Scheda insegnante: SFERA 3

sul libro: capitolo 2.4

Descrizione

- **Prerequisiti :**

  - i contenuti di SFERA1 e SFERA2
  - saper disegnare una circonferenza anche senza il compasso
  - saper costruire l'asse di un segmento
  - conoscere la proprietà dell'asse di una corda e utilizzarla per determinare il centro di una circonferenza.
  - avere conoscenze minime di trigonometria : gli elementi necessari sono contenuti nella scheda"**Cassetta degli attrezzi**" (reperibile nella cartella SFERA_CORREDO) che può essere fornita anzitempo agli studenti per un ripasso o come pro memoria di consultazione

- **Obiettivi :**
  - esplorare le proprietà di una famiglia di circonferenze concentriche rappresentate sulla superficie sferica e riformulare il III postulato di Euclide
  - confrontare visione intrinseca e visione estrinseca e riconoscere che una circonferenza sulla sfera non ha un solo centro ed un solo raggio
  - determinare le proprietà del rapporto circonferenza/diametro

- **Tempi :** 2 unità orarie

- **Materiali / strumenti:**
  - palloni, semisfere trasparenti
  - righello, compasso, striscioline
  - fogli di carta A3, forbici
  - copie della scheda SFERA3 per lo studente
  - copie dell'Allegato SFERA3 -attrezzi

- **Modalità di lavoro degli studenti:**
  lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante

- **Modalità di lavoro dei docenti**
  Gli insegnanti lasciano liberi gli studenti di effettuare prove e deduzioni ma vigilano sulla corretta effettuazione delle costruzioni e delle misure (in particolare la trasposizione della circonferenza dalla sfera al foglio di carta deve essere fatta con precisione) ed intervengono là dove gli intenti della scheda risultino poco chiari.
  La discussione dei risultati sarà più ricca ed interessante se i gruppi avranno lavorato con semisfere di differenti dimensioni o comunque con circonferenze di diverso raggio

- **Modalità di effettuazione del monitoraggio:**
  le stesse già descritte nella scheda SFERA1

La scheda 3 completa il controllo della validità dei postulati di Euclide sulla superficie sferica ed affronta la questione relativa al valore di π (o meglio del rapporto circ./diametro)

La scheda CASSETTA DEGLI ATTREZZI, da allegare alla scheda degli studenti, è stata preparata per evitare intoppi nello svolgimento del lavoro: in essa sono riportate informazioni che gli studenti dovrebbero eventualmente ripassarsi prima o, comunque tenere sottomano all'occorrenza (ovviamente per studenti "esperti" potrebbero anche essere offensive!)

Circonferenze sulla sfera

A. Prime osservazioni….

	Risultati attesi
III° Postulato di Euclide: *"che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni raggio"* Scelto un punto come centro, tracciare sulla palla circonferenze concentriche di raggio via via crescente: cosa succede? Il raggio può aumentare indefinitamente? Il postulato di Euclide è valido sulla sfera? Come andrebbe riformulato ? C'è una circonferenza così "speciale" che non è più una circonferenza? Se si continua ad aumentare il raggio, superando l'equatore cosa si osserva? Quanti centri ha un circonferenza sulla sfera?	*Al crescere del raggio la circonferenza cresce finché arriva a coincidere con l'equatore, e diventa una retta. Salvo difficoltà pratiche, il raggio può in teoria aumentare ma, superato l'equatore, la lunghezza della circonferenza va diminuendo, fino a ridursi a un punto nel polo opposto, mentre il raggio ha raggiunto il suo valore massimo.* *POSTULATO: si possono disegnare circon-ferenze con qualsiasi centro, ma il raggio ha un valore limite.* *Ogni circonferenza sulla sfera ha due centri, in due punti antipodali.*

B. Spostiamo l'esplorazione su di una semisfera

Si sposta l'esplorazione sulla semisfera per semplificare le definizioni degli enti geometrici (segmenti e triangoli in particolare) e per rendere più agevole il lavoro: la semisfera non rotola ed è più facile determinarne centro e raggio.

Determinate centro e raggio **R** della semisfera traspa-rente che vi è stata fornita.	Descrizione del procedimento seguito. *Si dispone la semisfera su di un foglio e si rileva con un pennarello la circonferenza di appoggio: corrisponde all'equatore della sfera. Ricordando poi che l'asse di ogni corda passa per il centro, si tracciano due corde qualsiasi e se ne determinano gli assi. Il loro punto d'incontro è il centro della circonferenza di appoggio e dunque anche della sfera.* Il raggio **R** è lungo …*risultato della misura*………………

C. Quant'è lunga una circonferenza sulla sfera? VISIONE INTRINSECA

SITUAZIONE: un abitante della sfera (ad esempio "Il Petit Prince" sul suo asteroide B 621) vuol costruire un'aiuola circolare: ………*La situazione proposta ha lo scopo di favorire negli studenti l'adozione del punto di vista di chi si trova sulla superficie sferica* .

<table>
<tr>
<td>COMPITO
Immedesimatevi nella situazione 2D e disegnate una circonferenza sulla semisfera procedendo come l'abitante della sfera
(legare una penna all'estremità del cordino o fissarla ad un compasso).
Misurate il raggio r utilizzato (usare il metro a nastro appoggiandolo alla superficie sferica: NON misurare l'apertura del compasso, che corrisponderebbe ad una corda tesa in 3D all'interno della sfera) e calcolate la lunghezza della circonferenza.</td>
<td>r = ...risultato della misura......
lunghezza circ. = ... come l'abitante della sfera, si fa uso della classica formula: raggio · 2π</td>
</tr>
</table>

Tagliate un tratto di strisciolina lungo esattamente come la **lunghezza della circ. calcolata** ed appoggiatela lungo la circonferenza come se ne fosse la recinzione. (*ovviamente non trattandosi di una geodetica la strisciolina non aderisce, ma ciò rende più verosimile il suo uso come recinzione)*

Cosa si osserva? … *c'è un avanzo, tanto più vistoso quanto più la circonferenza è grande*

Quale può essere la causa? … *in genere gli studenti pensano in un primo tempo di aver fatto male le misure o di aver sbagliato i calcoli. Dopo aver ricontrollato tutto restano assai perplessi* ….

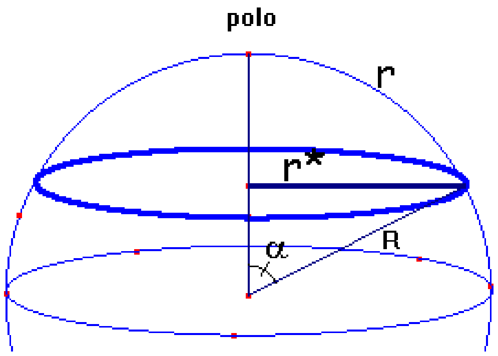
Qual è la **lunghezza effettiva** (misurabile) della circonferenza? *...(si appoggia un cordino sulla circonferenza e poi se ne misura la lunghezza rettificandolo su di un righello)* ………………..

D. Quant'è lunga una circonferenza sulla sfera? VISIONE ESTRINSECA

Per vederci chiaro decidete di tracciare su di un foglio di carta una circonferenza che abbia lo stesso raggio r , la ritagliate e appoggiate il cerchio di carta sulla semisfera facendo coincidere i due centri.
Se confrontate le due circonferenze, cercando di farle combaciare, di cosa vi accorgete?

… *E' impossibile, salvo fare molte pieghe, far aderire il cerchio di carta alla calotta sferica.*
La circonferenza del cerchio di carta è molto più lunga della circonferenza sulla sfera , così come è molto maggiore l'area del cerchio di carta.

Se osservate bene la semisfera scoprirete che la circonferenza che avete tracciato coincide con quella che si otterrebbe intersecando la sfera con un piano . Come trovare il raggio di questa circonferenza , con centro sul diametro della sfera? Seguite la traccia, completando:



Identificate i diversi oggetti della figura:

r *è il raggio usato sulla semisfera* e vale ……….

R *è il raggio della sfera……* e vale ……….

α è l'angolo che taglia, sulla circ. massima passante per il polo, l'arco r e dunque è calcolabile con la formula (vedere scheda ATTREZZI) .. *r/R*
e vale ..

r* infine *è proprio il raggio della sezione* e si può calcolare come cateto opposto ad α

e dunque vale $R\, sen\alpha =$ ………………

Calcolate finalmente la lunghezza della circonferenza sezione …$2\pi r^* =$……………….

Questo risultato a quale dei due valori ottenuti dall'amico della sfera si avvicina, quello misura

to o quello calcolato?.. *si avvicina a quello misurato (se le misure sono state sufficientemente precise)*

E. Il calcolo di π

Comunicate dunque l'esito della vostra indagine all'amico che abita sulla sfera, che si starà chiedendo perché mai la rete che ha ordinato è troppo lunga, e suggeritegli di **controllare il valore del suo π** *(ovvero del suo rapport circ./diameto)***,** ricordandogli la definizione contenuta nella scheda ATTREZZI.

Come imposta il calcolo? Che valore trova ?

$\pi_{\text{sulla sfera}}$ = *lunghezza circonferenza(misurata o calcolata in 3D)/2 r (misurato sulla sfera) =*

il rapporto tra la lunghezza della circonferenza in 3D ed il raggio utilizzato in 2D dall'abitante non può che dare un risultato inferiore a 3,14

Che interpretazione dare del risultato ottenuto?

Il valore di $\pi_{\text{sulla sfera}}$ non è quello della costante della geometria piana

Se avesse tracciato una circonferenza di raggio diverso avrebbe ottenuto lo stesso valore per π ?

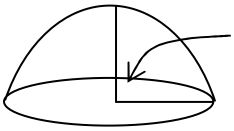
NO sulla sfera il valore di π non è costante

Fate delle ipotesi sul valore di π per l'abitante della superficie sferica al variare del raggio della circonferenza tracciata.

Il valore di $\pi_{\text{sulla sfera}}$, prossimo al valore canonico per piccoli raggi, va man mano diminuendo al crescere del raggio e quindi della latitudine α

$$\pi_{\text{sulla sfera}}\ \frac{2\pi R sen\alpha}{2R\alpha} = \frac{\pi sen\alpha}{\alpha}$$

ESERCIZIO Calcolare quanto vale π per l'abitante della sfera se traccia la "circonferenza limite" che coincide per l'equatore



$\alpha = \pi/2$

$$\pi_{\text{sulla sfera}} = \pi \frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{\pi \cdot 1}{\pi/2} = 2$$

COMMENTI E INDICAZIONI

Le **prime osservazioni** (punto A) si possono effettuare utilizzando i soliti **palloni.** Per immedesimarsi meglio con l'abitante della sfera si dia l'indicazione di tracciare le circonferenze con spago e penna (può essere utile appoggiare la capocchia di un chiodo sul punto scelto come polo e legargli intorno uno spago sottile inestensibile, cui legare, all'altro estremo, una penna, un gessetto, una qualsiasi punta scrivente). Non è molto agevole tracciare circonferenze di ampio raggio, soprattutto se si supera l'equatore: è però importante che gli studenti riescano a visualizzare il fatto che simili circonferenze, pur crescendo di raggio, diminuirebbero man mano di lunghezza e andrebbero a chiudersi su di un centro che sta agli antipodi: è come dire che ogni circonferenza ha, sulla sfera, due diversi centri.

Per le **attività successive** (punto B e seguenti**)** è indispensabile avere delle **semisfere.** I motivi sono di ordine concettuale e di ordine pratico. Limitandosi alla superficie della semisfera si eliminano le circonferenze "anomale" di cui si è detto sopra e, poiché, ad eccezione dell'equatore, non ci sono sulla semisfera geodetiche complete, diventa possibile definire in modo univoco un segmento di geodetica tra due punti. Dal punto di vista pratico le semisfere si appoggiano in modo stabile sul piano ed è possibile determinare con facilità la lunghezza del loro raggio.
Dove reperire delle semisfere? Le sfere LENART hanno in dotazione quattro semisfere di ricoprimento ciascuna, che possono essere utilizzate separatamente, da quattro gruppi di lavoro. Su di esse, come sulla sfera, le circonferenze possono essere tracciate con lo speciale compasso a disposizione, che consente anche di misurare l'angolo al centro della sfera corrispondente al raggio adottato.
Sul mercato è anche possibile reperire dei recipienti (insalatiere) in vetro che sono delle perfette semicirconferenze, salvo il taglio di una piccola calotta là dove il recipiente deve potersi appoggiare sul piano.

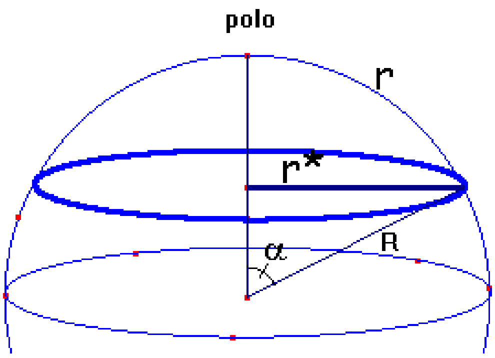
Determinato il raggio della semisfera si entra nel vivo dell'attività, nel corso della quale è di fondamentale importanza saper alternare visione intrinseca (punto C) (quella in 2D dell'abitante della sfera) e visione estrinseca (punto D) (la visione di chi osserva la sfera immersa in 3D). Lo studente, che si immedesima in un primo momento con il giardiniere della sfera, traccia una circonferenza, misura il raggio r, calcola la lunghezza della circonferenza, 2πr, taglia una strisciolina di pari lunghezza e la appoggia come un recinto lungo la circonferenza: si accorge immediatamente che la striscia è più lunga della circonferenza prima disegnata. La lunghezza effettiva della circonferenza può essere valutata misurando quanto è lungo il tratto di recinto in eccesso.
Lo studente, in genere assai perplesso, viene dunque invitato a trasferire su di un foglio di carta il raggio usato dal giardiniere per tracciare una circonferenza di pari raggio sul piano. Il cerchio di carta viene poi ritagliato ed appoggiato sulla semisfera in modo che i due centri coincidano: osservando la situazione in 3D lo studente scopre che il giardiniere ha in realtà calcolato la lunghezza di questa circonferenza di carta, quella che si stende sul piano tangente alla sfera e non di quella tracciata sulla sfera. Se cerca di farle combaciare si accorge che il cerchio di carta , pur avendo lo stesso diametro, è più esteso e solo con delle pieghe che lo riducano può approssimativamente aderire alla calotta sferica.

Di qui in poi sono possibili due diversi percorsi, a seconda degli strumenti matematici di cui gli studenti dispongono.
Percorso 1. Se la classe non dispone di un minimo di conoscenze di trigonometria si salta le restante parte del punto D e ci si porta al punto E. Si invitano gli studenti a cercare cosa debba essere cambiato nella formula della circonferenza usata dal giardiniere affinchè il calcolo dia lo stesso risultato della misura. In genere occorre suggerire in modo esplicito di controllare il valore di π , ripartendo dalla sua definizione: per gli studenti risulta infatti assolutamente impensabile che quella costante “magica” che hanno da tempo imparato come un “numero fisso” possa sulla sfera avere un valore che varia e che è così clamorosamente più basso del 3,14… Ovviamente il rapporto deve essere effettuato tra i dati sulla sfera: lunghezza effettiva, misurata, della circonferenza e diametro utilizzato.

Percorso 2. Se la classe dispone almeno delle conoscenze di trigonometria presenti nella scheda ATTREZZI si può proseguire l’attività come descritta e guidata nel seguito del punto D e nei successivi. La visione 3D consente di interpretare la circonferenza come intersezione tra la sfera e un piano e di calcolare il raggio del cerchio sezione. Si può così riottenere, con la precisione di un calcolo, la lunghezza della circonferenza che si era misurata mediante l’operazione-recinto. Questo valore, diviso per il diametro sulla sfera, consente di scoprire che sulla sfera il rapporto circonferenza/diametro non è costante ed è minore di 3,14 ...

SEGUE UNA SCHEDA CONTENENTE UN ESEMPIO DI CALCOLI EFFETTUATI

MISURE E CALCOLI (due cifre significative)



Se **r** (raggio sulla superficie) = 7,6 cm

e R della sfera = 10,2 cm

α =(angolo al centro) $= \dfrac{r}{R} = \dfrac{7,6}{10,2} = 0,75$ rad

r*(della sezione) = R senα = 6,9 cm

circonferenza sezione = 6,9*2π = 43 cm

per chi, stando sulla sfera, ha disegnato la circonferenza, il rapporto

$$\frac{circonferenza}{diametro} = \frac{43cm}{20,4cm} = 2,1(2)$$

e non è costante !!!!!!!!! **dipende dalla colatitudine α**

$$\frac{2\pi R sen\alpha}{2R\alpha} = \pi\frac{sen\alpha}{\alpha}$$

tende a π per α → 0

tende a 2 per α → $\dfrac{\pi}{2}$