м.Кривий Ріг

2016

**Задачі з параметрами на уроках математики**

Криворізька загальноосвітня школа №123

**Задачі з параметрами на уроках математики**

****

Вчитель математики

Бойко Любов Анатоліївна

Кривий Ріг-2016

## Основні методи розв’язання рівнянь, що містять параметр

*Аналітичний метод*

Пошук рішень рівнянь, що містять параметр. *Метод «розгалуження»*

На самому початку знайомства з параметром в учнів виникає якийсь психологічний бар'єр, що обумовлений суперечливими характеристиками параметра. З одного боку, параметр у рівнянні варто вважати величиною відомою, а з іншого боку - він може приймати різні значення. Виходить, що параметр у рівнянні - це невідома відома, змінна постійна величина. Цей «каламбур» дуже точно відбиває істота тих складностей, які потрібно переборювати учням.

Саме цей факт і дозволяє нам розвязувати рівняння з параметром таким методом («розгалуження»)

**Приклад**. Розв’язати рівняння .

Рішення. Нехай . Тоді 

Переходимо до рівносильної системи

  

Очевидно, при  рівняння системи не має розв’язку .

Якщо , то тоді



Отже, потрібно перевірити умови  й . Тобто

  

Розв’язуючи із системи першу нерівність, одержуємо що .

Рішенням другої нерівності. Рішенням системи буде перетинання інтервалів, а саме,

 $a\in \left(-1;\right.\left.3-2\sqrt{2}\right⟧∪\left(3; 3+2\sqrt{2}\right)$.

Відповідь. Якщо $a\in \left(-1;\right.\left.3-2\sqrt{2}\right⟧∪\left(3; 3+2\sqrt{2}\right)$, то ;

при інших значеннях параметра *a* рівняння розв’язків немає.

**Приклад.** Розв’язати рівнян.

Рoзв’язання.

Маємо .

Досить розглянути три випадки:

.

.

.



Роблячи заміну , одержуємо, що  або . Тобто  або 

 Перевіримо, чи є знайдені значення змінної кореннями. Підставляючи значення змінної в рівняння, одержуємо, що  не підходить, тоді кореннями є значення 

3. 





Роблячи заміну , одержуємо  або . Аналогічно, як і при , перевіркою встановлюємо, що тільки  й  не є кореннями. Тоді  є коренем. Отже,

Відповідь. При , ;

при ;

при , .

*Параметр і кількість рішень рівнянь, що містять параметр*

Виділимо клас задач, де за рахунок параметра на змінну накладаються які-небудь обмеження. Для таких задач характерні наступні формулювання:

«При якому значенні параметра рівняння має одне рішення, два рішення, нескінченно багато, жодного»;

Рішенням рівняння (нерівності, системи) є якась підмножина множини дійсних чисел і інші .

**Приклад.** Залежно від значення параметра  знайти число корінь рівняння



Розв’язання. Наявність складного кореня наводить на думку виділення квадрата двочлена під зовнішнім коренем



Отже, ми впритул підійшли до задачі розгляду різних випадків параметра .

Якщо , то рівняння не має рішення.

Якщо , то розглянемо . Якщо , то . За умови , і очевидно це рівняння має тільки один корінь.

Відповідь. При  – один розв’язок ,

при  – розв’язків немає.

**Приклад.** При яких значеннях параметра  рівняння



має єдине рішення?

Розв’язання . Рівняння переписуємо в рівносильну систему



Рішенням нерівності є об'єднання проміжків . Рівняння системи має один корінь коли . , тобто при  .

Тепер перевіримо, чи належить корінь нашим інтервалам: .Тоді

Відповідь. При $k=\frac{7}{2}$ рівняння має єдиний розвязок.

**Приклад**. При яких значеннях параметра  рівняння

.

має єдине рішення?

Розв’язання. Запишемо рівносильне рівняння.

.

Тепер перейдемо до наслідку . Звідки , . Виникла ситуація, що дає нам можливість скористатися механізмом відсівання коренів.

Область визначення вихідного рівняння знайдемо з умов



Очевидно,  і  задовольняють першим двом умовам. Тоді для одиничності рішення досить зажадати



Знайдемо розв’язок першої системи, перетворимо її.



Маємо, що рішенням першої системи є об'єднання інтервалів

.

Друга система розвязків немає.

Відповідь. .

*Параметр і властивості розв’язків рівнянь, що містять параметр*

У цьому пункті ми розглянемо задачі, у яких умова вимагає, щоб відповідь була яким-небудь наперед заданою підмножиною або йдуть обмеження на множину значень змінної  (див. [27], [18],[18]).

**Приклад**. При яких значеннях параметра  обидва корені рівняння  більше 3?

Рішення. Кореннями даного рівняння будуть



Для умови необхідне виконання системи



Перша нерівність системи й друга будуть мати загальні точки тільки в тому випадку, якщо вираз під коренем дорівнює нулю.

*Параметр як рівноправна змінна*

У всіх розібраних задач параметр розглядався як фіксоване, але невідоме число. Тим часом з формальної точки зору параметр – це змінна, причому рівноправна з іншими. Подібна інтерпретація, природно, формує ще один тип (а точніше метод розв’язання) задач із параметрами .

**Приклад.** Указати всі значення параметра , для яких рівняння  має рішення?

Рішення. Позначимо . Вихідне рівняння , з обліком , рівносильне системі



Розглянемо квадратне рівняння, щодо параметра  .

Знайдемо дискримінант розглянутого рівняння .

,

тому що  й , те . Тому остання система рівносильна 

Розглянемо функцію . Вершина параболи – є точка з координатами . Мінімум функції є значення ординати вершини параболи. Тому можемо затверджувати, що параметр  приймає значення у відрізку  на відрізку .

Відповідь. 

*Методи пошуку необхідних умов****.*** *Використання симетрії аналітичних виразів.*

У тих випадках, коли безпосередній пошук значень змінної затруднений, можна спочатку виділити необхідні умови, а потім від необхідних умов перейти до достатніх умов. Будемо називати задачі, розв'язувані таким методом, задачами з пошуком необхідних умов.

Необхідні умови задач цього пункту:

–У кожній задачі обов'язково фігурує аналітичне вираження, геометричний образ якого має вісь або площину симетрії.

–У всіх задачах у тій або іншій формі присутня вимога одиничності рішення.

Якщо описувані задачі мають рішенням координати точки М, то найдеться симетрична крапка М1, координати якої теж є рішенням, тоді точка М повинна лежати (у силу одиничності рішення) на осі симетрії, але помітимо, що ця вимога не є достатньою.

Висловлені міркування й становлять основу одного з методу пошуку необхідних умов, про яке буде йти мова в наступних задачах.

**Приклад.** При яких параметрах  рівняння  має один розв’язок.

Розв’язання. При заміні  на  (і навпаки) рівняння не міняє змісту, тому якщо точка з координатами  – рішення то й  – рішення. А тому що в умові необхідно одиничність розв’язку, то .

Тоді . Тому що ,

 то , що можливо тільки для випадку рівності й при . Тоді одержуємо . Звідки знаходимо два кореня рівняння, а в силу одиничності, $D=0 $й одержуємо .

Відповідь. При  рівняння має одне рішення.

*Корінь квадратичної функції. Теорема Виєта*

Розглянемо квадратне рівняння . Знайдемо корінь цього рівняння . По теоремі Виєта

 виконується наступна система рівнянь , де  й . Розглянемо задачу, рішення якої при використанні теореми Виєта набагато спрощується.

Приклад. При якому значенні параметра  сума квадратів корінь рівняння  приймає найменше значення?

Рішення. Знайдемо дискримінант, . Рівняння має два корені при кожному . Використовуючи теорему Виєта, знайдемо . Таким чином, знайдемо найменше значення функції  на множині . Оскільки при  , а при  , те найменше значення при .

Відповідь. .

##

## Задачі з параметрами до окремих тем.

**Лінійні функції в задачах з параметрами.**

1. 2а(а-2)х=а-2;
2. $\left(а^{2}-1\right)х-(2а^{2}+а-3)=0$
3. $\left(а^{2}+2\right)х=а\left(2-3х\right)+2$

**Розв’язування лінійних рівнянь та нерівностей параметрами**

1. $\left(х-1\right)\sqrt{х-а}=0$.
2. При яких а нерівність $\left(х-а\right)(х-2)\leq 0$ має єдиний розв’язок?
3. При яких значеннях а розв’язком нерівності

$\left(х-а\right)^{2}\left(х-2\right)\left(х+3\right)\leq 0 $буде відрізок?

1. . При кожному значенні розв’язати рівняння

 $\left(а^{2}-9а\right)х=а^{2}-18а+81$.

**Квадратний тричлен.**

1. Розв’язати рівняння $\left(а-2\right)х^{2}-4\left(а+3\right)х+а-1=0$
2. $\left(а^{2}-6а+5\right)х=а-1$
3. $\frac{х-2}{х+а}=0$
4. $\sqrt{х}=-а$
5. $\frac{х-а}{х^{2}-4х+3}=0$
6. $\frac{х^{2}-4х+3}{х-а}=0$
7. Розв’язати нерівність $\left(а^{2}-1\right)х^{2}-2\left(а^{2}+3а+2\right)х+а+2>0$.
8. $а\sqrt{х}>0$
9. При яких значеннях а один з коренів рівняння

$8х^{2}+2\left(1-4а^{2}\right)х+\left(а+2\right)^{3}=0 $дорівнює квадрату іншого?

1. При яких значеннях параметра а корені рівняння

$ ах^{2}-\left(2а+1\right)х+3а-1=0$ більші 1?

1. При яких значеннях параметра *а* один із коренів рівняння

****

більший числа *а*, а другий менший числа *а*?

**Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена належали певному інтервалу відносно чисел m і n на числовій прямій.**

1. При яких значеннях параметра корені рівняння  більші числа 10.
2. Знайти значення *а*, при якому один з коренів рівняння в два рази менший від одного з коренів рівняння 
3. При яких значеннях параметра *а* корені рівняння розташовані в інтервалі (-1;1)?

**Модуль в рівняннях з параметрами**

Розв’язати рівняння залежно від параметра а:

1. $\left|3х-4\right|=а+х;$
2. $2х-\left|х\right|+\left|х-1\right|=а$*;*
3. $\left|х+а\right|=а=х-а-ах;$
4. $\left|3х+2а\right|=$3х-2а-6ах;
5. $\left|x^{2}+а+1\right|=4х;$

**Раціональні рівняння з параметрами**

1. В залежності від значення параметра а визначити число коренів рівняння $х^{4}+\left(1-2а\right)х^{2}+а^{2}-1=0$.
2. При яких значеннях параметра а нерівність

 $х+\frac{7а^{2}-а-2}{х-а}<-7а$ немає розв’язків, більших 1?

1. Розв’язати рівняння $\frac{x}{x-a}+ \frac{1}{x+2}$=0при всіх а.

**Системи рівнянь з параметрами**

1. Знайдіть значення параметра ***а***, при якому система$\left\{\begin{array}{c}х-4у=2,\\16х-а^{2}у=а^{2}-4а\end{array}\right.$, не має розв’язку.
2. Знайдіть найбільше значення параметра ***а***, при якому система $ \left\{\begin{array}{c}х^{2}+у^{2}=81\\(х+2)^{2}+у^{2}=а^{2}\end{array}\right.$, має єдиний розв’язок.
3. При якому найменшому цілому додатному значенні параметра ***а,*** система рівнянь $\left\{\begin{array}{c}х^{2}+у^{2}=36\\у-а^{2}х^{2}=а\end{array}\right.$, не має розв’язку?
4. Знайдіть значення параметрів ***а*** і ***в***, при яких система рівнянь$\left\{\begin{array}{c}8х+\left(а^{2}+ав+в^{2}\right)у=4\\\left(а-в\right)х+26у=2\end{array}\right.$ , має безліч розв’язків.
5. Знайдіть значення параметра ***а,*** при яких розв’язки системи рівнянь $\left\{\begin{array}{c}3х-у=1-а\\х+у=2а+1\end{array}\right.$ , задовольняють умови:$\left\{\begin{array}{c}х\geq 1\\у\leq 4\end{array}\right.$