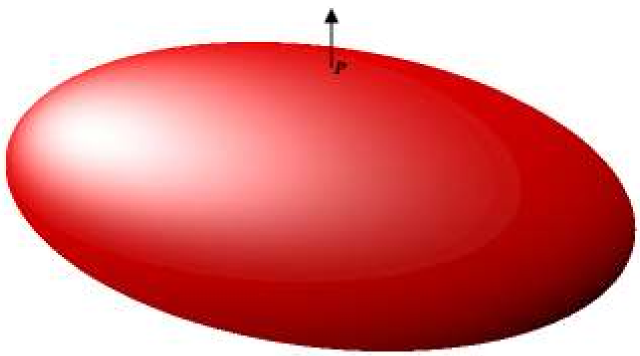
LA CURVATURA DI UNA SUPERFICIE - Insegnante

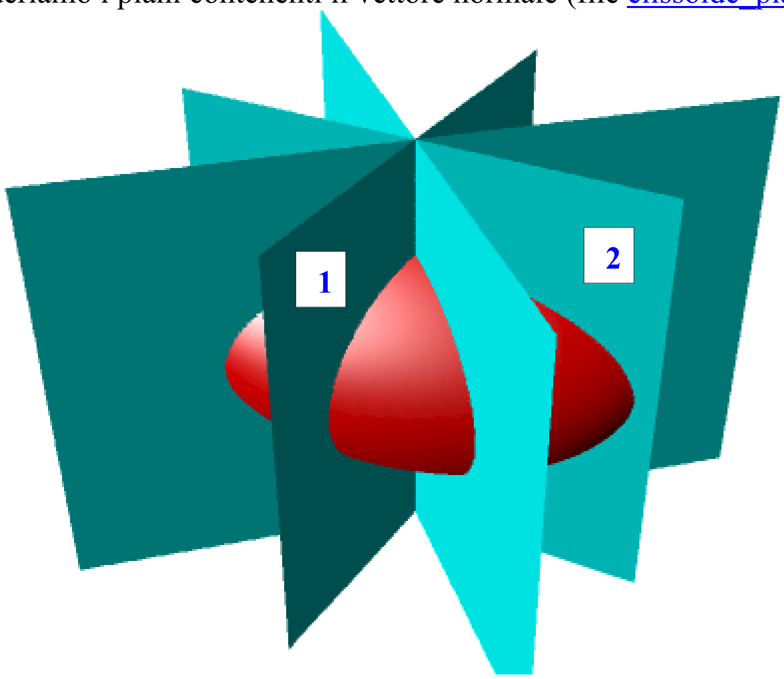
sul libro: capitolo 6, par. 6.2, 6.3.

1. La definizione di curvatura
Avete visto che cosa è la curvatura di una curva piana in un suo punto.
Adesso passiamo allo spazio, vogliamo definire la curvatura di una superficie in un suo punto.
Iniziamo anche qui da una situazione semplice.

Considerate un ellissoide, che è la superficie ottenuta facendo ruotare un'ellisse attorno a un suo asse (si tratta di una sorta di pallone da rugby).
P è un punto sull'ellissoide, in particolare *P* è uno dei vertici dell'ellisse che ha generato la superficie.
Tracciamo in *P* il vettore normale alla superficie, cioè il vettore perpendicolare al piano tangente in *P* (potete immaginare di poggiare una matita con la punta in su sul punto *P* del pallone da rugby).



Consideriamo i piani contenenti il vettore normale (file elissoide_piano_o.dpg).

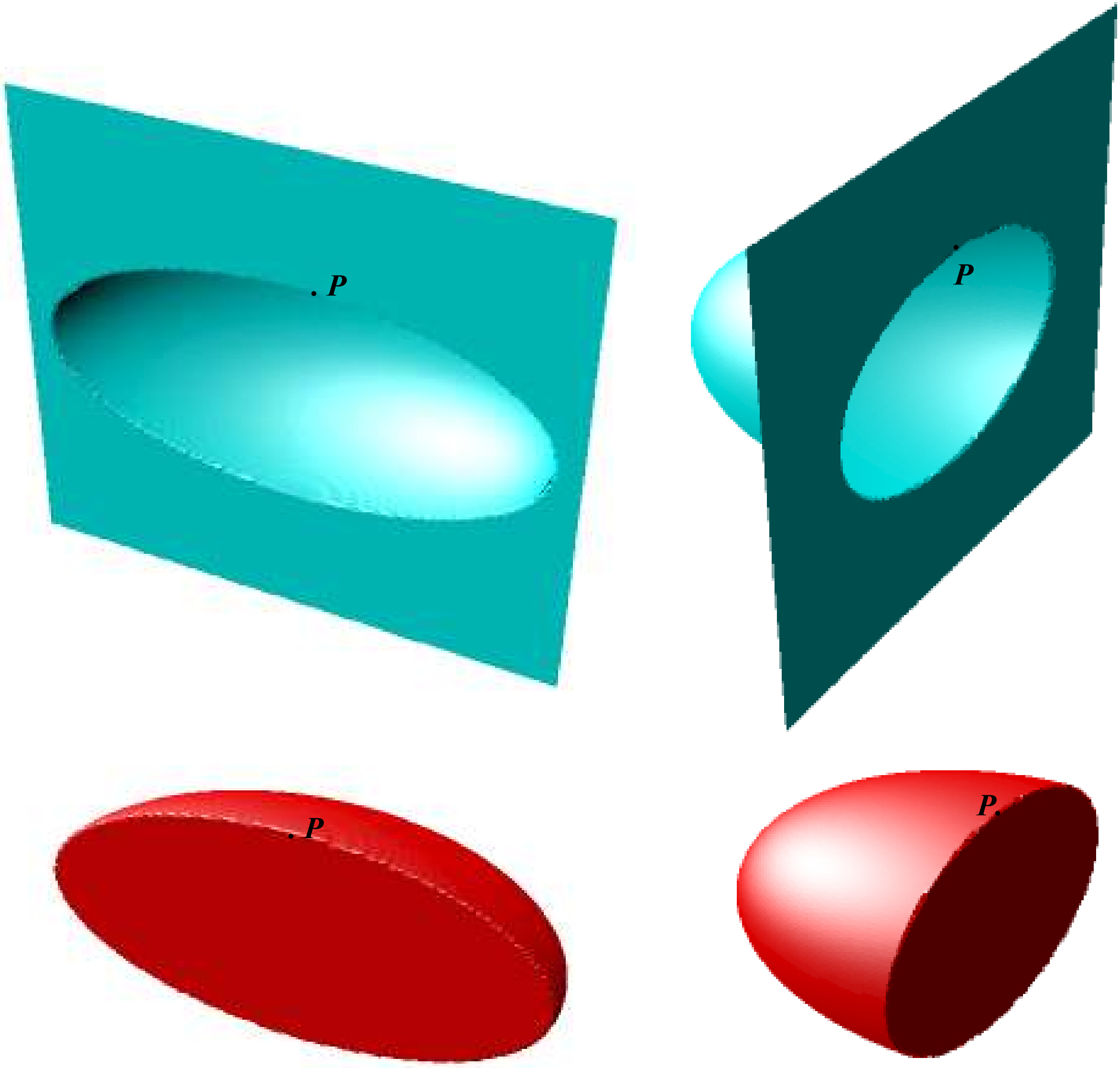


Le intersezioni tra i piani e la superficie si chiamano **sezioni normali** e sono in ogni caso delle curve piane.
Ognuna di esse ha una sua curvatura in *P*.

- Individuate le due sezioni normali che hanno la curvatura massima e la curvatura minima e disegnatele nella figura 1. Spiegate il perché della vostra risposta.

Sono quelle indicate con 1. (la max)) e 2. (la min) nel disegno

Se volete potete aiutarvi con i file ellissoide_piano2.dpg, ellissoide_piano3.dpg, ellissoide_piano4.dpg; in essi attivando il menu Scrollbar per la variabile A, potete muovere i piani (grazie al cursore che appare verticalmente sulla destra) e analizzare le sezioni normali, ottenendo figure come le seguenti:



Le due curvature massima e minima si chiamano **curvature principali** e le indicheremo con k_1 e k_2, le due sezioni normali corrispondenti le chiamiamo **sezioni principali**.

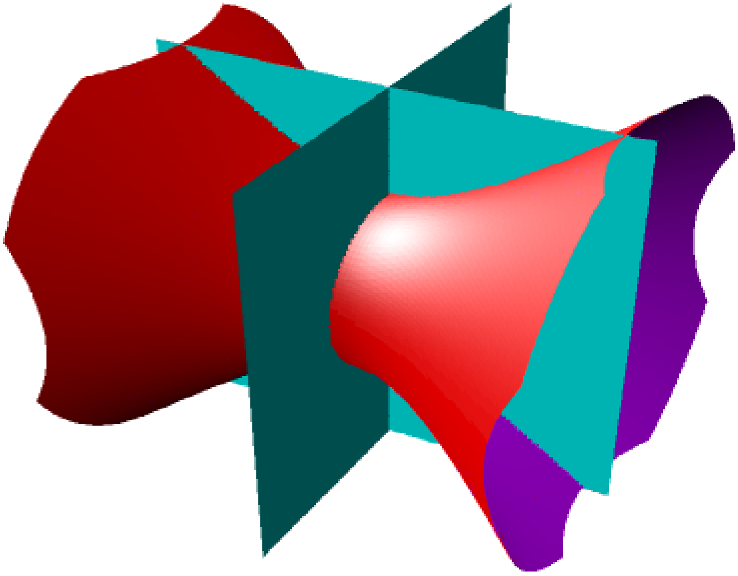
È chiaro che la curvatura della superficie in P dipenderà da queste curvature.

In particolare **Gauss** ha definito, a meno del segno, la **curvatura k della superficie in P** il prodotto delle due curvature principali: $k = k_1k_2$.

Per decidere il segno di k possiamo osservare i centri dei cerchi osculatori delle due sezioni principali:

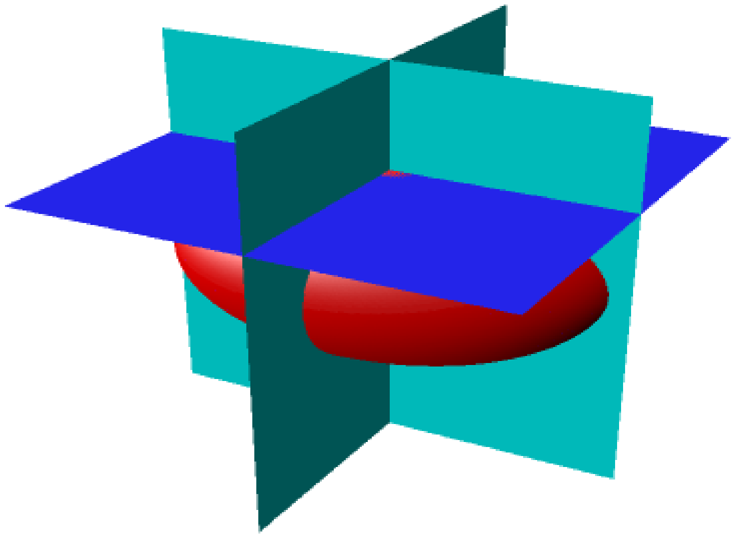
- se sono dalla stessa parte rispetto al piano tangente in P (come nel caso dell'ellissoide) la curvatura è positiva,

- se sono da parti opposte la curvatura è negativa; un esempio di questo tipo è nella figura successiva, che rappresenta un iperboloide (superficie ottenuta dalla rotazione di un iperbole attorno a un suo asse) e che si trova nel file iperboloide.dpg..



2. Una importatnte proprietà

Nella figura seguente (file elissoide_piano1.dpg) è rappresentato l'ellissoide di partenza con il piano tangente in *P* e i due piani che determinano le sezioni principali.



- Come sono tra loro questi tre piani? .perpendicolari ....

- Questa proprietà vale qualunque sia la superficie ed è un teorema dovuto a Eulero. Provate a enunciarlo:

I due piani che determinano le sezioni normali in un punto P sono tra loro perpendicolari e sono a loro volta perpendicolari al piano tangente in P

3. Ancora sulla curvatura dell'ellissoide

- Ritorniamo ancora all'ellissoide. La curvatura è costante in tutti i suoi punti? .No .... Se no, individuate i punti che hanno curvatura massima e quelli che hanno curvatura minima e provate a giustificare, con le vostre parole, la scelta effettuata.

....

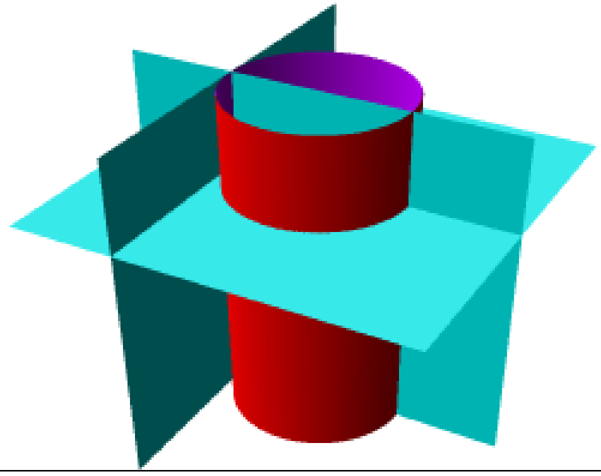
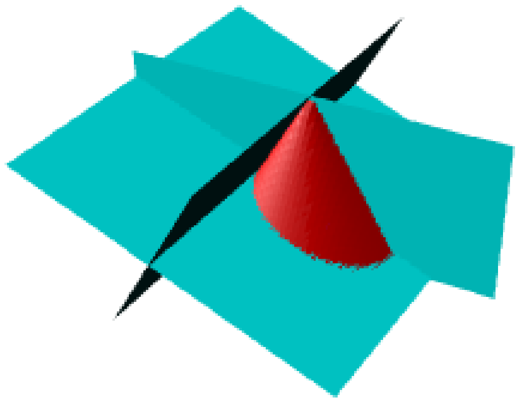
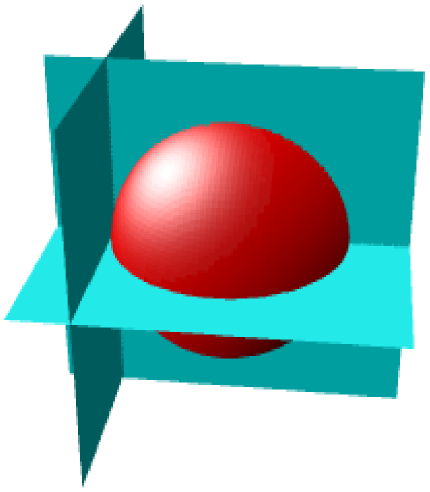
....

4. La curvatura del piano

- Intersecando un piano con qualsiasi altro piano si ottiene una ..retta ...., che ha curvatura ...nulla ....
- Quindi la curvatura in ogni punto del piano vale .zero ....

5. La curvatura di cilindro, cono e sfera

- Individua ora la curvatura del cilindro, del cono e della sfera e spiegate il vostro ragionamento; per completare la tabella potete anche aiutarvi con i file cilindro.dpg, cilindro_piani.cg3; cono.dpg, cono_piani.cg3; sfera.dpg, sfera_piani.cg3.

	**Curvatura in un punto del cilindro:** Vale zero perché una sezione normale è una retta che ha curvatura zero e moltiplicata per qualunque altro numero dà come risultato zero.
	**Curvatura in un punto del cono:** Idem
	**Curvatura in un punto della sfera:** Se la sfera ha raggio r, le sezioni principali hanno curvatura 1/r, quindi la curvatura in ogni punto è $1/r^2$.

6. Le curvature principali nel cono e nelle superfici di rotazione

Un <u>cono</u> è la superficie ottenuta ruotando una retta (*generatrice*) attorno a un'altra retta (*asse*) che interseca la generatrice in un punto (*vertice*).

Considerate un punto P sul cono (diverso dal vertice) e le due sezioni normali, si tratta di due curve che conoscete bene:

- una è una retta, la generatrice del cono
- l'altra è un'...

Vediamo di scoprire qual è il centro del cerchio osculatore di quest'ultima curva.

- Aprite il file [cono_cerchio osculatore.cg3]

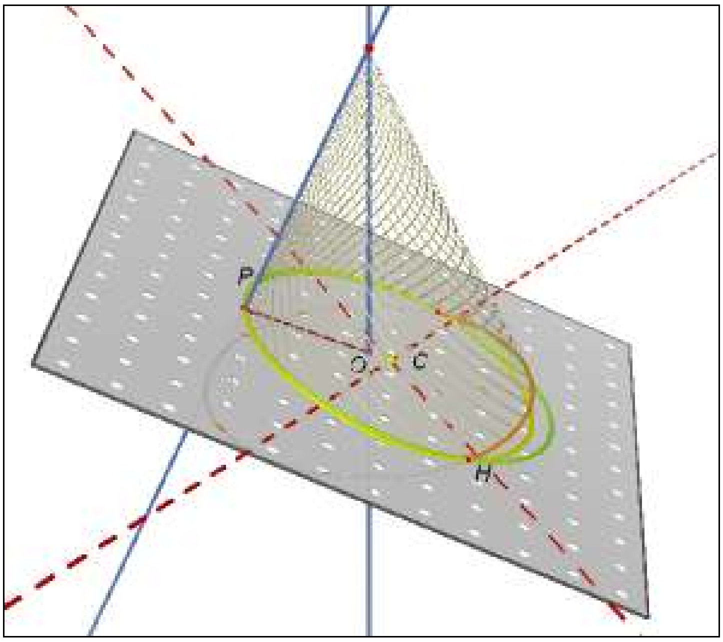
In figura, l'ellisse verde è la sezione normale di cui vogliamo studiare la curvatura in P.
In giallo è disegnato il cerchio passante per P e per il punto H sull'ellisse che diventa il cerchio osculatore avvicinando H a P.

- Muovete H in modo da farlo coincidere con P e osservate la posizione del centro C.

- Che cosa osservate? Dove si trova il centro del cerchio osculatore? Coincide con O, si trova quindi sull'asse del cono
- Muovete il punto P. La proprietà precedente continua a valere? Sì

Potete ora enunciare quanto avete scoperto:

- Dato un punto P di un cono (diverso dal vertice), una sezione principale è la generatrice del cono passante per quel punto e il centro del cerchio osculatore dell'altra sezione nel punto P appartiene all'asse del cono.



Vediamo ora che cosa accade per le altre superfici che avete considerato fin qui.

Un <u>cilindro</u> è ottenuto ruotando una retta (generatrice) attorno a una retta (asse) che non la interseca.

- La proprietà che avete enunciato per il cono vale anche per il cilindro? Spiegate il perché. Sì, una sezione normale è la retta generatrice e l'altra è un cerchio che ha centro appartenente all'asse

Una <u>sfera</u> è ottenuta ruotando una circonferenza attorno a una retta contenente il diametro.

- La proprietà vale anche per la sfera? Spiegate. Sì, le sezioni normali sono due cerchi massimi e possiamo pensare uno di essi come la generatrice e l'altro ha il centro che coincide col centro della sfera e che appartiene all'asse di rotazione

In effetti quanto avete scoperto vale per tutte le superfici di rotazione.

- In ogni punto P (non singolare) di una superficie di rotazione una sezione normale è la generatrice passante per quel punto e il centro del cerchio osculatore dell'altra sezione passante per il punto P appartiene all'asse di rotazione.

Uno sguardo oltre ...

Avete visto che il cilindro e il cono hanno la stessa curvatura del piano e sapete che, almeno localmente, su queste superfici valgono gli stessi risultati della geometria euclidea piana.

La sfera ha curvatura costante e positiva in tutti i suoi punti e in particolare se la sfera ha raggio 1 la sua curvatura è 1, al tempo stesso sulla sfera non valgono i risultati della geometria euclidea, cade già il secondo postulato.

Ma che cosa accade su una superficie con curvatura costante e negativa?

Le prossime attività sono tutte dedicate a questo problema, ma ci vorrà un po' di pazienza perché non è immediato trovare una superficie a curvatura costante e negativa ...