Scheda insegnante: SFERA 6

sul libro: capitoli 9.1.2 - 9.2

Descrizione

- **Prerequisiti** :
  - aver effettuato le attività previste nella scheda Sfera5
  - conoscere le funzioni goniometriche fondamentali

- **Obiettivi :**
  - accostarsi alle problematiche della cartografia
  - sperimentare le modalità con le quali si effettua una proiezione cilindrica e valutarne le qualità
  - adottare le correzioni del Mercatore e sperimentarne l'efficacia

- **Tempi :** due ore (o anche tre, se effettivamente si procede alla costruzione delle mappe)

- **Materiali / strumenti:**
  - semisfere con meridiani e paralleli tracciati
  - fogli di carta A3, righe e squadre, goniometri
  - striscioline e pennarelli
  - calcolatrici (o computer con Foglio di calcolo)
  - copie della scheda SFERA6 per lo studente

- **Modalità di lavoro degli studenti:**
  lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante

- **Modalità di lavoro dei docenti:**
  gli insegnanti devono lasciare liberi gli studenti di appropriarsi dei significati e di individuare le modalità operative necessarie alle costruzioni richieste e alla soluzione dei quesiti posti

- **Modalità di effettuazione del monitoraggio:**
  le stesse già descritte nella scheda SFERA 1

LA CARTA GEOGRAFICA

PROBLEMA del navigante: qual è la direzione giusta?

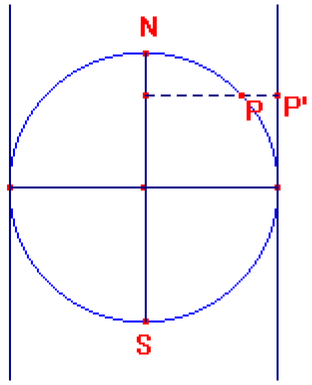
La bussola da sola non risolve i problemi di un viaggiatore: essa consente di mantenere una certa direzione, ma non è sufficiente per sceglierla. Se deve andare da un luogo *A* a un luogo *B*, il navigante deve conoscere le loro posizioni reciproche rispetto al sistema di riferimento terrestre. Ovvero deve disporre di una rappresentazione della superficie terrestre: una carta geografica.

A parte il mappamondo, quale fondamentale difficoltà, di natura geometrica, deve affrontare una carta geografica, di qualsiasi tipo essa sia ?

La sfera non è sviluppabile nel piano poiché è curva, a differenza di cilindro e cono che avendo curvatura nulla sono sviluppabili.

Tra le tante soluzioni sperimentate c'è quella di proiettare la sfera terrestre proprio su di un cilindro, tangente alla sfera lungo l'equatore.

Provate voi stessi a ragionare sulla proiezione



- Di fianco è rappresentata una sezione della sfera terrestre passante per il suo asse NS; le due rette tangenti sono le rette lungo le quali viene intersecato il cilindro che l'avvolge aderendo all'equatore; se da un punto dell'asse si conduce una perpendicolare, essa interseca la sfera in un punto P e, successivamente, il cilindro in un punto P': il punto P' è la proiezione di P sul cilindro. A ogni punto della sfera viene così a corrispondere un punto sulla superficie del cilindro.

a) Tutti i punti di uno stesso meridiano proiettati sul cilindro si disporranno lungo

………… *una stessa retta*……………………………………………………

e l'insieme dei meridiani andrà a costituire …. *una schiera di rette parallele, che si sovrappongono alle direttrici del cilindro.*

c) Ciascun parallelo, proiettato sul cilindro, in cosa si trasformerà?

…… *in una circonferenza di lunghezza pari all'equatore* ……………………………

d) Come si disporrà sul cilindro una sequenza di paralleli posti sulla sfera a latitudini regolarmente distanziate?

le circonferenze si disporranno in piani paralleli con distanza tra loro via via decrescente…..

e) In particolare il Polo dove verrà proiettato?

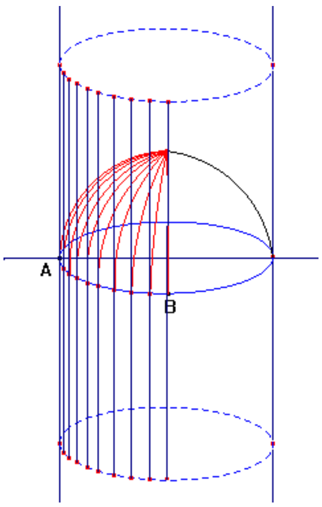
………… *il Polo verrà proiettato anch'esso su di un'ultima circonferenza* ……..

f) Se alla fine si tagliasse il cilindro lungo un meridiano, e lo si aprisse, cosa si otterrebbe?

Due fasci di rette parallele, tra loro ortogonali, che formano una rete di rettangoli con altezze via via decrescenti andando verso i poli.

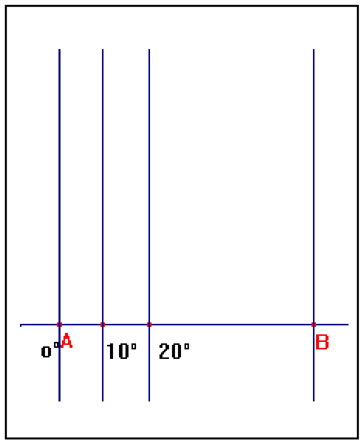
Costruiamo la carta a proiezione cilindrica.
Limitiamoci allo spicchio di sfera sul quale nella scheda SFERA5 avete costruito il riferimento di meridiani e paralleli.

La proiezione dei meridiani:



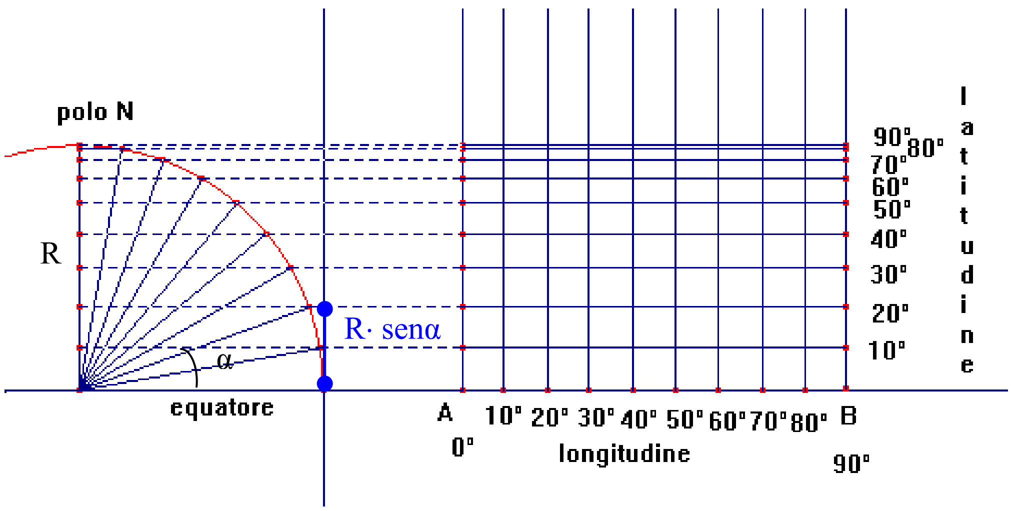
adottiamo una scala di 1 a 1, dunque riportiamo su di un foglio (*un formato A3 disposto in verticale*) la proiezione dell'arco *AB*, ovvero un segmento rettilineo lungo quanto *AB*, e disponiamo su di esso le proiezioni dei 10 meridiani:

fac-simile



La proiezione dei paralleli:
suggerimento

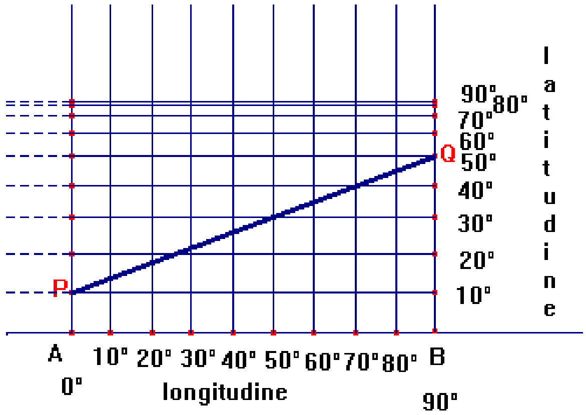
- prendete il cerchio di base della semisfera preparato nel corso del lavoro sulla scheda Sfera5 (su di esso avevate suddiviso in 9 parti uno spicchio da 90°) e allineate il primo dei raggi con la retta che rappresenta l'equatore; gli altri raggi corrispondono alle latitudini dei paralleli tracciati sulla semisfera
- proiettate sui meridiani i punti presenti sull'arco di circonferenza, tracciando delle parallele alla linea dell'equatore: ottenete in tal modo la rappresentazione dei paralleli



Osservando la costruzione effettuata dovreste riconoscere in essa il procedimento utilizzato per tracciare il grafico di una delle funzioni goniometriche fondamentali:
quale ? …… $y = sen\ \alpha$ ……………………….
Dunque, indicando con α la latitudine di un qualsiasi parallelo, a che distanza dall'equatore esso viene a disporsi sulla carta ?
…………….*altezza sull'equatore*= $R \cdot sen\,\alpha$.

Ora che disponete del reticolo di una carta geografica a proiezione cilindrica assiale provate a verificare se essa risolve il problema del navigante.

- Tracciate ad esempio una rotta tra il punto P (lon.0° e lat. 10°) e il punto Q (long 90° e lat. 50°).
- Rilevate l'angolo che la rotta forma con i meridiani.



- Riproducete il percorso sulla semisfera, partendo dal punto di coordinate uguali a P e riportando fedelmente, a ogni incrocio con un meridiano, lo stesso angolo rilevato sulla carta.

Si arriva sulla semisfera nel punto che

ha le stesse coordinate di *Q* ?…*NO*..

il problema del navigante è risolto? ..*NO*

Proprietà della carta a proiezione cilindrica assiale

E' interessante osservare che la carta così ottenuta è equivalente, ovvero conserva l'area. *(E' risaputo che l'area della superficie della sfera è equivalente all'area della superficie del cilindro con diametro di base e altezza uguali al diametro della sfera)*

Per verificarlo provate a calcolare :

- l'area dello spicchio di sfera considerato, in funzione del raggio R della sfera. (*suggerimento : a che porzione di superficie sferica equivale?*)
  ………..*è 1/8 della sfera, dunque* $\frac{1}{2}\pi R^2$……………..
- l'area del rettangolo cui lo spicchio viene a corrispondere sulla carta:
  $\left.\begin{array}{l}\text{la base è …}\mathit{1/4\ circonferenza}=1/2\,\pi R \\ \text{l'altezza equivale a … } R\text{……..}\end{array}\right\}$ e dunque l'area vale anch'essa $\frac{1}{2}\pi R^2$…

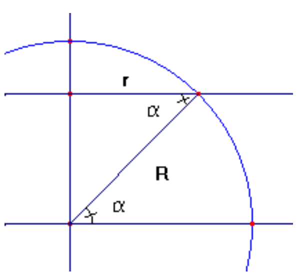
Approfondimento Anche localmente ogni maglia del reticolo meridiani/paralleli viene proiettata sulla carta in un rettangolo di uguale area; infatti:

I paralleli vengono dilatati

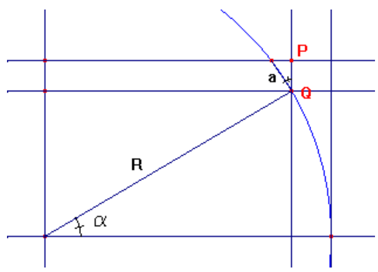
alla latitudine α il parallelo ha raggio $r = R\cdot\cos\alpha$ e dunque per riportarlo alla lunghezza dell'equatore viene moltiplicato per $1/\cos\alpha$; lo stesso vale per ogni tratto elementare di parallelo.

I meridiani vengono ridotti

alla latitudine α un arco elementare intercettato su di un meridiano, approssimabile da un segmento di lunghezza a, viene proiettato in un segmento $PQ = a\cdot \cos\alpha$.



Calcolando l'area di una maglia del reticolo sulla carta i due fattori moltiplicativi si elidono e si ottiene la stessa area della maglia corrispondente sulla sfera.

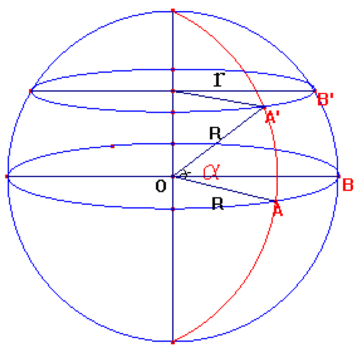


LA CORREZIONE DEL MERCATORE.

Un grande cartografo fiammingo (Gerardus Mercator), nel 1569 pubblicò la prima carta geografica che risolveva il problema del navigante: scelta una rotta su tale carta e imposto al timone l'orientamento indicato dalla bussola, si può sperare (ci sono purtroppo le correnti marine) di arrivare nel luogo voluto.

La carta del Mercatore è una carta a proiezione cilindrica, che contrasta l'effetto di schiacciamento progressivo imposto, dalla proiezione assiale vista prima, agli archi di meridiani: Mercatore introduce un fattore di correzione che, a ogni latitudine, applica ai meridiani lo stesso ingrandimento, lo stesso "stiramento" subito, a quella latitudine, dal parallelo. La conseguenza è l'isogonismo, ovvero la conservazione degli angoli, dalla quale discende la conservazione delle forme (di isole, continenti, linee di costa…).

Proviamo a capire come ha proceduto il Mercatore:
Nella proiezione cilindrica tutti i paralleli assumono la stessa lunghezza dell'equatore: in particolare gli archi di parallelo compresi tra due meridiani, assumendo tutti la stessa lunghezza dell'arco di equatore, subiscono allungamenti man mano più elevati al crescere della latitudine a cui si trovano.



Considerate ora la maglia *AA'B'B:* essa si proietta in un rettangolo, la cui base ha lunghezza pari all'arco *AB* di equatore.
Sapete calcolare la lunghezza dell'arco *A'B'* che si trova sul parallelo di latitudine α ? (*suggerimento:*

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{r}{R}$$ *, ovvero* $A'B'=AB\frac{r}{R}$ *; ma il rapporto* $\frac{r}{R}$ *si può esprimere per mezzo di α,* $\frac{r}{R}=\cos\alpha$ *)*

Per quale fattore bisognerebbe dunque moltiplicare *A'B'* per fargli raggiungere la stessa lunghezza di *AB*?

k= …*1/ cos α*………………..

Il Mercatore ha pensato di utilizzare questo stesso fattore moltiplicativo nel rettificare gli archi di meridiani *AA'* e *BB'*: in tal modo , essendo il rapporto tra i due "stiramenti" ortogonali uguale a 1, si mantengono gli angoli, le direzioni, le forme.

Con il metodo indicato il Mercatore ha rettificato ciascuno dei tratti in cui ciascun meridiano risulta suddiviso dalla sequenza di coppie di paralleli che interseca: in ogni tratto ha ricalcolato il fattore moltiplicativo relativo alla latitudine raggiunta. E' evidente che il risultato complessivo è tanto migliore quanto più fine è la suddivisione, ovvero quanto più piccolo è l'incremento di latitudine considerata.
Nel caso al quale state lavorando la suddivisione di 10° in 10° è assai rozza, ma vedrete che il risultato sarà comunque buono.

COSTRUZIONE DELLA CARTA DEL MERCATORE

Provate voi stessi a effettuare il calcolo, al fine di costruire la carta del Mercatore dello spicchio di semisfera di cui disponete

Le maglie dello spicchio di sfera considerato hanno aperture angolari di 10° di latitudine x 10° di longitudine. Considerate le maglie disposte lungo l'equatore:

quanto è lungo il loro arco di base ? (*suggerimento: che frazione dell'intera circonferenza?* ……………*1/36 della circonferenza =* ………………….

quanto sono lunghi gli archi di meridiani che ne costituiscono i due lati uguali?

………………*stessa lunghezza* ……………………………

Questo è il valore di riferimento per i calcoli successivi: esso è infatti pari all'arco di meridiano compreso tra due qualsiasi dei paralleli tracciati

Intervallo di latitudine	**Fattore moltiplicativo**	**Arco elementare di meridiano sulla sfera**	**Arco elementare proiettato**	**Arco proiettato complessivamente fino alla latitudine considerata** (somma degli archi elementari)
0° - 10°				
10°- 20°				
20° - 30°				
30° - 40°				
40° - 50°				
50° - 60°				
60° - 70°				

vedere oltre esempi di calcolo

Utilizzando i risultati di questi calcoli potete ora costruire la carta dello spicchio di semisfera.

Pensate ora come mettere alla prova la bontà di questa carta (*suggerimento : vedi la prova effettuata per la carta a proiezione cilindrica senza la correzione di Mercatore).*
Descrivete le operazioni effettuate

Tracciata una rotta rettilinea sulla carta, ad esempio da (0° long;20°lat) a (90°long;60°lat), si misura l'angolo che essa forma con i meridiani (la direzione che si dovrebbe imporre alla bussola) . Si cerca sulla semisfera lo stesso punto di partenza e si procede con un tratto che formi esattamente quell'angolo con il meridiano, fino a incontrare il meridiano successivo, rispetto al quale si rimisura lo stesso angolo, e così via fino a incontrare il meridiano di longitudine 90°.
Quali risultati avete ottenuto? *Si dovrebbe intersecare il meridiano di long 90° alla stessa latitudine raggiunta sulla carta .*

Il percorso tracciato sulla semisfera è una geodetica? *NO, come si verifica con la solita strisciolina.*
Tracciate la geodetica equivalente al vostro percorso e riportatela per punti sulla carta del Mercatore: cosa osservate ?
la geodetica sulla carta è una curva, incurvata verso il Nord.

In definitiva: qual è la via più breve tra le due?
Sulla sfera è ovviamente la geodetica.

Il problema del navigante è completamente risolto? *Il navigante ha ora una carta che gli consente di decidere una rotta che lo conduce nel luogo desiderato. Essa non è però la via più breve. Volendo percorrere la geodetica dovrebbe procedere a un continuo cambiamento dell'angolo della sua bussola e , dunque, dell'orientamento della sua imbarcazione.*

ESEMPIO DI CALCOLI
Per una sfera di raggio r = 10,5 cm

Circonferenza = 65,9 cm

Arco elementare (10°di latitudine) = (65,9 * 1/36) cm =1,8(3) cm

intervallo di latitudine		fattore moltiplicativo		arco elementare di meridiano	arco elementare proiettato	Arco proiettato complessivamente fino alla latitudine data
0°	10°	1/cos 10°	1,02	1,83	1,86	1,86
10°	20°	1/cos 20°	1,06	1,83	1,95	3,81
20°	30°	1/cos 30°	1,15	1,83	2,11	5,92
30°	40°	1/cos 40°	1,31	1,83	2,39	8,31
40°	50°	1/cos 50°	1,55	1,83	2,85	11,15
50°	60°	1/cos 60°	2,00	1,83	3,66	14,81
60°	70°	1/cos 70°	2,92	1,83	5,34	20,15

Il procedimento utilizzato per effettuare i calcoli, discretizzando la crescita della latitudine, può essere presentato anche a studenti privi degli strumenti dell'analisi matematica; con studenti che conoscano anche il calcolo integrale si può invece far osservare che, dal momento che la latitudine cresce con continuità, il fattore di moltiplicazione per una certa latitudine α dovrebbe essere calcolato mediante l'integrale $\int_{o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$.

COMMENTI E INDICAZIONI
Quest'espansione sulle carte geografiche può apparire divergente rispetto al tema, più teorico, "dalla geometria alle geometrie" che ha al centro la discussione euclideo/non euclideo. Essa è però in linea con gli obiettivi dell'UMI, tendenti a riportare la matematica scolastica verso temi più vicini alla realtà in cui viviamo. Per tutti noi, abitanti della sfera-Terra può essere interessante riflettere su qualcuna delle conseguenze che la forma del nostro pianeta impone al nostro vivere. Per gli studenti il problema della rotta può attualizzarsi se riferito alle regate oceaniche, dove la scelta tra rotte lossodromiche od ortodromiche (lungo le geodetiche) è questione vitale di strategia. A tal proposito può essere utile ricordare le vicende del Titanic: nel suo viaggio inaugurale la nave era intenzionata a battere il record di tempo della traversata atlantica e ciò portò i suoi comandanti a incurvare la rotta verso Nord, inseguendo le latitudini maggiori indicate dall'ortodromica. E proprio questa scelta favorì il fatale incontro con l'iceberg.

Poiché la trattazione completa, inclusiva della costruzione delle carte, può richiedere un tempo giudicato eccessivo, si suggerisce di preparare precedentemente le carte e di fornirle agli studenti in fotocopia, salvaguardando l'esplorazione sulla loro differente efficacia.