podem-se empregar "flow rule" associativa ou não associativa, o que permite representar um parâmetro muito importante no comportamento dos solos, a dilatância, fenômeno que corresponde à mudança de volume de uma massa de solo devido às tensões e deformações cortantes, Ψ , sendo que este ângulo é significativamente menor que o de atrito interno ϕ , para o caso de solos granulares.

O terceiro conceito é o do endurecimento ou "hardening rule", que representa a mudança da superfície de escoamento de acordo com o incremento das deformações plásticas. Existem dois tipos de encruamento, o encruamento isotrópico (*isotropic work hardening*), e o encruamento cinemático (*kinematic hardening*), que nos são mostrados pelas figuras abaixo.



Hardening Rules.

O comportamento elasto-plástico ideal corresponde a um encruamento nulo, e é o que oferece os modelos de DP. No entanto, o modelo EDP oferece ainda diferentes modelos de encruamento, como o linear, hiperbólico e a lei de potência (*power law function*), todos eles considerando encruamento do tipo isotrópico.

Tendo sido apresentadas as idéias fundamentais dos modelos de comportamento plástico, pode-se resumir as características de comportamento dos modelos de DP e EDP no ANSYS, através da tabela abaixo.

	DP	EDP
Yield Criterion	Von Mises com dependência da tensão hidrostática	
Flow Rule	Associativa ou não associativa	
Hardening Rule	Nenhuma	Work Hardening
Material Response	Elasto-plástico ideal	Multilinear

Tabela - Características de DP e EDP no ANSYS.

Parâmetros do modelo de DP

Conhecidas as características básicas do modelo de DP, a dúvida que surge seria sobre quais parâmetros devem ser fornecidos ao modelo e como calculá-los, o que será apresentado a seguir.

Os parâmetros que devem ser fornecidos são ϕ , c , Ψ , s . Para determinar ϕ e c , devem ser realizados pelo menos dois tipos de ensaios:

- Compressão e tensão uniaxial.
- Compressão uniaxial e compressão equi-biaxial (esta é necessária quando tem-se materiais granulares, para quando não é possível realizar ensaios de tração uniaxial).

As deduções, para cada caso, são mostradas na continuação:

Caso 1

Ensaio de tração (σ_t) e compressão (σ_c) uniaxial:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_t & \sigma_3 &= -\sigma_c \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 & \sigma_1 &= \sigma_2 = 0 \\ \sigma_{eqv} &= \sigma_t & \sigma_{eqv} &= \sigma_c \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_t}{3} & \sigma_m &= -\frac{\sigma_c}{3} \\ F &= 3\beta \frac{\sigma_t}{3} + \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} - \sigma_y = 0 & F &= -3\beta \frac{\sigma_c}{3} + \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} - \sigma_y = 0 \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_y}{\left(\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} & \sigma_c &= \frac{\sigma_y}{\left(-\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \end{aligned} \right\}$$

Das resistências máximas obtidas nos ensaios σ_c e σ_t , com $\sigma_c > \sigma_t$, podemos obter β e σ_y , e com eles podemos obter ϕ e c .

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_t)} \\ \sigma_y &= \frac{2\sigma_c\sigma_t}{\sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_t)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \phi &= \sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}\beta}{2 + \sqrt{3}\beta}\right) \\ c &= \frac{\sigma_y\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}{6\cos\phi} \end{aligned}$$

Caso 2

Ensaio de compressão uniaxial (σ_c) e compressão equi-biaxial (σ'_c):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 &= -\sigma_c & \sigma_3 &= \sigma_2 = -\sigma'_c \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = 0 & \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_{eqv} &= \sigma_c & \sigma_{eqv} &= \sigma'_c \\ \sigma_m &= -\frac{\sigma_c}{3} & \sigma_m &= -\frac{2\sigma'_c}{3} \\ F &= -3\beta \frac{\sigma_c}{3} + \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} - \sigma_y = 0 & F &= -3\beta \frac{2\sigma'_c}{3} + \frac{\sigma'_c}{\sqrt{3}} - \sigma_y = 0 \\ \sigma_c &= \frac{\sigma_y}{\left(-\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} & \sigma'_c &= \frac{\sigma_y}{\left(-2\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \end{aligned} \right\}$$

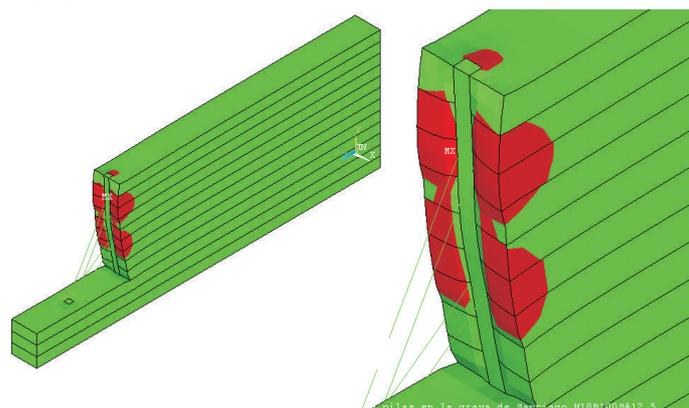
Novamente, das resistências máximas obtidas nos ensaios, σ_c e σ'_c , podemos obter β e σ_y , e com eles obter ϕ e c :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\sigma'_c - \sigma_c}{\sqrt{3}(2\sigma'_c - \sigma_c)} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma'_c\sigma_c}{\sqrt{3}(2\sigma'_c - \sigma_c)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \phi &= \sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}\beta}{2 + \sqrt{3}\beta}\right) \\ c &= \frac{\sigma_y\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}{6\cos\phi} \end{aligned}$$

Com respeito ao procedimento para obter o ângulo de dilatância ψ , há a alternativa de considerá-lo nulo, o que deveria propiciar um resultado conservador. Caso contrário deve-se obter o valor da dilatância dos resultados de ensaios de compressão triaxiais, ao que recomenda-se revisar os estudos de Schanz y Vermeer (1996) "Angles of friction and dilatancy of sand".

Mediante o uso do modelo de Drucker-Prager, podemos analisar problemas complexos considerando corretamente a interação solo-estrutura, para problemas como muros de contenção, fundações, estabilidade de encostas ou um dos casos mais recorrentes na prática atual das construções, a sustentação de encostas durante uma escavação.

Na figura abaixo estão algumas imagens de um modelo estudado no trabalho de mestrado da PUC Chile, intitulado "Análisis 3D no lineal mediante elementos finitos del efecto arco en la grava de Santiago", García (2009), onde se emprega o modelo de DP embutido no ANSYS.



Zonas de Plasticificação e escavação com pilares de suporte. García (2009).