Scheda insegnante: SFERA 2

sul libro: capitolo 2.3
capitolo 3.5

Descrizione

- **Prerequisiti:**
  - i contenuti di SFERA1
  - avere una, anche minima, familiarità con le definizioni e le proprietà degli enti geometrici fondamentali della geometria del piano
  - possedere il concetto di assioma e conoscere il ruolo e il significato degli assiomi nella geometria di Euclide.
  -

Obiettivi:
- testare la validità, sulla sfera, di definizioni e assiomi propri della geometria piana, mediante manipolazioni dirette sulla superficie sferica
- ridefinire gli enti fondamentali e riformulare gli assiomi per una geometria sulla sfera
- confrontarsi con la formulazione originale degli assiomi euclidei
- discutere in particolare le implicazioni dell'enunciato originale dell'assioma della parallela

- **Tempi:**
  due ore, comprensive di discussione e sistematizzazione (tempi supplementari se si sviluppano gli approfondimenti)

- **Materiali / strumenti:**
  - palloni o sfere di altro genere
  - striscioline, pennarelli
  - copie della scheda SFERA 2 - per lo studente

- **Modalità di lavoro degli studenti:**
  lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante

- **Modalità di lavoro dei docenti:**
  gli insegnanti devono lasciare liberi gli studenti di appropriarsi dei significati di definizioni e assiomi effettuando tutti i raffronti tra rappresentazioni sul piano e analoghe rappresentazioni sulla sfera; se necessario devono aiutarli a decifrare gli enunciati euclidei originali e incoraggiarli a compilare le schede, punto di partenza per discussione e sistematizzazione

- **Modalità di effettuazione del monitoraggio:**
  le stesse già descritte nella SCHEDA 1

Problema: la geometria sulla sfera è euclidea?	
Scopo del lavoro è approfondire la scoperta delle differenze tra la geometria euclidea del piano e la geometria definibile sulla superficie sferica, mediante un'analisi delle proprietà degli enti geometrici e dell'esportabilità degli assiomi. (in corsivo rosso sono riportate le diciture originali di Euclide).	Nuova formulazione di definizioni, proprietà, assiomi relativi agli enti geometrici fondamentali.

Definizioni fornite ⇩ Risultati attesi ⇩

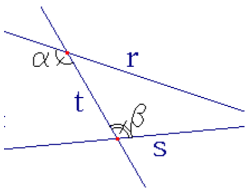
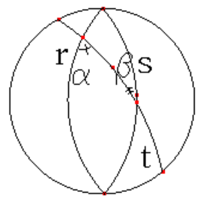
SPAZIO: il piano 2 Dimensioni	SPAZIO: la superficie sferica 2 Dimensioni (visione intrinseca) 3 Dimensioni (visione estrinseca)
Il concetto di **PUNTO** conserva il suo significato primitivo in qualsiasi spazio. Le superfici e le linee, le rette e le geodetiche in particolare sono ovunque concepibili come insiemi di punti. Analizziamo le proprietà che consentono di mettere in risalto le differenze tra geometria sul piano e geometria sulla sfera.	
PIANO **E' indefinitamente esteso.**	**SUPERFICIE SFERICA** *Ha una estensione **finita.***
RETTA **Si può prolungare indefinitamente** *II° postulato: "che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta".* *I° postulato: "che si possa condurre una linea retta da un punto a ogni altro punto ".* Questo postulato viene così più semplicemente espresso: **per due punti passa una e una sola retta.** L'intersezione di due rette distinte o è vuota oppure è formata da **un solo punto.** Ogni retta divide il piano in due **semipiani.** **Assioma di ordinamento:** su ogni retta si possono stabilire due ordinamenti totali, l'uno opposto all'altro, rispetto ai quali, dati due punti A e B appartenenti alla retta, è possibile dire se A precede B oppure se lo segue.	**GEODETICA** • *Ha una lunghezza **finita** ed è una linea chiusa (visione 3D).* • *In visione 2D si percepisce la finitezza solo se, continuando a camminare, ci si accorge di ripassare dal punto di partenza.* • *Da ogni punto si può condurre una linea diritta verso qualsiasi altro punto della superficie sferica.* • *Per due punti (qualsiasi) della superficie sferica passa una e una sola geodetica **ma ci sono infinite coppie di punti per i quali ne passano infinite** (in visione 3 D sono tutte le coppie di punti antipodali).* • *L'intersezione di due circonferenze massime è sempre costituita di **due punti.*** • *Ogni circonferenza massima divide la superficie sferica in due **semisfere.*** • *Sulle circonferenze **non è possibile stabilire un ordinamento**: presi due punti A e B, ciascuno di essi segue e precede l'altro.*
SEMIRETTA Fissati su di una retta un punto A e un ordinamento, si dice semiretta l'insieme di tutti i punti della retta che seguono (o che precedono) A.	*Fissato un punto su di una circonferenza massima, l'insieme dei punti che lo seguono coincide con l'insieme dei punti che lo precedono ed entrambi si sovrappongono all'intera circonferenza stessa.*

SEGMENTO Fissati due punti *A* e *B* su di una retta, si dice segmento di estremi *A* e *B* l'insieme dei punti che stanno tra *A* e *B*.	*Fissati due punti su di una circonferenza massima, si dice segmento ciascuno dei due sottoinsiemi di punti per i quali è possibile dire che sono compresi tra A e B.*
ANGOLO Due rette che si intersechino dividono il piano in 4 **angoli**, ciascuno dei quali è una porzione di piano, delimitata da due delle semirette uscenti dal punto di intersezione.	• **Visione 2D locale**: *due geodetiche incontrandosi in un punto determinano una partizione della superficie in 4 angoli.* • **Visione 3D** *due circonferenze massime che si incontrino in un punto si incontrano necessariamente anche nel suo opposto, generando una suddivisione dell'intera superficie sferica in 4* ***biangoli*** *(spicchi, detti* ***lunule****).* • **Biangolo** = *figura geometrica con* ***due*** *lati "rettilinei" e* ***due*** *angoli.*
RETTE PERPENDICOLARI *Definizione: "quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali tra di loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata".* *IV° Postulato : "che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro".* **Unicità della perpendicolare.** Data una retta e un punto (esterno a essa oppure no) è unica la perpendicolare alla retta passante per il punto.	• *Quando due circonferenze massime intersecandosi determinano 4 lunule uguali, ciascuno degli 8 angoli è un angolo retto, e sono tutti uguali tra loro. Le due circonferenze massime sono perpendicolari tra loro. (Come esempio basta disegnare un meridiano e l'equatore).* • *Idem sulla sfera* *Una* ***lunula retta*** *ha i due lati tra loro perpendicolari e la somma degli angoli interni è di 180°.* • *Sulla sfera da ogni punto si possono condurre infinite circonferenze massime perpendicolari a quella circonferenza massima che, rispetto al punto, è un equatore.*

RETTE PARALLELE Due rette si dicono parallele se hanno intersezione vuota. **Assioma**: Data una retta *r* e un punto *P* del piano, è unica la retta passante per *P* e parallela a *r*. **Euclide aveva formulato così il V°** *Postulato: Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte (coniugati interni) minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*	• *Presa sulla superficie sferica una circonferenza massima e un punto P fuori di essa* ***NON ESISTE*** *una circonferenza massima passante per il punto P che NON intersechi la circonferenza massima data.* • *Due geodetiche tagliate da una terza si incontrano tra loro* ***da ciascuno dei due lati rispetto alla terza che le taglia, indipendentemente dal valore degli angoli coniugati interni*** *(incluso il caso in cui la somma dei due coniugati interni è un angolo piatto).*
Conclusione: poiché sulla superficie sferica i Postulati II° e V° di Euclide non sono validi, e il I° è violato per tutte le coppie di punti antipodali, la geometria sulla sfera è una geometria NON EUCLIDEA.	

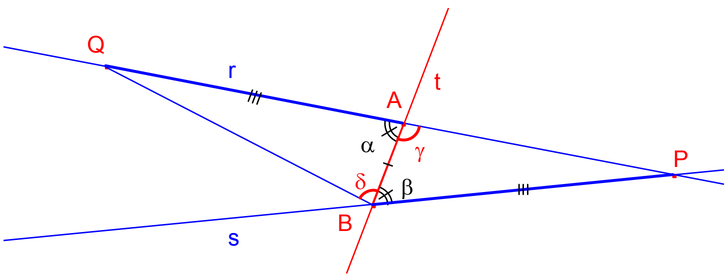
APPROFONDIMENTI

Visto che la geometria sulla sfera non è euclidea (non sono validi il I° e il V° postulato), non tutti i teoremi validi sul piano lo saranno anche sulla sfera.
Proviamo in particolare a considerare il **teorema degli angoli alterni interni** che, nella geometria euclidea del piano, è una fondamentale cerniera tra I° e V° Postulato. Lo mettiamo a confronto in parallelo sul piano e sulla sfera.

Sul piano	**Sulla sfera**
Situazione: due rette r e s , tagliate dalla trasversale t, formano gli angoli alterni interni α e β  Le due rette sono tra loro …*incidenti*……… I due angoli sono …*disuguali*…………	Riproduci sulla sfera una situazione analoga, disponendo le tre geodetiche in modo da avere angoli alterni interni differenti tra loro. Effettua qui sotto un disegno illustrativo  Le geodetiche r ed s sono tra loro ….*incidenti* I due angoli sono ….*disuguali*

E' possibile disporre le rette, sul piano, e le geodetiche, sulla sfera, in modo che i due angoli α e β diventino congruenti?

Nel piano, il teorema degli angoli alterni interni prova ad ammettere , per assurdo, che α possa divenire congruente a β pur restando r ed s incidenti. Nel corso della dimostrazione si evidenzia però una grave contraddizione con il I° Postulato di Euclide .

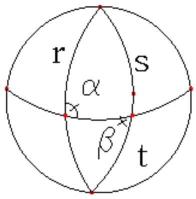


Se infatti $\alpha \cong \beta$, sarebbe possibile, prendendo $QA \cong BP$, costruire un triangolo ABQ congruente ad ABP da parte opposta rispetto a t; ciò comporterebbe la congruenze tra γ e δ e in definitiva la necessità che anche $\delta+\beta$ equivalgano a un angolo piatto, come $\alpha+\gamma$ che sono adiacenti; in tal modo Q, B e P risulterebbero allineati su di una stessa retta. La conseguenza assurda è che dunque tra i punti P e Q finirebbero per passare due diverse rette, una per A e una per B.

La conclusione cui perviene il Teorema nel piano è dunque che **se $\alpha \cong \beta$, le due rette sono tra loro parallele**.

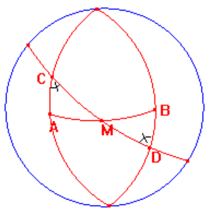
⇩

Sulla sfera: disponete due geodetiche *r* ed *s* in modo che formino angoli alterni interni congruenti con un geodetica trasversale *t*.
(*sugg: Fissate r ed s e poi variate la posizione di t fino a trovare una situazione dalle caratteristiche volute*).
Riportate un disegno illustrativo, commentando la disposizione.



Se r ed s sono nella posizione di due meridiani e t in quella dell'equatore , t risulta perpendicolare a r e a s e dunque si formano angoli congruenti

Come sono disposte tra loro *r* ed *s* ? …*incidenti*
Quanto valgono i due angoli α e β ….*sono entrambi retti*



Variante possibile: t passa per il punto medio dell'arco di equatore AB

Provate a commentare perché la dimostrazione per assurdo, efficace sul piano , non è invece praticabile sulla sfera.
Sulla sfera si può effettuare l'ipotesi (assurda nel piano) che possa essere $\alpha \cong \beta$, pur essendo r ed s incidenti, ***senza giungere ad una contraddizione****:infatti sulla sfera due rette si incontrano necessariamente in due punti, ovvero* ***per due punti*** *(antipodali)* ***possono passare due distinte rette*** *che formino angoli alterni interni congruenti se ne attraversano una terza. Poiché NON vale il I° Postulato diventa indimostrabile il Teorema degli angoli alterni interni e con esso la possibilità di avere sulla sfera delle geodetiche parallele.*

COMMENTI E INDICAZIONI PER L'INSEGNANTE
Il percorso prospettato dalla scheda, il cui scopo è passare al vaglio i fondamenti della geometria euclidea per testarne la validità sulla superficie sferica, non è una costruzione rigorosa. Non intende infatti sostituire ciò che è presente nei manuali di geometria piana, quanto fare una raccolta delle affermazioni nelle quali sono condensabili le conoscenze sui fondamenti della geometria piana che gli studenti dovrebbero, mediamente, possedere.
Negli enunciati non si distingue tra definizioni, assiomi o teoremi, eccezion fatta per i postulati di Euclide, che ricevono un particolare risalto e vengono presentati nella loro formulazione originale: questo perché uno degli obiettivi è stabilire che la geometria sulla sfera è NON euclidea, e ciò è affermabile solo negando la validità di taluni dei suoi postulati.

Negli APPROFONDIMENTI ci si confronta con il teorema con il quale la geometria neutrale introduce l'esistenza della parallela (e non la sua unicità, che non può che essere postulata). Lo scopo non è di rimettere in dubbio l'assenza di parallele sulla superficie della sfera quanto di sottolineare il fatto che la non esistenza della parallela è conseguenza della violazione del 1° Postulato, ovvero della possibilità sulla sfera che per due punti (antipodali) passino infinite rette (ovvero che due rette abbiano necessariamente due intersezioni).