



sul libro: capitolo
4.2, 4.3, 4.4

INTRODUZIONE

□ **Prerequisiti :**

Avere una terminologia comune per ciò che riguarda alcuni elementi-base del cilindro (generatrici, punti alla stessa quota, sezione con un piano perpendicolare all'asse, ecc...).

Avere già svolto la scheda 1 sul cilindro, e quindi avere idea di che cos'è una *geodetica* sul cilindro.

□ **Obiettivi :**

Affrontare il problema della corrispondenza fra punti della superficie del cilindro e il suo sviluppo piano, fra i punti della superficie del cilindro e i punti dei suoi ricoprimenti; comprendere che i tratti di elica sul cilindro corrispondono a segmenti sul ricoprimento disteso. Intuire la possibilità di lavorare sui due livelli (superficie cilindrica/superficie piana dei ricoprimenti) a seconda del problema da affrontare.

□ **Tempi :** 2 ore

□ **Materiali / strumenti:**

Cilindri di varie dimensioni; cordini o fili di lana colorati , strisce di carta, elastici, puntine da disegno, spilli; fogli trasparenti; pennarelli da lucido, nastro adesivo, forbici.

La scheda serve agli studenti anche come supporto per gli appunti su cui studiare.

□ **Modalità di lavoro degli studenti:**

Lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante.

□ **Modalità di lavoro dei docenti:**

Gli insegnanti devono gestire in due ore di lezione due momenti diversi, un fase di lavoro di gruppo nella quale devono "incoraggiare" gli studenti nelle concettualizzazioni seguendo la scheda, senza suggerire le risposte e una fase di discussione guidata nella quale favoriscono il confronto tra le risposte degli studenti e guidano alla sistemazione teorica dei concetti emersi.

COMMENTI E INDICAZIONI

Nella prima parte della scheda si chiede agli allievi di individuare la corrispondenza fra i punti della superficie cilindrica e i punti di un ricoprimento (o sviluppo piano del cilindro); è abbastanza naturale osservare che un segmento sul piano del ricoprimento corrisponde, sulla superficie cilindrica, a una delle due geodetiche più corte che uniscono i due punti (ovvero a una geodetica che non fa un giro completo intorno al cilindro). L'attività richiede un po' di disinvoltura manuale; è opportuno che l'insegnante scelga accuratamente la dimensione dei cilindri da ricoprire (una misura adeguata potrebbe essere quella delle bottiglie di PET per bevande da 0.5 l).

Ci si accorge quindi che se si vuole disegnare una geodetica su una superficie cilindrica si può procedere in due modi:

- Scelti due punti sul cilindro, si individua uno dei due segmenti di elica più corti che uniscono i due punti.
- Scelti due punti sul ricoprimento, si costruisce il segmento che ha tali punti come estremi e si avvolge il foglio intorno al cilindro.

Il 'piano' di un ricoprimento non permette di riprodurre alcune caratteristiche tipiche della superficie cilindrica; le geodetiche risultano spesso spezzate, non solo quelle che compiono più di un giro; non possiamo riportare fedelmente le distanze misurate sul cilindro: due punti "vicini" sul cilindro possono venirsi a trovare "lontani" nello sviluppo piano se la generatrice di taglio interseca la geodetica di minore lunghezza che li unisce sul cilindro.

Tuttavia, se escludiamo i bordi, e ci limitiamo a figure contenute in "metà cilindro", i punti di un ricoprimento soddisfano i postulati della geometria euclidea. Quindi, se ci accontentiamo di lavorare su "piccole" parti della superficie di un cilindro, i cui punti si possano mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una parte di un ricoprimento piano, possiamo parlare di geometria euclidea proprio come ci si può attendere da una superficie a curvatura nulla. Possiamo dire che la geometria del cilindro è *localmente* euclidea ([V. cap.4.4, pagg.61-63](#)).

Ma come riprodurre su un piano le infinite geodetiche che congiungono i due punti di un cilindro con pendenze diverse? Dobbiamo ricorrere a ricoprimenti multipli. Ciascun punto della superficie cilindrica avrà un'immagine su ognuno dei successivi ricoprimenti: la corrispondenza fra i punti del cilindro e i punti del piano dei ricoprimenti è di uno a molti.

Se sul cilindro abbiamo segnato due punti A e B , sul primo ricoprimento potremo individuarne le immagini A_1 e B_1 , sul secondo ricoprimento le immagini A_2 e B_2 e così via. Possiamo quindi costruire sul piano dei ricoprimenti i segmenti A_1B_1 e A_1B_2 : essi avranno certamente lunghezza e pendenza diversa. Riavvolgendo il foglio di carta intorno al cilindro i due segmenti daranno origine a due geodetiche che uniscono i punti A e B .

I ricoprimenti del cilindro

A differenza della sfera, il cilindro, superficie a curvatura nulla, ammette un ricoprimento piano. Si può ricoprire una superficie cilindrica 'tagliando' il foglio del ricoprimento dopo avere compiuto un giro completo (e in tal caso i punti della superficie cilindrica e quelli del 'piano' di ricoprimento saranno in corrispondenza biunivoca, purché si escluda uno dei due bordi del foglio che vengono accostati); oppure si può continuare ad avvolgere la superficie cilindrica sovrapponendo più ricoprimenti. Un'ulteriore variante si ha a seconda che si avvolga il cilindro in senso orario o antiorario.

Segnate sul vostro cilindro due punti generici A e B , un percorso diritto fra di essi e una generatrice.

Avvolgete il cilindro con un ricoprimento di carta trasparente, partendo dalla generatrice. (tagliate il foglio di carta in modo che nell'avvolgimento i due lembi del foglio combacino perfettamente, senza sovrapporsi). Sul ricoprimento, ricalcate, con un pennarello, i due punti del cilindro e indicateli con A_1 e B_1 ; ricalcate pure il percorso 'diritto' che avete individuato tra di essi.

Staccate il ricoprimento dal cilindro e distendetelo su un piano: che forma assume il percorso che congiunge A_1 con B_1 ?

.....
.....
Il percorso che congiunge A_1 con B_1 , visto dal ricoprimento, assume la forma di un segmento.

Sul foglio trasparente collegate A_1 con B_1 mediante un generico percorso curvo. Disponete il foglio sul cilindro. Il nuovo percorso soddisfa sul cilindro la proprietà di andare diritto?

.....
.....
La domanda intende rafforzare con un contro-esempio l'osservazione precedente.

Prendete un nuovo foglio di carta trasparente che sia sufficiente per avvolgere il vostro cilindro con due ricoprimenti (avendo sempre l'accortezza di far combaciare bene gli estremi del foglio). Mentre siete sul primo ricoprimento, segnate con il pennarello il punto A_1 , immagine del punto A del cilindro; completate quindi il secondo avvolgimento. Con uno spillo, praticate un foro sui due ricoprimenti nella posizione del punto B . Distendete i ricoprimenti su un piano: quanti fori ricavate in corrispondenza di B ? Ha senso indicarli con B_1 e B_2 ? Se sì, in quale ordine?

.....
.....
Si ottengono due fori che saranno denominati seguendo l'ordine degli avvolgimenti: B_1 sul primo avvolgimento e B_2 sul secondo.

Sul foglio disteso, segnate con un pennarello nero sottile una retta che corrisponda alla generatrice del cilindro che separa i due ricoprimenti. Disegnate quindi il segmento $A_1 B_1$ con un pennarello di colore rosso e il segmento $A_1 B_2$ con un pennarello blu. Riavvolgete il foglio intorno al cilindro: che cosa osservate?

.....
.....

Si ottengono due geodetiche a elica: l'una inizia da A_1 e termina in B_1 ; l'altra inizia da A_1 e termina in B_2 .

Non è possibile riprodurre su un solo ricoprimento una geodetica che avvolga più di una volta il cilindro: l'attività conduce a questa scoperta. Va trattata con particolare attenzione la corrispondenza che si crea fra una superficie illimitata in una sola delle sue dimensioni (il cilindro) e una superficie che può essere prolungata illimitatamente in entrambe le sue dimensioni (il piano dei ricoprimenti).

(L'indicazione dei colori per i segmenti da tracciare con i pennarelli intende solo sottolineare l'utilità di distinguerli l'uno dall'altro).

.....
.....
Immaginate di avvolgere il cilindro con più di due ricoprimenti: quante immagini del punto B otterrete? Quanti segmenti di estremi A_1 e B_n (dove B_n rappresenta il punto immagine di B che si trova nell'ennesimo ricoprimento) riuscirete a costruire? .

.....
.....
Si ottengono tante immagini di B quanti sono i ricoprimenti. Altrettanti saranno i segmenti di estremi A_1 e B_n .

Nel riavvolgere il foglio trasparente intorno al cilindro, come si dispongono i segmenti, $A_1 B_1, A_1 B_2, A_1 B_3, \dots, A_1 B_n$ sulla superficie cilindrica?

Ogni segmento dà luogo a un'elica che si avvolge sul cilindro.

$A_1 B_1$ dà l'elica più breve per il verso di avvolgimento prescelto (orario o antiorario).

$A_1 B_2$ compie un giro intero intorno al cilindro, oltre al tratto necessario a colmare la distanza che separa le generatrici su cui si trovano i due punti A e B .

Analogamente il segmento $A_1 B_n$ darà un'elica che compie $n-1$ giri interi intorno al cilindro, oltre al tratto sopra detto.

Ha senso dire che $A_1 B_1, A_1 B_2, A_1 B_3 \dots$ danno origine a geodetiche sul cilindro?

.....
Si può controllare che i vari percorsi sono diritti perché possono essere seguiti da una automobilina senza sterzo; con una strisciolina di carta si può verificare che si tratta dei percorsi più brevi che congiungono A e B , in presenza di uno o più avvolgimenti.

CONCLUSIONI

CHE COSA SO ORA
PAROLE CHIAVE
<i>Sviluppo piano</i> <i>Ricoprimenti</i> <i>Corrispondenza biunivoca</i> <i>Corrispondenza uno-molti</i> <i>Percorsi diritti</i> <i>Percorso più breve</i> <i>Pendenza</i>