Scheda insegnante: SFERA 4

sul libro : capitoli 2.5 - 2.6
capitolo 3.6

Descrizione

- **Prerequisiti :**

i contenuti di SFERA1 e SFERA2

- **Obiettivi :**

- esplorare le proprietà di triangoli sulla superficie sferica
- scoprire che la somma degli angoli interni è maggiore di 180° e non è costante
- mettere in relazione l'area di un triangolo con il suo eccesso angolare

- **Tempi :** una unità oraria (tempi supplementari se si sviluppano gli approfondimenti)

- **Materiali / strumenti:**
  - semisfere trasparenti
  - striscioline e pennarelli
  - nastri graduati, righelli, goniometri, strumenti per rilevare angoli sulla superficie sferica
  - fogli di carta, forbici
  - copie della scheda SCHEDA 4 per lo studente
    copie dell'Allegato SFERA4_lunula
  - file di Cabri3D : SFERA4_ang_esterno

- **Modalità di lavoro degli studenti:**

lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante.

- **Modalità di lavoro dei docenti**

Gli insegnanti lasciano liberi gli studenti di effettuare prove e deduzioni ma vigilano sulla corretta effettuazione delle costruzioni e delle misure (in particolare sull'operazione di rilevamento degli angoli dei triangoli sferici).
Se necessario guidano gli studenti nella comprensione dell'allegato sul calcolo dell'area della lunula e del triangolo.

- **Modalità di effettuazione del monitoraggio:**

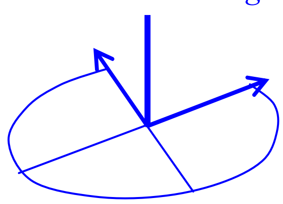
le stesse già descritte nella scheda SFERA 1.

Triangoli sulla sfera

A. Definizioni preliminari

Se continuiamo a lavorare sulla semisfera già considerata nella scheda 1.3, la definizione di **segmento** si semplifica**:** *perché*? (*esiste un solo tratto di geodetica che congiunge due punti, eccezion fatta per punti che si trovino sull'equatore della semicirconfe-renza)*	DEFINIZIONE: presi due punti *A* e *B* su di una semisfera si dice **segmento** … *la parte di geodetica tra di essi compresa.*
Diventa inoltre più semplice defi-nire un triangolo ⟶	DEFINIZIONE : presi tre punti *A*, *B*, *C* su di una semisfera si dice **triangolo** *la figura delimitata dai tre archi di geodetica tracciabili tra di essi*

B . Ci sono differenze tra i triangoli del piano e i triangoli sferici?

sulla sfera	**sul piano**
Scegliete tre punti *A, B* e *C* sulla semisfera e congiungeteli con tratti ben "diritti". Misurate i lati ………… *(con ilnastro graduato)* Misurate gli angoli. (*suggerimento: per le misure degli angoli può essere utile costruirsi un dispositivo che consenta di porsi nel piano tangente alla superficie sferica (due semicerchi incernierati nel centro, che possano ruotare fino ad allineare i profili con le proiezioni dei lati dell'angolo)*  Somma dei tre angoli = .. *maggiore di 180°*	Prendete un foglio di carta e, aiutandovi con un compasso, disegnate un triangolo *A'B'C'* che abbia i tre lati uguali a quelli misurati sulla sfera. Successivamene misurate i tre angoli: $\angle A'$ = …….. $\angle B'$ = …….. $\angle C'$ = ……… Quanto vale la somma dei tre angoli? (Concorda con quanto conoscete ?) …*ovviamente 180°.* Ritagliate il triangolo piano e appoggiatelo sul triangolo sferico. Cosa osservate? *Il triangolo di carta è visibilmente meno esteso e anche i vertici non coincidono (il triangolo piano appare complessivamente interno a quello sferico), perché i lati rettilinei del triangolo di carta non corrispondono, anche cercando di farli aderire, a dei tratti di geodetica.* **Dal confronto tra le due somme, cosa si osserva?** *La somma degli angoli interni del triangolo sferico è maggiore di* π.

<table>
<tr><td colspan="2">C. E se si cambia triangolo ?</td></tr>
<tr><td>sulla sfera</td><td>sul piano</td></tr>
<tr><td>Allontanate tra loro i punti A, B, C e disegnate un secondo triangolo DEF, più grande, “concentrico” rispetto al primo .
Ripetete le operazioni di misura:

DE= ....EF= ....
DF= ....

∠D = …….. ∠ E = ……..

∠ F = ……….
Somma dei tre angoli = …………</td><td>Seguite lo stesso procedimento , disegnando e ritagliando il triangolo piano.
Cosa osservate rispetto al caso precedente?

Al crescere delle dimensioni del triangolo aumenta la differenza di estensione tra il triangolo piano e il triangolo sferico.
La somma degli angoli interni è aumentata .</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cosa si può dunque affermare, in generale, sui triangoli sferici?
La somma degli angoli interni è maggiore di 180° e non è costante.
Quale relazione sembra esserci tra dimensioni del triangolo e somma degli angoli interni?
Al crescere delle dimensioni, e dunque dell’area del triangolo, cresce la somma degli angoli interni.</td></tr>
</table>

D. Una dimostrazione Nell'allegato (SFERA4 lunula), *(reperibile nella cartella Corredo_Sfera)*, è presente una semplice dimostrazione che mette in relazione l'area di un triangolo sferico con la somma dei suoi angoli interni (ovvero con il valore per cui essa eccede rispetto alla somma degli angoli interni propria di tutti i triangoli del piano).

$$\text{Somma angoli interni} = 180° + \frac{Area\_triangolo}{R^2}$$

Esercitazione

Verificate la validità della relazione dimostrata nell'Allegato, considerando i seguenti triangoli :

T_1 : ha un vertice nel polo e gli altri due sono sull'equatore in posizione diametralmente opposta.

Area *(quale frazione dell'intera sup sferica*[1] *?)=1/4 della sup. sferica* $=\pi R^2$

Somma degli angoli = 2π

Eccesso angolare = π

T_2 : ha un vertice nel polo, e in esso l'angolo è retto. Gli altri due vertici sono sull'equatore.

Area *(che frazione dell'intera sup sferica*[1] *?)= 1/8 della sup sferica =*

Somma degli angoli = $3\pi/2$

Eccesso angolare = $\pi/2$

T_2 è un triangolo particolare: di che tipo di triangolo si tratta? *equilatero*

QUESITO 1: ricordando quanto di non euclideo si è visto finora sulla superficie sferica, cosa si potrà dire a proposito di quadrati, rettangoli (ovvero quadrilateri con 4 angoli retti) e, in generale, di parallelogrammi sulla sfera?

E' evidente che, non essendoci parallele, non possono esserci parallelogrammi e dunque non possono esserci né quadrati né rettangoli. E' interessante osservare che è però possibile costruire figure che abbiano 4 angoli retti (le maglie del reticolo meridiani/paralleli) ma con due dei lati che non sono "rettilinei", così' come è possibile costruire quadrilateri con quattro lati rettilinei congruenti, ma in tal caso gli angoli non sono retti. In generale infatti, così come la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°, in un quadrilatero sferico la somma degli angoli interni è maggiore di 360°.

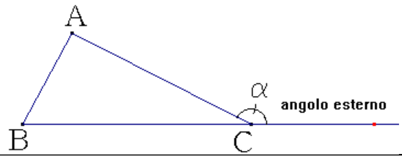
QUESITO 2: sulla sfera non esistono triangoli simili (ovvero con gli angoli a due a due congruenti). VERO o FALSO ? Perché ?

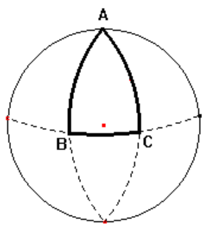
Per la relazione che lega la somma degli angoli interni all'area del triangolo, due triangoli simili, avendo la stessa somma degli angoli interni devono avere anche la stessa area: sono dunque necessariamente congruenti.

APPROFONDIMENTI

Nella geometria euclidea il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo è un'applicazione del teorema dell'angolo esterno. Sarà valido quest'ultimo sulla sfera?

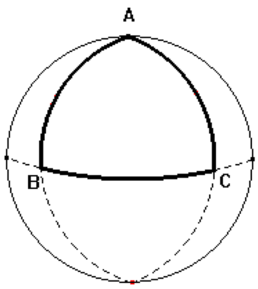
[1] Area della sup sferica = 4 volte l'area del cerchio massimo = $4\pi R^2$

<table>
<tr><td colspan="2">Teorema dell’angolo esterno (nella formulazione propria della geometria assoluta, che prescinde dal V° Postulato di Euclide e dall’inverso del Teorema degli angoli alterni interni):
In un qualsiasi triangolo, un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti.


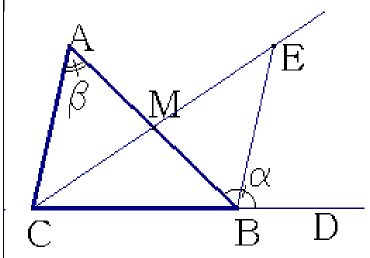
Ad esempio, in figura
$\alpha > \widehat{A}$ e $\alpha > \widehat{B}$</td></tr>
<tr><td>Costruite sulla sfera un triangolo ABC pensando ad A come un polo e tracciando quindi da A due archi di meridiani (abbastanza vicini) e, a congiungerli, un tratto di equatore.
Riproducete con un disegno sul foglio la costruzione effettuata:

</td><td>Analizzate la situazione:

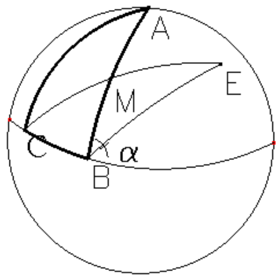
qual è l’ampiezza degli angoli che hanno come lato l’equatore , sia interni che esterni?
…sono tutti retti…

qual è l’ampiezza dell’angolo tra i due archi di meridiano?
…è minore di 90°………………………………

La tesi è dunque valida?
No perché l’angolo esterno è anch’esso retto e dunque non maggiore di entrambi gli angoli non adiacenti.</td></tr>
<tr><td>Prendete in considerazione altri triangoli, mantenendo fisso il polo A e muovendo B in modo da aumentare progressivamente l’angolo tra i meridiani

</td><td>Come si modifica la situazione? Il teorema è valido?
L’angolo tra i meridiani ad un certo punto supera i 90° e dunque anch’esso diventa maggiore dell’angolo esterno.

Considerate i casi in cui l’angolo tra i meridiani è piatto o giro (osservando le caratteristiche del triangolo e del suo angolo esterno).
Quando tale angolo è piatto il triangolo diventa una lunula.
Quando invece diventa un angolo giro i due vertici della base finiscono per coincidere e l’angolo esterno diventa interno.
La violazione di quale fra i postulati di Euclide rende possibile, sulla sfera, l’ultimo caso particolare?
Il secondo postulato: sulla sfera una retta non può prolungarsi indefinitamente perché è una linea chiusa, limitata.
In definitiva il teorema dell’angolo esterno è valido sulla sfera?
NO</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">E’ interessante ripercorrere la dimostrazione del teorema dall’angolo esterno nel piano e provare a riprodurlo sulla sfera, per scoprire in quali passaggi si evidenziano le differenze che portano a negarne la validità.</td></tr>
<tr><td>Dimostrazione del teorema dell’angolo esterno nel piano</td><td>Analizziamo la situazione sulla sfera</td></tr>
<tr><td>Considerate il triangolo ABC e il suo angolo esterno α; segnate M punto medio tra A e B, sulla semiretta di origine C e passante per M trasportate il segmento CM, ottenendo il punto E, tale che $ME \cong CM$; congiungete E con B.


1°) Il punto E sarà interno all’angolo $A\hat{B}D = \alpha$
Confrontate ora i due triangoli ACM e MBE: sarà facile dimostrare che sono congruenti perché.. I° criterio.
Quindi l’angolo $C\hat{A}M = \beta$ sarà congruente all’angolo $M\hat{B}E$, che è solo una parte dell’angolo α (essendo E interno all’angolo α); quindi β sarà minore di α.</td><td>Proviamo a ripercorrere tale dimostrazione sulla sfera, prestando particolare attenzione alle parti in grassetto.
Riprendete la serie di triangoli sferici visti prima (considerando A come un polo, C e B sono sull’equatore) ed effettuate una costruzione analoga a quella utilizzata nel piano.
1° caso: angolo CAB < 90°


E è interno ad α?.... Si
I due triangoli ACM e MBE sono congruenti? ….Sì, analoghe considerazioni del piano
Quanto misura AC? … un quarto di circonferenza massima
Quanto misura BE? ……È congruente ad AC

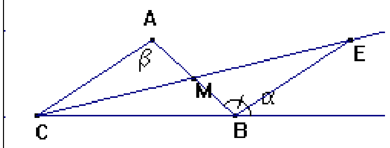
⇨ Angolo esterno α è … maggiore… CAB

Ricordiamo inoltre che l’angolo α è comunque non maggiore, bensì congruente all’angolo ACB, in quanto entrambi retti.

Conclusione: in questo 1° caso l’angolo esterno risulta… maggiore o uguale …… degli angoli interni non adiacenti.</td></tr>
</table>

2) Potrebbe essere $\beta \cong \alpha$?

Analizzate la possibilità di continuare ad aumentare β muovendo *A*



come si modificano le posizioni di *M* ed *E*?

mentre A si avvicina alla base, anche M ed E si avvicinano alla retta CB

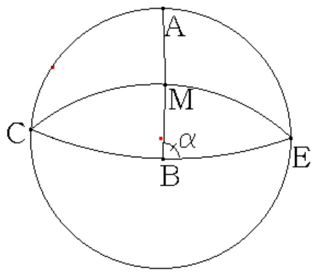
β ed α non potranno diventare congruenti perché si avrebbe un triangolo degenere in quanto *A, M* ed *E* finirebbero per appartenere alla retta *CB*

3) β non può, tanto meno, essere maggiore di *α*, perché *E* dovrebbe essere esterno all'angolo α (*ed esiste un teorema (Pasch) che dimostra che per qualsiasi triangolo il* punto *E*, *ottenuto con la costruzione indicata, è interno all'angolo esterno α)*

Dunque nel piano l' angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti

Provate ora, tenendo fisso *B*, ad allontanare *C* da *B* lungo l'equatore fino ad ottenere:

2° caso: angolo *CAB*= 90°



E è interno ad *α* ? ... *no, è sull'equatore, allineato a B*

I due triangoli *ACM* e *MBE* sono congruenti? …*Sì, sono 1/8 di superficie sferica*

Quanto misura *AC*? ….*Un quarto di circonferenza massima*

Quanto misura *BE*?.... *È congruente ad AC*

L'angolo α *è congruente a* CAB

⟹ Conclusione: nel 2° caso **l'angolo esterno α è ..*congruente*…. ad entrambi gli angoli interni**

3° caso Angolo *CAB* > 90°

E è interno ad α ? .. no, è esterno

I due triangoli ACM e MBE sono congruenti?... *Sì, con considerazioni analoghe a quelle effettuabili nel piano*

Quanto misura *AC*? … *Un quarto di circonferenza massima*

Quanto misura *BE*?... *È congruente ad AC*

L'angolo α…. *è minore di CAB*

⟹ Conclusione: nel 3° caso **l'angolo esterno *α* è ….*minore o uguale*…. degli angoli interni**

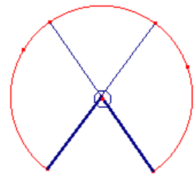
Cosa possiamo concludere al termine del confronto

La costruzione indicata dalla dimostrazione del teorema è in tutti i casi perfettamente eseguibile e si ottiene sempre la coppia di triangoli congruenti che ne è il perno: mentre però nel piano il punto E è necessariamente interno all'angolo esterno, sulla sfera esso può esserne esterno e ciò produce la conseguenza che l'angolo esterno di un triangolo sferico può essere maggiore, congruente o minore di un angolo interno senza creare contraddizione.

In che modo dalla caduta del Teorema dell'angolo esterno discende il fatto che la somma degli angoli interni sia maggiore di 180°?
Sul piano il fatto che l'angolo esterno sia maggiore degli angoli interni non adiacenti apre la possibilità (che è poi verificata) che esso sia pari alla loro somma; sulla sfera un angolo esterno minore anche solo di uno degli angoli interni comporta che già la somma di quest'ultimo con l'interno adiacente superi l'angolo piatto.
Ultima domanda: avete osservato la posizione dei vari punti *E* disegnati sulla sfera al variare dell'ampiezza dell'angolo *CAB*?
Sono allineati: visto che BE risulta sempre uguale a un quarto di circonferenza massima tutti i punti E si trovano sull'equatore rispetto al polo B.
Vedere eventualmente anche i casi *CAB* =180° *(E punto antipodale di A*) e *CAB* > 180°(*si ottengono situazioni simmetriche a quelle già analizzate).*

COMMENTI E INDICAZIONI

Le proprietà dei triangoli sferici sono una delle più vistose conseguenze della non validità, sulla sfera, del postulato della parallela. La strada seguita è, anche in questo caso, quella dell'osservazione e della manipolazione diretta. Sulle semisfere già adottate nell'attività precedente, gli studenti disegnano dei triangoli e poi, effettuando misure il più possibile precise, ne misurano i lati (nastro graduato) e gli angoli. Per la misura degli angoli, per i quali i classici goniometri possono risultare ingombranti e di difficile lettura, può essere utile intendere l'angolo come rotazione e fabbricarsi un qualche dispositivo che rilevi la divaricazione tra i due lati dell'angolo idealmente proiettati sul piano tangente nel vertice.
Un semplice dispositivo, cui si fa riferimento nella scheda, si può costruire utilizzando un foglio di acetato rigido dal quale ritagliare due semicerchi, che, incernierati nel centro, possano ruotare, allineando i diametri nelle direzioni dei lati dell'angolo. Appoggiato poi sul goniometro consente la lettura.



Momento essenziale dell'attività è la costruzione su di un foglio piano di triangoli aventi gli stessi lati dei triangoli sferici. Anche se dal punto di vista del risultato la differenza può non essere sensibile, fare attenzione che gli studenti misurino i lati dal triangolo sferico direttamente con il nastro graduato e non con il compasso: è importante far loro osservare che in tal modo non si misura il lato che giace sulla superficie sferica, bensì un segmento di retta che, in 3D, congiunge i due vertici passando all'interno della sfera (una corda). I triangoli di carta ritagliati e appoggiati sui loro gemelli sferici mostrano in modo evidente che la somma degli angoli interni deve essere, per questi ultimi, maggiore di 180°.

Gli approfondimenti che sono stati posti in fondo alla scheda hanno lo scopo di inserire il risultato ottenuto "sperimentalmente" nel più rigoroso discorso assiomatico. Sono stati presi in considerazioni solo casi nei quali i triangoli hanno un lato sull'equatore e il vertice opposto nel polo, per ragioni di semplicità di esecuzione e immediata evidenza; non si è voluto estendere la discussione a triangoli di altro tipo per non appesantire l'attività.
Anche per le attività legate alla dimostrazione si consiglia di eseguire sempre prima esplorazioni direttamente sui materiali e solo in un secondo momento effettuare i disegni.

N.B. La dimostrazione del teorema nel piano può essere utilmente affiancata (o sostituita) dall'esplorazione di un modello in Geogebra facilmente realizzabile.
La situazione esaminata in parallelo sulla sfera può essere sostituita dalla manipolazione di un analogo modello realizzato in **Cabri 3D**, fornito in allegato nel file **SFERA_ang_esterno,** reperibile nella cartellla SFERA_CORREDO