

Fontes de erro: identificar, quantificar e reduzir a intervalos aceitáveis

As aproximações na engenharia podem ser de duas fontes: a primeira diz respeito a fidelidade do modelo matemático com a natureza; a segunda aos erros de aproximação inerentes aos métodos numéricos.

Por Giovanni de Moraes Teixeira, Martin Poulsen Kessler, ESSS, e Professor Clovis R. Maliska, SINMEC- UFSC

Na sua essência, engenharia é a ciência da aproximação. É a arte de “fazer aproximadamente certo, ao invés de muito errado”. A ciência, por sua vez, nasce da observação. A constância na ocorrência dos fenômenos e sua observação nos induz a criar leis, equações e fórmulas. E então construímos modelos matemáticos na tentativa de que eles representem os fatos observados e nos forneçam as mesmas respostas que seriam obtidas por meio de testes experimentais.

Alguns desses modelos, contudo, são bastante complexos para serem resolvidos analiticamente, ainda mais se acrescentarmos a complexidade das geometrias onde devemos resolver o modelo matemático, que são os componentes e estruturas que fazem parte do nosso cotidiano de cálculo. Dessa necessidade, nasceram as ferramentas de simulação numérica.

Assim, o que é preciso ficar claro, é que não é possível evitar as aproximações, que são de duas fontes: a primeira diz respeito a fidelidade do modelo matemático com a natureza, que quase nunca é perfeita; a segunda aos erros de aproximação inerentes aos métodos numéricos. O que é possível fazer é trabalhar na identificação das fontes de erro, a fim de quantificá-lo e reduzi-lo a intervalos aceitáveis. Esse, portanto, é o propósito do presente artigo.

Podemos então nominar alguns erros dentro da classificação acima:

1ª- No uso indevido do modelo matemático poderíamos incluir:

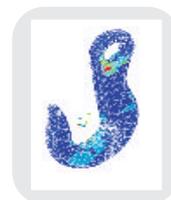
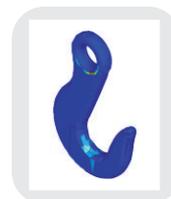
- O uso incorreto dos softwares de CAD/CAE pelos correspondentes analistas;
- O uso de hipóteses incorretas na definição das condições de contorno, carregamento, propriedades de material, modelos de turbulência;
- O erro no approach metodológico do problema (aproximar uma análise transiente por uma estática, por exemplo).

2ª- Nos erros de aproximação inerentes aos métodos numéricos pode-se incluir:

- O erro devido à discretização do domínio – em outras palavras, a MALHA.

Em termos de análise estrutural (campo de tensões e deslocamentos), quanto mais grosseira a discretização do domínio, maior a rigidez do componente ou sistema analisado. Numa análise modal, a tendência é um aumento nas frequências que correspondem aos modos de vibração da estrutura. Se a malha é grosseira nas regiões de maior gradiente de tensão, então certamente haverá grandes imprecisões numéricas.

O mesmo raciocínio vale para CFD, pois também nesta área temos um modelo matemático que procura representar a física e um domínio para discretizar. A diferença entre a área de fluidos e a área estrutural, especialmente no que se refere a elasticidade, é que outros parâmetros entram na análise, como o modelo de turbulência e todos seus parâmetros. Mas, se pensarmos em problemas de plasticidade, as mesmas dificuldades que temos em fluidos estarão presentes, pois teremos movimento de matéria com deformações permanentes.



1. Convergência da solução

A solução das equações de conservação em cada um dos volumes de controle da malha envolve a solução de um sistema linear do tipo $Ax=b$.

Em CFD emprega-se a solução iterativa do sistema de equações, o qual resulta em um sistema sob a forma $Ax-b=r$, onde r é o resíduo em uma determinada iteração. Diz-se que uma solução convergiu quando o resíduo atinge um valor abaixo de um critério previamente especificado pelo usuário, que implique que a solução não mude significativamente, de acordo com as exigências do problema, entre uma iteração e outra. Deve-se observar que estes critérios podem mudar de problema para problema.

1.1 Balanço das propriedades

Os métodos numéricos usualmente empregados em CFD são conservativos em nível discreto, ou seja, balanços das propriedades são forçados em nível discreto. A conservação em nível discreto acontece apenas quando a solução está convergida dentro de um critério especificado. Portanto, medir como os balanços em cada volume de controle estão satisfeitos é um bom critério para medir a convergência da solução. Considera-se que a conservação foi respeitada quando o balanço, ou seja, a diferença entre o que entra e o que sai do domínio, fica abaixo de 1%. Mais uma vez é importante salientar que este critério pode mudar de problema para problema e de acordo com a qualidade que desejamos para a solução.

1.2 Parâmetros globais

Em análises estacionárias, considera-se que a solução foi atingida quando as quantidades envolvidas não variam mais.

Neste sentido, é importante acompanhar alguma característica física global do problema (vazão na saída, temperatura em um ponto, pressão média em uma face, por exemplo, coeficientes de atrito, coeficiente de troca de calor por convecção) ao longo do processo iterativo e verificar se esse valor estabilizou, mais uma vez dentro de um critério escolhido pelo usuário.

2. Solução independente da malha

A malha de volumes finitos deve ser suficientemente refinada para identificar as características importantes do escoamento. É de capital importância calcular com precisão (novamente um critério deve ser empregado) os gradientes das variáveis, pois eles permitem o cálculo dos fluxos que interessam para a engenharia. Logo, o refino da malha deve ser realizado nas regiões de grandes gradientes, normalmente perto de paredes. A maneira mais adequada de verificar se a malha está cumprindo esta característica é realizar a análise em duas malhas de refinamento diferente e comparar os resultados obtidos para cada uma delas. Se o resultado não varia, novamente de acordo com um critério especificado pelo usuário, tem-se a chamada "independência de malha". Caso os resultados sejam diferentes entre as malhas, deve-se construir uma nova malha, mais refinada, e comparar seus resultados com a anterior. Esse processo deve ser repetido até que duas malhas de refinamento diferente promovam resultados que não sejam diferentes dentro do critério empregado.

3. Y-plus (Y+)

O escoamento junto a paredes apresenta elevados gradientes das variáveis de interesse, de modo que é fundamental garantir uma quantidade suficiente de malhas que permita capturar o fenômeno físico desta região. Em escoamentos turbulentos, é possível identificar

a proximidade do primeiro nó da malha, a partir da parede, através do Y-plus (Y+), que é a distância adimensional à parede e pode ser visualizado como pós-processamento nos aplicativos de CFD da ANSYS. Dependendo do modelo de turbulência, a exigência de distância mínima pode variar e a troca de modelo pode exigir a geração de uma nova malha.

4. Critérios na área estrutural

No que se refere à análises estruturais, a seguir, discutiremos o erro numérico, basicamente, como função da discretização do domínio de cálculo; em outras palavras, da malha empregada nas simulações. Discutiremos três dos mais importantes métodos: 1) SERR, 2) SDSG e 3) SEPC.

4.1 SERR

SERR é a energia associada à diferença entre tensões elementares e nodais. Este é o mecanismo básico de cálculo do erro, dos quais os demais são derivados. SERR possui unidades de energia (no WB = mJ). Na interface clássica do ANSYS, a visualização do erro (SERR) é possível através do seguinte comando: PLESOL,SERR.

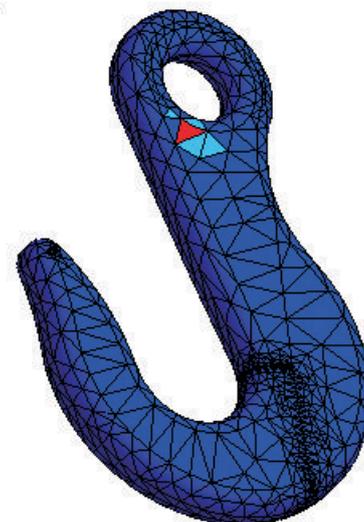
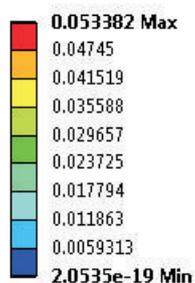
Structural Error = SERR

Type: Structural Error

Unit: mJ

Time: 1

7/21/2009 12:30 PM



Individualmente, a linguagem APDL nos permite obter o erro elementar através da seguinte sintaxe: *GET,ERRO,elem,nelem,SERR

$$\{\Delta\sigma_n^i\} = \{\sigma_n^m\} - \{\sigma_n^i\}$$

$\{\sigma_n^i\}$ Tensor de tensões no nó n

$\{\sigma_n^m\}$ Tensor ponderado (média) de tensões no nó n

$$\{\sigma_n^m\} = \frac{\sum_{i=1}^{N_e^n} \{\sigma_n^i\}}{N_e^n}$$

N_e^n Número de elementos ligados ao nó n

$$e_i = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\Delta\sigma_n^i\}^T [D]^{-1} \{\Delta\sigma_n^i\} d(vol) \quad \text{Unidade: [mJ]}$$

e_i Erro para o elemento i

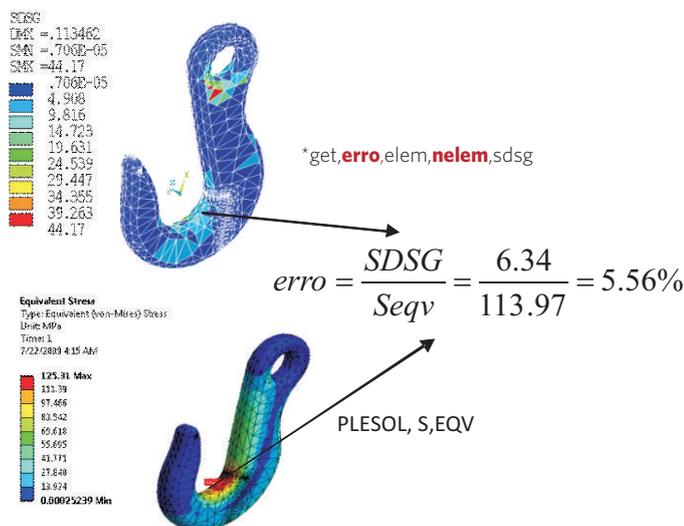
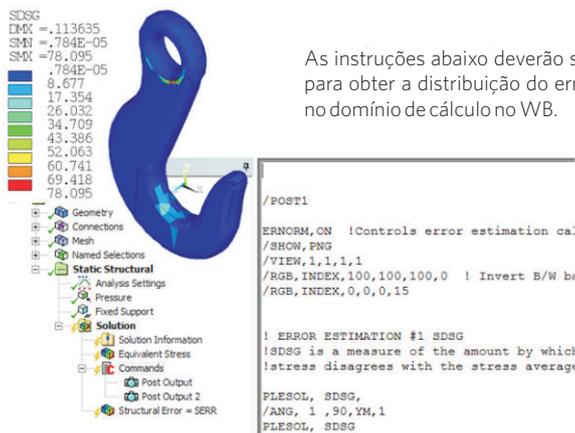
vol Volume do elemento i

$[D]$ Matriz tensão - deformação

4.2 SDSG

SDSG é uma variável que monitora o quanto as tensões elementares discordam das tensões nodais médias.

Um valor alto de SDSG não é necessariamente um índice negativo, particularmente se o número for pequeno quando comparado aos valores nominais de tensão na área mensurada (tensão equivalente de Von Mises). Como recomendação, sugere-se que a razão (SDSG/Seqv) nas áreas de maior tensão na estrutura não devam ser menor que 10%.



É preciso, entretanto, tomar cuidado com as regiões de singularidade na estrutura. É saudável verificar onde há condições de contorno (forças, deslocamentos, etc.) pontuais e desfazer a seleção dos elementos da vizinhança antes do referido pós-processamento. Na interface clássica, a visualização do erro (SDSG) é possível através do seguinte comando: PLESOL,SDSG.

4.3 SEPC

SEPC é uma estimativa do erro nas tensões (ou deslocamentos, temperatura, fluxo térmico, etc.) do conjunto de elementos selecionados. Na interface clássica, basta digitar o comando (PRERR), após desabilitar o PowerGraphics (/GRAPHICS,FULL). Com o powergraphics a plotagem (ou listagem) dos resultados é feita apenas nas superfícies dos sólidos e, desta forma,

podem surgir diferenças sensíveis quando comparados ao método tradicional (Full Model Method).

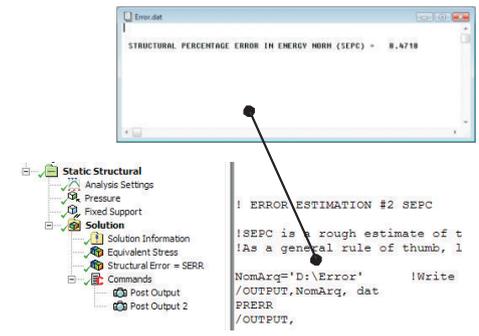
O cálculo do erro (em termos de energia - veja SERR) pode ser normalizado em função da energia de deformação, da seguinte forma:

$$ER = 100 \left(\frac{EERR}{Energy + EERR} \right)^{\frac{1}{2}}$$

*get,ER,PRERR,0,SEPC
 EERR: erro em termos de energia sobre todo o modelo (ou parte selecionada)
 *get,EERR,PRERR,0,SERSM
 Energy: Energia de deformação sobre todo o modelo (ou da parte selecionada)
 *get,Energy,PRERR,0,SENSM

Como regra geral, é recomendado que os valores para SEPC devam ser mantidos próximos a 10% ou abaixo disso. A ideia por trás deste critério é garantir que a densidade elementar utilizada no modelo represente adequadamente a rigidez global do componente. Novamente, é bom repetir, nós e elementos com condições de contorno e carregamento pontuais deverão ser removidos antes da execução do referido comando.

As linhas abaixo (WB commands) escreverão no arquivo de nome (Error.dat) na raiz do disco D, o valor percentual do erro global.



A estimativa do erro via SEPC, contudo, não está disponível para dois tipos de análises: 1) As que envolvem grandes deslocamentos (NLGEOM,ON) e 2) Análises não-lineares em termos de propriedade de material.

Com estes critérios, os usuários dos softwares da família ANSYS têm condições de avaliar, de maneira clara e objetiva, se a solução das equações atingiu os níveis de convergência desejados e se a solução está independente da malha, fatores importantes para garantir que o modelo matemático foi bem resolvido.

É bom esclarecer que a finalidade do presente artigo é alertar para a importância dos critérios de convergência e do refinamento da malha, o primeiro para garantir que o sistema linear foi bem resolvido e o segundo para garantir que os erros de truncamento decrescem com o refino da malha. É muito importante lembrar também que em engenharia não existem critérios absolutos, mas sim critérios que dependem da precisão requerida para o problema em análise. E estas questões dependem do conhecimento que o analista numérico tem da física envolvida no problema em estudo. Soluções numéricas cuidadosamente obtidas permitem prosseguir com segurança e propor mudanças de forma mais rápida e conceitualmente mais eficientes nos projetos.