CATENARIA, TRATTRICE E PSEUDOSFERA - Insegnante

sul libro: capitolo 7, par. 7.1, 7.2

Il nostro scopo è ora quello di cercare una superficie con curvatura costante e negativa.
Per farlo dobbiamo partire da lontano, introduciamo due curve (la catenaria e la trattrice) , le loro proprietà ci consentiranno di risolvere il problema.

1. La catenaria
Prendete una corda o una catenina che abbia la stessa densità in tutti i suoi punti. Tenetela appesa afferrandola agli estremi.

- Provate a descrivere la curva formata dalla corda (ci sono simmetrie? dove cresce/decresce, che concavità ha? ...):

....
....

Questa curva prende il nome di catenaria, la sua equazione matematica (a meno di cambiamenti di scala, cioè di stiramenti orizzontali e verticali dello stesso fattore) è $y = \cosh(x)$, dove cosh indica il coseno iperbolico. Per i nostri scopi non è necessario conoscere questa funzione, ma per i dettagli vedi l'approfondimento sulle funzioni iperboliche.

Siccome la forma del coseno iperbolico potrebbe sembrare quella di una parabola, potete toglervi questo dubbio utilizzando Cabri.

- Aprite il file *catenaria.fig*, esploratelo liberamente e quindi descrivete quello che vedete e che scoprite:

Anche se a prima vista la curva che descrive la catena potrebbe sembrare una parabola, si vede che una parabola non si sovrappone alla foto della catenina, lo fa solamente la catenaria
....
....
....

L'approfondimento che segue introduce gli aspetti principali sulle funzioni iperboliche, è indispensabile se si intende dimostrare la curvatura della pseudo sfera (Approfondimento 8), altrimenti lo si può saltare, richiede nozioni di funzioni trigonometriche, esponenziali, iperbole equilatera e nella parte finale il concetto di derivata.

2. Approfondimento sulle funzioni iperboliche
Prima parte (per chi conosce gli esponenziali le nozioni di base sulle funzioni e sulle funzioni trigonometriche, ma non l'analisi)

1) Definizioni

Il coseno iperbolico è la funzione $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

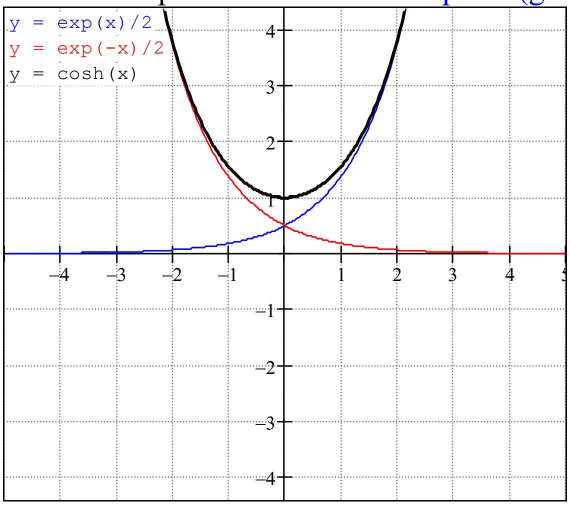
il seno iperbolico è la funzione $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2) Il grafico del coseno iperbolico

- Osserviamo che il coseno iperbolico ha un grafico simmetrico rispetto all'asse y (così come lo è il grafico della funzione trigonometrica coseno), infatti $\cosh(-x) = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{2} = \cosh(\ldots)$.
- $\cosh(0) = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots$ (ancora in analogia con la funzione trigonometrica coseno)

- Il coseno iperbolico è sempre positivo perché somma di esponenziali che sono funzioni positive
- Possiamo scrivere $\cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$, nella figura successiva trovi i grafici delle funzioni

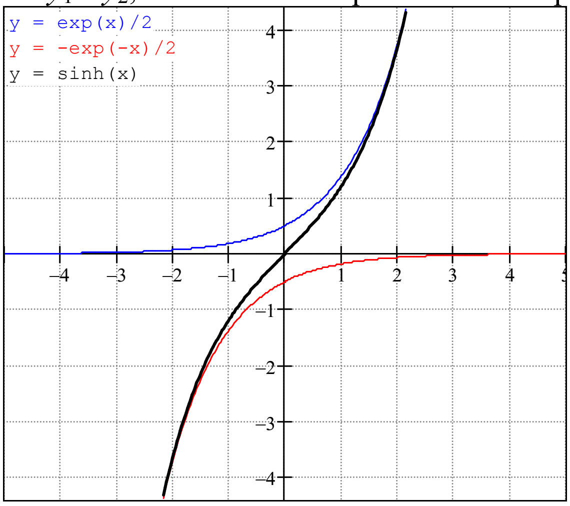
  $y_1 = \frac{e^x}{2}$ e $y_2 = \frac{e^{-x}}{2}$, tracciate sullo stesso sistema di riferimento il grafico del coseno iperbolico sommando le y delle due funzioni esponenziali. Ecco la risposte (grafico nero):



3) <u>Il grafico del seno iperbolico</u>

- Osserviamo che il seno iperbolico ha un grafico simmetrico rispetto all'asse y (così come la funzione trigonometrica seno), infatti $\sinh(-x) = \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots}{2} = \sinh(\ldots)$. Questo ci permette di studiarne l'andamento solo se $x \geq 0$ ed effettuare la simmetria se x è negativo.
- $\sinh(0) = \frac{\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots\ldots$ (sempre in analogia col seno trigonometrico)
- Il coseno iperbolico è sempre positivo perchè

  ....
- Possiamo scrivere $\sinh x = \frac{e^x}{2} + \left(-\frac{e^{-x}}{2}\right)$, osservate che le due funzioni $y_1 = \frac{e^x}{2}$ e $y_2 = -\frac{e^{-x}}{2}$ sono entrambe crescenti, sommandole troveremo quindi una funzione crescente. Nella figura seguente trovate i grafici di y_1 e y_2, tracciate anche quello del seno iperbolico Ecco:



4) <u>La relazione fondamentale</u>

Sapete già che per le funzioni trigonometriche la relazione fondamentale è $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, questo vuol dire che il punto $P = (X, Y) = (\cos x, \sin x)$ appartiene alla circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$.

Per le funzioni iperboliche la relazione fondamentale è invece è $(\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1$, in questo caso si ha quindi che il punto $P = (X, Y) = (\cosh x, \sinh x)$ appartiene all'iperbole equilatera $X^2 - Y^2 = 1$.

- Utilizzando le definizioni di coseno iperbolico e seno iperbolico, provate a dimostrare questa relazione, che, chiarisce il nome che viene dato a queste funzioni.

.Basta sostituire con le definizioni di coseno e seno iperbolico e svolgere i calcoli

....

....

....

....

....

Seconda parte (per chi conosce le derivate)

C'è un'ultima analogia con le funzioni trigonometriche. Sapete che la derivata del seno è il coseno e che la derivata del coseno è l'opposto del seno, per le funzioni iperboliche si hanno relazioni molto simili (ma non proprio uguali).

- Trovate queste relazioni calcolando le derivate:

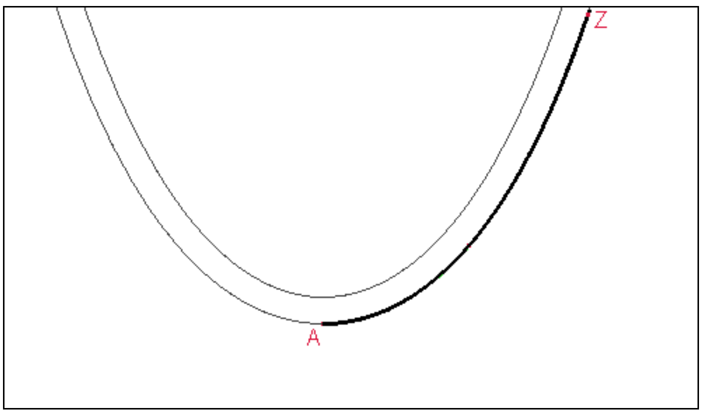
$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \ldots = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \ldots = \cosh x$$

La catenaria è utile per introdurre un'altra curva: la trattrice. Sarà proprio questa curva che ci consentirà di trovare la superficie con curvatura costante e negativa.

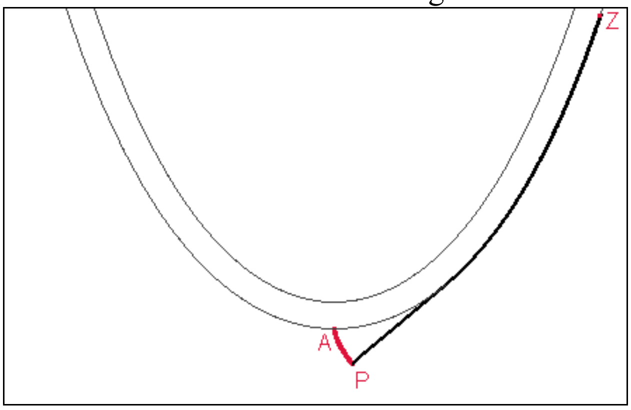
3. Dalla catenaria alla trattrice col curvimetro

- Prendete un curvimetro e un foglio di carta in cui è disegnata una catenaria.
- Appoggiate il curvimetro al foglio e modellatelo in modo da sovrapporlo alla catenaria.
- Fissate all'estremità destra del curvimetro un filo, fatelo aderire al curvimetro e fissate una matita al filo in modo che si trovi nel punto di minimo della catenaria e che abbia la punta rivolta verso il foglio, pronta per scrivere.



In figura è rappresentato il curvimetro in Z è fissato il filo, in A fate un asola al filo e fissate la matita

- Muovete la matita in modo che il filo rimanga aderente al curvimetro nel suo tratto di destra e con la punta della matita tracciate la nuova curva sul foglio.



- Adesso ribaltate il curvimetro, in modo che sia sempre sovrapposto alla catenaria, ma che il filo sia fissato a sinistra. Ripetete quindi la stessa esperienza e tracciato l'altro ramo della curva.

Quella che avete disegnato è la **trattrice**.

4. Dalla catenaria alla trattrice con Cabri Questa parte consente di costruire la trattrice con il software, si può saltare e fare direttamente la parte "Per tutti" in fondo alla pagina
Per chi vuole fare la costruzione e ha un po' di conoscenza di Cabri:
Ripetiamo la costruzione con Cabri in modo da poter scoprire altre interessanti proprietà della trattrice.

- Aprite il file *catenaria_trattrice.fig*

In figura trovate già la catenaria, una semiretta tangente in un suo punto Q e la lunghezza dell'arco di catenaria AQ.

- Potete muovere il punto Q per osservare come esso si muove sulla catenaria e determina gli spostamenti della tangente.
- Selezionate il comando *Compasso* e cliccate prima sul numero che rappresenta la lunghezza dell'arco AQ e quindi sul punto Q. Avete così tracciato una circonferenza di centro Q e raggio che misura come l'arco AQ.
- Generate il punto di intersezione tra la circonferenza e la semiretta (attenzione: la semiretta e non la retta). Chiamate P il punto così creato.
- La costruzione è completata, ma per renderla più chiara potete tracciare il segmento PQ renderlo più spesso col comando *Spessore* e colorarlo di verde così come l'arco AQ (che ha la sua stessa lunghezza).

- Provate a muovere Q e osservate come si muove P.
- Utilizzate il comando *Traccia* e cliccate su P. Muovete Q e generate la curva descritta da P.
  - Vi aspettavate questo risultato?

....
....
....
....

Per tutti:

- Aprite ora la figura *catenaria_trattrice 2.fig*. In essa è tracciato il luogo descritto da P al variare di Q: la trattrice (in realtà il grafico è composto da due luoghi, quello a destra dell'asse y e quello a sinistra).
- Muovete ancora Q per avere conferma del risultato.
- Spiegate perché la figura di Cabri simula l'attività precedente con il curvimetro (ricorda come si muoveva il filo sul curvimetro)

....
....
....
....

5. Proprietà della trattrice

Utilizzate ancora la figura di Cabri per scoprire alcune delle numerose proprietà della trattrice.

1) Prima proprietà

- Tracciate la retta passante per P e perpendicolare a PQ.
- Di che retta si tratta (che posizione assume questa retta rispetto alla trattrice)? La retta tangente

2) Seconda proprietà

- Individuate il punto T di intersezione tra la retta tangente alla trattrice in P e l'asse x.
- Col comando *Distanza o lunghezza* misurate la distanza tra P e T.
- Muovete Q.
- Questa distanza si modifica? No

È interessante osservare che è proprio questa proprietà che ha fatto parlare per la prima volta della trattrice. Nel 1670, a Parigi, Leibniz incontrò il medico Claude Perrault, che gli propose una sfida: posò una catena con un'estremità sul bordo rettilineo di un tavolo, spostò questa estremità lungo il bordo e chiese a Leibniz quale fosse la curva descritta dall'altra estremità della catena. Questo problema ha affascinato i matematici dell'epoca, oltre a Leibniz, anche Newton, Huygens, i fratelli Bernulli, L'Hôpital e altri si dedicarono alla questione e furono costruiti diversi macchinari per tracciare il grafco della nuova curva. Fu proprio Leibniz a chiamarla tractrix.

3) Terza proprietà

Vogliamo ora studiare come varia la curvatura della trattrice.

- Secondo voi ci sono punti in cui la curvatura è massima, punti in cui la curvatura è minima? Dove? Quanto vale la curvatura in questi punti?

Avvicinandosi ad A la curvatura aumenta, invece allontanandosi diminuisce e tende a zero quando la curva assume lo stesso andamento del suo asintoto

....
....

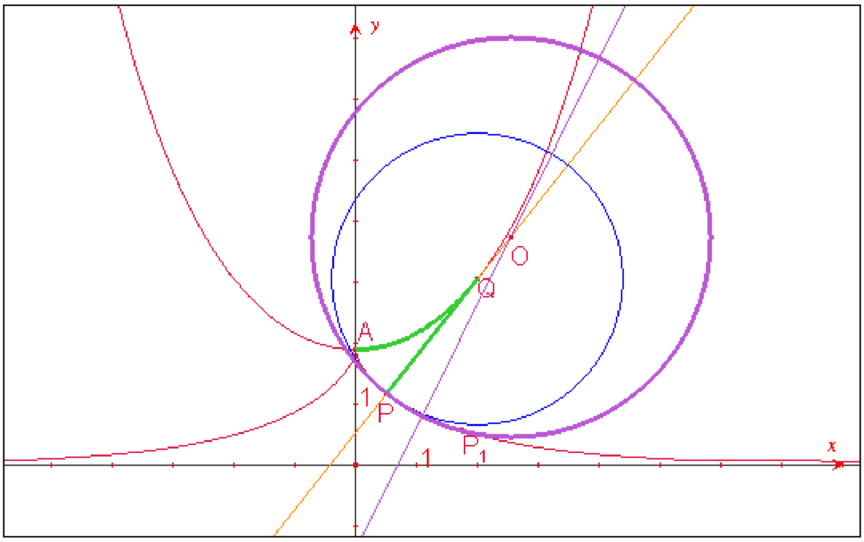
Per studiare meglio la curvatura abbiamo bisogno del cerchio osculatore.

Sappiamo già che il suo centro appartiene alla retta PQ perché essa è perpendicolare alla tangente, vediamo ora di determinarlo.

Se si vuole saltare la costruzione si può utilizzare ed esplorare la figura già fatta, aprendo il file catenaria_osculatore.fig

Per comodità, se non siete già in questa situazione, fate in modo che P sia "a destra" dell'asse y.

- Tracciate un punto P_1 sulla trattrice (per comodità a destra di P)
- Tracciate l'asse di PP_1
- Determinate il punto di intersezione tra l'asse e la retta PQ (attenzione: la retta e non la semiretta); chiama O questo punto.
- Tracciate la circonferenza di centro O e passante per P.



Questa circonferenza diventa il cerchio osculatore quando P_1 va a confondersi con *P*.

- Muovete P_1 avvicinandolo il più possibile a *P*.
- Che cosa osservate sul cerchio osculatore?

Il suo centro va a coincidere con Q

....

Potete ripetere la stessa esperienza per altri punti spostando *Q* a destra e quindi ancora P_1
In Cabri la trattrice è costituita dall'unione di due luoghi per questo bisogna spostarsi verso destra, in modo di continuare a lavorare sullo stesso luogo.

Ricapitolando:

In un qualsiasi punto *P* della trattrice generata a partire da una catenaria si ha che:
1) la retta perpendicolare alla retta tangente in *P* è a sua volta la retta tangente alla catenaria in *Q*;
2) il punto *Q* è il centro del cerchio osculatore della trattrice in *P*.

- Potete ora cancellare il punto P_1. Muovete *Q*
- Ricordando che la curvatura è il reciproco del raggio del cerchio osculatore stabilite come varia la curvatura della trattrice:

Tende a infinito quando *P* tende a coincidere con A, tende a zero quando *P* tende all'infinito

....

6. La pseudosfera e la sua curvatura

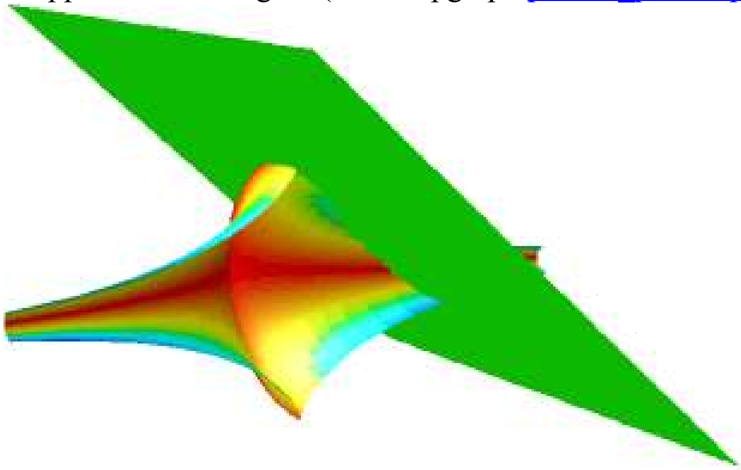
Siamo quasi al termine del nostro cammino alla ricerca di una superficie con curvatura costante e negativa.
Come vedrete tra poco, la superficie che risolve il nostr problema è la pseudosfera.

La **pseudosfera** è una superficie di rotazione, ottenuta ruotando la trattrice attorno al suo asintoto.

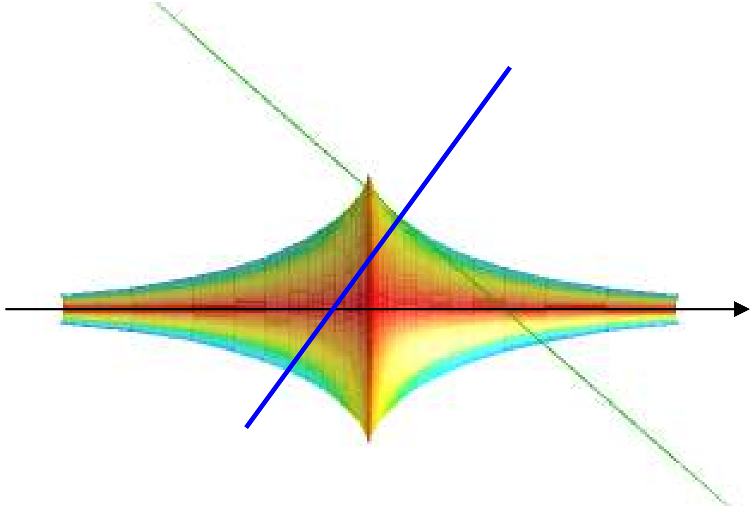
È stato Eugenio Beltrami, nella seconda metà del 1800, a dare questo nome alla pseudosfera.
Beltrami stava proprio cercando una superficie a curvatura costante e negativa e costruì i primi modelli di questa nuova superficie; il suo obiettivo era lo stesso nostro: studiare la geometria su di essa.

Ecco una figura di una pseudosfera:

Pensiamo di tagliarla a metà e di tracciare il piano tangente in un suo punto.
Quello che otteniamo è rappresentato in figura (file di dpgraph pseudo_piano.dpg):



Ruotiamo la figura in modo da avere una vista frontale:



Le figure precedenti sono utili per capire quali sono i piani principali, cioè i due piani perpendicolari al piano tangente che determinano le sezioni principali.
Ricordate che nel caso di una superficie di rotazione uno dei due piani principali è il piano che contiene la curva generatrice (nel nostro caso la trattrice) e che l'altro piano è determinato grazie al teorema di Eulero, infatti esso è perpendicolare al piano tangente e all'altro piano principale.

- Disegnate, se possibile, i due piani principali nelle figure precedenti e descrivete qui sotto come sono posizionati:

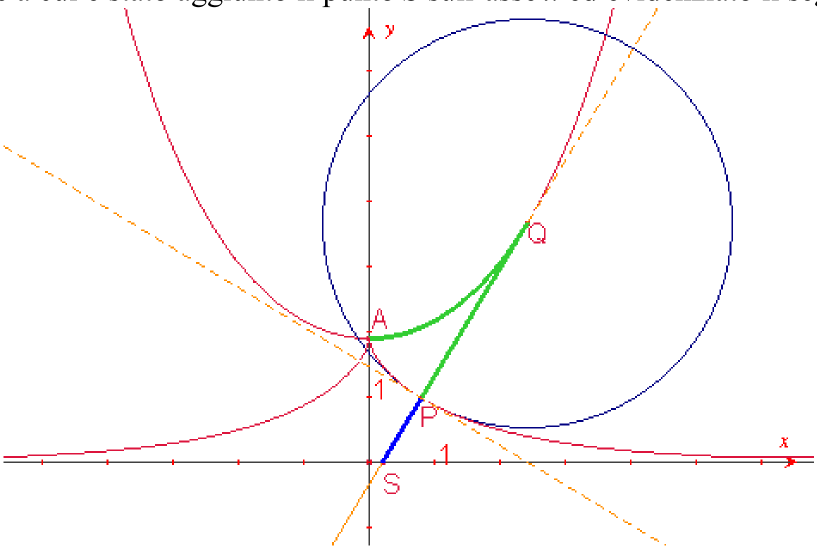
Uno è il piano contenente la trattrice e l'altro è il piano perpendicolare a questo e al piano tangente, la sua sezione si può vedere (in blu) nella figura precedente

....

Ritorniamo ora alla figura della trattrice che avete fatto con Cabri.

- Aprite il file *catenaria_trattrice3.fig*

È il file precedente a cui è stato aggiunto il punto S sull'asse x ed evidenziato il segmento PS



Se immaginate di ruotare la trattrice attorno all'asse x ottenete la pseudosfera.

- Nel punto P i piani principali sono: 1) il piano del disegno (contenente la trattrice), 2) il piano perpendicolare al foglio da disegno (e al piano tangente), la cui vista frontale è data dalla retta QS.
- Una della due curvature principali è il reciproco del raggio $\overline{QP}$ del cerchio osculatore.
- L'altra curvatura è il reciproco di $\overline{PS}$, ricordate infatti che nei solidi di rotazione il centro del cerchio osculatore della sezione normale appartiene all'asse di simmetria, si tratta quindi il punto S.

Il valore assoluto della curvatura è quindi: $|k| = \dfrac{1}{\overline{QP} \cdot \overline{PS}}$

○ Spiegate perchè la curvatura della pseudosfera nel punto P è negativa:
Perché i centri dei cerchi osculatori sono Q e S e stanno da parti opposte rispetto al piano tangente
....
....

Vogliamo ora verificare che k è costante, cioè che non varia al variare di P

- Col comando *Distanza o lunghezza* misurate il segmento QP
- Sempre col comando *Distanza o lunghezza* misurate il segmento PS
- Muovete Q.

○ Le misure dei due segmenti cambiano? Sì Il prodotto tra le due misure cambia? No (ma i ragazzi possono rispondere forse sì, forse no)

- Per rispondere all'ultima domanda potete ora utilizzare la calcolatrice di Cabri: una volta selezionato il comando *Calcolatrice* cliccate su una delle due misure, cliccate sul tasto di moltiplicazione, poi sull'altra misura, infine premete il tasto uguale e riportate la misura in una zona libera dello schermo.
- Muovete Q.

○ Il risultato della moltiplicazione varia? No
○ Potete concludere che la curvatura della pseudosfera è costante in ogni suo punto? Sì
○ Quanto vale questa curvatura (attenti al segno!)? ....

- Muovete ora il punto A.

○ La curvatura è cambiata? Sì
○ Ma rimane costante se lasciate fisso A in questa posizione e muovete Q? Sì

La curvatura della pseudosfera dipende allora dal suo raggio, cioè dalla distanza di *A* dall'origine

- Col comando *Distanza o lunghezza* misurate questa distanza
- Con la calcolatrice elevate al quadrato questa misura.

- Che cosa osservate? |k|=1/r^2
- Muovete *A* per averne conferma.

Potete concludere:

- La curvatura di una pseudosfera di raggio r è costante e negativa e vale $k = -\frac{1}{\ldots\ldots}$.
- In particolare se il raggio della pseudosfera è 1, la sua curvatura è $k = -1$

Il nostro cammino si è concluso. Abbiamo trovato una superficie a curvatura costante e negativa.

7. Ma c'è un però ...

- Muovete *Q* avvicinandolo il più possibile ad *A*.
- Che cosa succede ai segmenti *QP* e *PS*?

Uno tende ad avere lunghezza nulla e l'altro lunghezza infinita

- Probabilmente con Cabri non si riesce a visualizzare questa situazione perché è difficile fare in modo che *A* coincida veramente con *Q*. Ma quanto varrebbe $\overline{QP}$ se *A* coincidesse con *Q*? 0
- E allora è possibile parlare di curvatura della pseudosfera in *A* in questo caso? No

Possiamo allora dire che

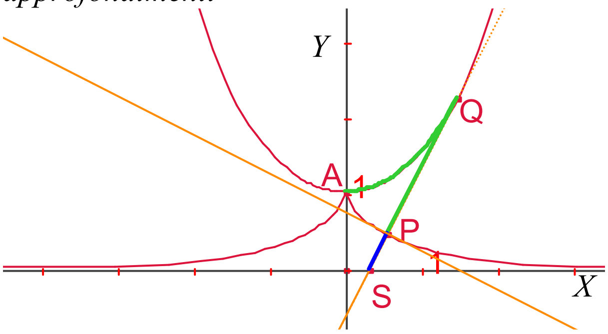
Nei punti in cui si può definire la curvatura, abbiamo che la curvatura della pseudosfera è costante e negativa, ma ci sono dei punti (quelli del bordo) in cui non è possibile definire la curvatura.

Col linguaggio dell'analisi potremmo dire che quando *P* tende ad *A* la curvatura tende a -1/r^2 (con un limite del tipo 0*inf), ma in *A* non esiste (la curvatura è una funzione costante, ma con un buco)

In ogni caso oltre questo risultato non possiamo andare: Hilbert ha dimostrato nel 1901 che "non esiste una superficie a curvatura costante e negativa priva di singolarità, analitica e regolare in ogni suo punto. "

Adesso c'è ancora l'approfondimento ...

8. Approfondimento: dimostrazione della curvatura della pseudosfera
Per chi conosce l'analisi e ha affronato integralmente il percorso, compresi i precedenti approfondimenti



Per semplicità consideriamo la trattrice di raggio 1, vogliamo dimostrare che $\overline{QP}\cdot\overline{PS}=1$, qualunque sia P diverso da A.

1) Iniziamo trovando $\overline{QP}$
Q=(x,cosh x) perchè appartiene alla catenaria.
Ricordando come si calcola la lunghezza di un arco di curva e la relazione $(\cosh t)^2=1+(\sinh t)^2$, abbiamo:

$$\overline{QP}=\text{lungh. arco } AQ=\int_0^x\sqrt{1+((\cosh t)')^2}\,dt=\int_0^x\sqrt{1+(\sinh t)^2}\,dt=\int_0^x\cosh t\,dt=|\sinh x|$$

2) Troviamo ora le coordinate di S
La retta QP è tangente alla catenaria in Q, ha quindi pendenza uguale alla derivata del cosh$x$, cioè uguale al sinh$x$ e passa per il punto Q, è quindi
$Y-\cosh x=\sinh x(X-x)$
S è l'intersezione di questa retta con l'asse X, si ottiene quindi ponendo $Y = 0$ e ricavando X:

$$S=\left(x-\frac{\cosh x}{\sinh x},0\right)$$

3) Troviamo la distanza $\overline{QS}$

$$\overline{QS}=\sqrt{\left(x-x+\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)^2+\cosh^2 x}=\sqrt{\frac{\cosh^2 x+\cosh^2 x\sinh^2 x}{\sinh^2 x}}=\sqrt{\frac{\cosh^2 x(1+\sinh^2 x)}{\sinh^2 x}}$$
$$=\sqrt{\frac{\cosh^4 x}{\sinh^2 x}}=\frac{\cosh^2 x}{|\sinh x|}$$

4) Infine calcoliamo $\overline{PS}$

$$\overline{PS}=\overline{QS}-\overline{QP}=\frac{\cosh^2 x}{|\sinh x|}-|\sinh x|=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{|\sinh x|}=\frac{1}{|\sinh x|}$$

5) Siamo pronti per calcolare il prodotto $\overline{QP}\cdot\overline{PS}$

$$\overline{QP}\cdot\overline{PS}=|\sinh x|\frac{1}{|\sinh x|}=1$$

Osserviamo però che il prodotto non è definito in $x = 0$, cioè quando P coincide con A, anche se il suo limite è 1.