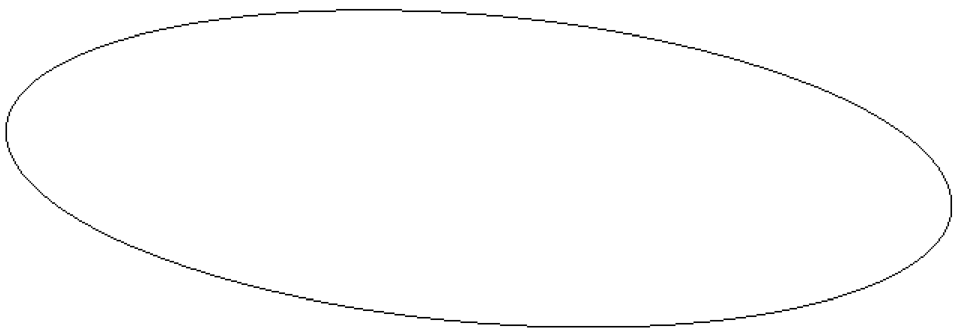
LA CURVATURA DI UNA LINEA IN UN PIANO - Insegnante

sul libro: capitolo 6, par. 6.1

Avete visto che sulla sfera non valgono gli stessi risultati della geometria euclidea che valgono sul piano. Questi risultati sono ancora veri, almeno localmente, sul cilindro e sul cono. Questo dipende dalla diversa forma delle superfici, in particolare dalla loro curvatura.
Vogliamo adesso definire meglio il concetto di curvatura.
Iniziamo dalla curvatura di una linea in un piano e perveniamo poi alla curvatura di una superficie nello spazio.

1. Curvatura di un'ellisse nel piano
Per iniziare considerate una curva che già conoscete: un'ellisse.
Osservate l'ellisse in figura.



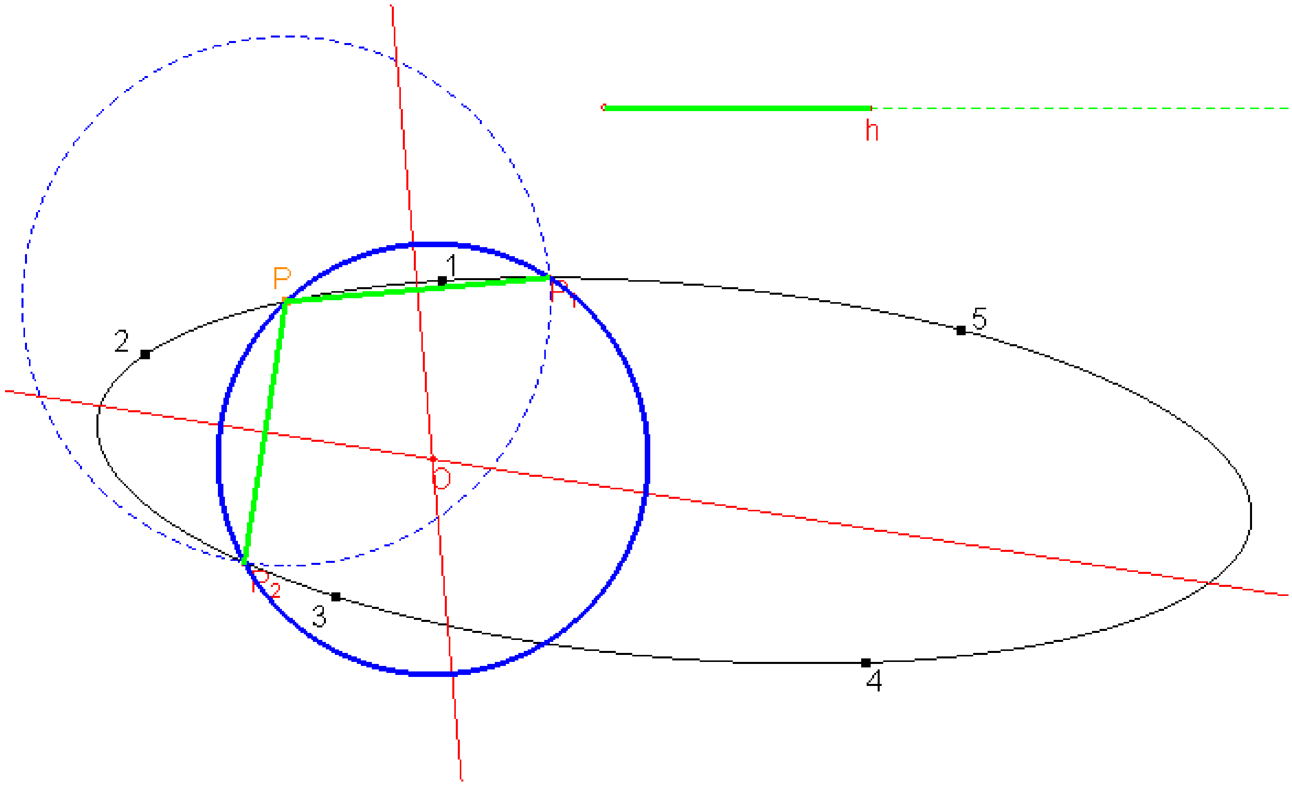
- Secondo voi quali punti dell'ellisse hanno una curvatura maggiore e quali una curvatura minore? Segnate di rosso quelli a curvatura maggiore e di blu quelli a curvatura minore.
- Provate a spiegare con parole vostre le ragioni della scelta.

La curvatura à maggiore nei vertici dell'asse maggiore dove l'ellisse appare più schiacciata, è minore negli altri vertici.

Per definire in modo più preciso la curvatura prendiamo come riferimento un cerchio; in particolare cerchiamo il cerchio che approssima nel modo migliore la linea nel punto in cui vogliamo studiare la curvatura.
Facciamolo con Cabri.
IL PARAGRAFO 2 PUO' ESSERE SALTATO, PASSANDO DIRETTAMENTE AL PARAGRAFO 3, dipende dalla dimestichezza che hanno i ragazzi con l'uso di Cabri

2. La costruzione
- Aprite Cabri
- Utilizzando il comando *Conica* tracciate un'ellisse definita da cinque suoi punti (se la curva che ottenete non è un'ellisse, basta spostare i punti che l'hanno generata per ottenerla)
- Disegnate un punto sull'ellisse e chiamatelo P
- Disegnate una semiretta orizzontale e un punto su di essa, chiamatelo h.
- Col comando *Mostra / Nascondi*, nascondete la semiretta che ci serve solo per guidare meglio il movimento di h.
- Create il segmento che ha per estremi l'origine della semiretta e il punto h
- Utilizzate il comando *Compasso* per generare la circonferenza di centro P e raggio congruente al segmento che avete appena creato
- Individuate i punti di intersezione tra questa circonferenza e l'ellisse e chiamateli P_1 e P_2 e quindi nascondete la circonferenza

- Generate ora la circonferenza passante per P, P_1 e P_2; per farlo tracciate gli assi di PP_1 e di PP_2, generate il punto di intersezione tra gli assi e chiamatelo O e infine tracciate la circonferenza di centro O e passante per P.



3. L'esplorazione e la definizione

Se avete saltato il paragrafo precedente e non avete fatto la costruzione con Cabri, aprite la figura Curvatura1.fig e descrivetela, altrimenti passate alle righe successive.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

Per fare in modo che la circonferenza approssimi bene la curva nel punto P, bisogna che i punti P, P_1 e P_2 tendano a coincidere.

- Per fare questo afferrate il punto *h* e fate in modo che il segmento che lo ha come estremo diventi sempre più piccolo, che la sua lunghezza tenda a zero.

o Spiegate quello che osservate

La circonferenza tende ad approssimare sempre meglio la conica

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

o Cabri disegna la circonferenza nel caso in cui i tre punti coincidano? .No..... Perché?

Una circonferenza è definita da tre punti distinti

Il cerchio che approssima meglio la funzione lo otteniamo quando il segmento definito da *h* ha "quasi" lunghezza nulla, questo cerchio si chiama **cerchio osculatore**

- Se non siete già in questa situazione fate in modo di visualizzare il cerchio osculatore passante per P.
- Dalla modalità *Puntatore* afferrate il punto P e muovetelo sull'ellisse.

- In quali punti il cerchio osculatore ha raggio massimo? In quali punti ha raggio minimo?

Raggio max: nei vertici dell'asse minore, raggio min nei vertici dell'asse maggiore

- Esiste qualche legame tra queste considerazioni e quelle che avete fatto inizialmente sulla curvatura dell'ellisse?

Raggio max nei punti a curvatura minore e viceversa

Siete ora pronti per la definizione di curvatura di una linea in un suo punto.

La **curvatura di una linea in un suo punto *P*** è il numero $k = 1/r$ dove r è la misura del raggio del cerchio osculatore (se esso esiste), cioè del cerchio che approssima meglio la curva in P.

- Potete utilizzare il comando *Distanza o lunghezza* di Cabri per misurare il raggio del cerchio osculatore ed eventualmente la *Calcolatrice* per calcolarne il reciproco.
- Muovete ora P
- Avete conferma di quanto affermato in precedenza sui punti in cui l'ellisse ha curvatura massima o minima?

…………………………………………………………………………………………

4. Una proprietà del centro del cerchio osculatore

- Spostate h facendo in modo che i due punti P_1 e P_2 non coincidano
- Tracciate la retta passante per O e per P e la retta passante per P_1 e P_2
- Tracciate infine la retta perpendicolare a OP e passante per P
- Muovete ora h facendo di nuovo in modo che P_1 e P_2 tendano a coincidere.
- Che cosa osservate sulle rette in figura?

La retta per P1 e P2 P_1 e P_2 tende a coincidere con la perpendicolare a OP passante per P

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Potete concludere che il centro del cerchio osculatore nel punto P appartiene alla retta ...perpendicolare.............................. alla retta tangente alla linea nel punto P

5. La curvatura di qualche altra linea nel piano

- Pulite la figura lasciando solo l'ellisse e i punti che l'hanno generata, il punto P e il cerchio osculatore in P
- Spostate i punti della figura in modo da ottenere un'iperbole e quindi muovete P
- La curvatura nei punti dell'iperbole è costante?

No …………………………………………………………………………………………

- In quali punti la curvatura è massima?

Nei vertici

- Ci sono punti in cui è minima? Che cosa succede al cerchio osculatore quando la curvatura tende a essere minima?

Tende a essere minima all'infinito, quando si confonde con l'asintoto e quindi ha curvatura nulla.

- Adesso provate a rispondere a queste domande (senza usare Cabri):
  - quanto vale la curvatura in un qualsiasi punto di una retta?
  - quanto vale la curvatura in un qualsiasi punto di una circonferenza di raggio r?
  - la curvatura di una parabola è costante in tutti i suoi punti? Se sì perchè, se no come cambia?

Curvatura retta = 0

Curvatura circonferenza uguale a 1/r

Curvatura parabola cambia ed è massima nel vertice

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
L'approfondimento seguente non verrà utilizzato nel seguito, è una interessante digressione che fa capire il ruolo del coefficiente di x^2 nella parabola, ma può essere saltato.

6. Approfondimento: la curvatura della parabola $y = ax^2$ nel vertice *O*=(0,0)

Si può far prima esplorare la situazione con Cabri come hanno già fatto per l'ellisse e l'iperbole, oppure presentare la situazione alla classe utilizzando il file curvatura2.fig

Le circonferenze tangenti all'asse x nell'origine hanno equazione $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, mettendole a sistema con la parabola $y = ax^2$ otteniamo $x^2 + (ax^2 - r)^2 = r^2$.

Sviluppando i calcoli abbiamo $a^2x^4 + (1 - 2ar)x^2 = 0$.

La circonferenza che approssima meglio è quella in cui le quattro intersezioni coincidono e la si ottiene se $1\text{-}2ar = 0$. Abbiamo quindi che $r = 1/(2a)$

La curvatura della parabola nel suo vertice è quindi $k = 2a$.

Che informazioni vi da quindi il coefficiente di x^2?

All'aumentare di *a* (positivo) aumenta del doppio la curvatura, quindi *a* ,oltre a essere determinante per la concavità, lo è per la curvatura della parabola nel suo vertice.