*МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ*

Методичні підходи до роз’язування ірраціональних рівнянь

Оксана Добровольська, вчитель математики Воютицької СЗШ І-ІІІ ст.

ім. Ігоря Добровольського Самбірського району Львівської області

**Зміст**

Методичні підходи до розв’язування ірраціональних рівнянь............................3

1. Розв’язування рівнянь виду $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=a, a$ – число..…………..……...…….…3

2. Розв’язування рівнянь виду $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$…………………………...….….4

3. Розв’язування рівнянь виду $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=g(x)$.………………………………...…5

4. Розв’язування ірраціональних рівнянь, що містять кілька квадратних коренів.....................................................................................................................6

5. Заміна змінних у ірраціональному рівнянні.................................................10

6. Ірраціональні рівняння з модулем.................................................................10

7. Ірраціональні рівняння з параметрами..........................................................11

8. Системи, що містять ірраціональні рівняння…………………………..…….13

Висновки.………………………………………………………………..….......…15

Список використаних джерел…………………………………………………….16

**Методичні підходи до розв’язування**

**ірраціональних рівнянь**

Ірраціональним називають рівняння, у якому змінна міститься під знаком кореня.

Загальний метод розв’язування ірраціональних рівнянь полягає в тому, що спочатку ізолюється (знищується) один радикал, потім обидві частини рівняння підносяться до степеня, потім знову знищується радикал (якщо він є) і т.д.

При піднесенні обидвох частин рівняння до одного і того ж степеня отримується рівняння, яке в загальному випадку не рівносильне даному; тому перевірка знайдених значень невідомого за умовою даного рівняння обов’язкова, тобто є складовою частиною розв’язання. [6, с.34]

***1. Розв’язування рівнянь виду*** $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=a, a$ **– *число***

Схему розв’язання рівняння $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=a, a$ – *число,* $n\geq 2$ *–* натуральне число, подано у вигляді таблиці.

|  |
| --- |
| $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=a, a$ – *число,* $n\geq 2$ –натуральне число |
| $n$ – парне | $n$ – непарне |
| $$а\geq 0$$ | $$а<0$$ | $$f\left(x\right)=a^{n}$$ |
| $$f\left(x\right)=a^{n}$$ | *Рівняння не має розв’язків* |

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: $\sqrt{х}=9$.

Розв’язання.

 $х=9^{2}$; $х=81$.

Відповідь: 81.

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: $\sqrt{х^{2}-5}=2$.

Розв’язання.

Піднесемо до квадрату обидві частини цього рівняння: $х^{2}-5=4$.

Звідси випливає, що $х^{2}=9, тобто х=3, х=-3$.

Перевіримо, чи є знайдені числа розв’язками рівняння. Справді, підставивши їх у це рівняння, дістанемо правильні рівності $\sqrt{3^{2}-5}=2 і \sqrt{\left(-3\right)^{2}-5}=2$.

Отже, $х=3 і х=-3$ є розв’язками рівняння.

Відповідь: 3;–3.

*Приклад 3.* Розв’язати рівняння: $\sqrt[3]{х}=4$.

Розв’язання.

$х=4^{3}$; $х=64$.

Відповідь: 64.

*Приклад 4*. Розв’язати рівняння: $\sqrt[4]{2∙х-7}=3$.

Розв’язання.

 $2∙х-7=3^{4}$; $2∙х=81+7$; $2∙х=88$; $х=44$.

Відповідь: 44.

*Приклад 5.* Розв’язати рівняння: $\sqrt[6]{х}=-1$.

Розв’язання.

Рівняння не має розв’язків.

Відповідь: немає розв’язків.

***2. Розв’язування рівнянь виду*** $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$

Схему розв’язання рівняння $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=\sqrt[n]{g\left(x\right)}$ , $n\geq 2$ – натуральне число, подано у вигляді таблиці.

|  |
| --- |
| $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=\sqrt[n]{g\left(x\right)}$ , $n\geq 2$ – натуральне число |
| *n* – парне | *n* – непарне |
| $$\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=g\left(x\right),\\f\left(x\right)\geq 0.\end{array}\right. або \left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=g\left(x\right),\\g(x)\geq 0.\end{array}\right.$$ | $$f\left(x\right)=g(x)$$ |

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: $\sqrt[3]{4х-2}=\sqrt[3]{5х+7}$.

Розв’язання.

 $4х-2=5х+7;х=-9$.

Відповідь: –9.

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: $\sqrt{х^{2}+3х}=\sqrt{4х+2}$

Розв’язання.

Рівняння рівносильне системі:   

З першого рівняння маємо . Але умову  задовольняє лише другий корінь. Отже,  – єдиний корінь.

Відповідь: 2.

*Приклад 3.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

 Піднесемо обидві части рівняння до квадрату: .

 Дістанемо квадратне рівняння  корені якого є  і . Відразу зрозуміло, що число  не є коренем рівняння, оскільки обидві частини цього рівняння не визначені, коли . Підставивши в рівняння число , дістанемо правильну рівність . Отже, розв’язком рівняння є лише число . Число  є стороннім коренем. Його можна відкинути, не робивши перевірку, якщо на початку розв’язання накласти умову, що .

Відповідь: 2. [1, с.172]

***3. Розв’язування рівнянь виду*** $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=g(x)$

Подамо у вигляді таблиці схему розв’язування рівняння $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=g(x)$, де  – натуральне число.

|  |
| --- |
| $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=g(x)$, де  – натуральне число. |
|  – парне |  – непарне |
|  |  |

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

 Піднесемо ліву і праву частини рівняння до третього степеня:

; ; ; , 

Відповідь: 0; 3.

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

 Рівняння рівносильне системі:  

 Рівняння  має корені , . Але умову  задовольняє лише перший з них. Отже,  – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: 3.

***4. Розв’язування ірраціональних рівнянь, що містять кілька***

***квадратних коренів***

Розв’язання рівнянь виду , де  – число,  та аналогічних їм доцільно починати з ОДЗ рівняння. Далі можна скористатися одним із двох наступних способів розв’язання.

І спосіб. Забезпечуємо невід’ємність правої і лівої частин рівняння (якщо необхідно, то для цього переносимо доданки з однієї частини рівняння в іншу). Підносимо ліву і праву частини отриманого рівняння до квадрату. Оскільки вони невід’ємні, то таке перетворення рівняння є рівносильним. Після спрощень дістаємо один із раніше розглянутих типів рівнянь.

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

ОДЗ рівняння задається системою  з якої дістаємо .

Перенесемо радикал  у праву частину рівняння: . Ліва і права частини отриманого рівняння є невід’ємні. Піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівняння:     

Оскільки  належить ОДЗ початкового рівняння, то є його єдиним коренем.

Відповідь: 3.

ІІ спосіб полягає в тому, що після знаходження ОДЗ рівняння ліву і праву його частини підносять до квадрату, не вимагаючи їх невід’ємності. Але такий спосіб може привести до появи сторонніх коренів. Тому можна запропонувати два підходи. Перший полягає в тому, що отримані корені треба перевірити, підставивши у початкове рівняння. Але якщо отримані корені – ірраціональні числа, така перевірка є досить громіздкою. Другий підхід полягає у тому, щоб перейти до системи, рівносильної даному рівнянню. Таку систему можна отримати, якщо доповнити рівняння, в якому записані ліва і права частини, піднесені до квадрату, нерівністю, що забезпечує однаковий знак лівої і правої частин.

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

ОДЗ рівняння задається системою  тобто .

Ліва і права частини заданого рівняння невід’ємні, тому їх можна підносити до квадрату, але це призводить до громіздких обчислень. Тому раціональніше один з коренів (наприклад, ) перенести у праву частину. Маємо: . Піднесемо ліву і праву частини  рівняння до квадрату. Оскільки права частина останнього рівняння може бути як додатною, так і від’ємною, то таке перетворення не є рівносильним, тому отриманий корінь слід перевірити.

;     

Перевірка:  Отже,  – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: 1.

*Приклад 3.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

ОДЗ рівняння задається системою  з якої дістаємо .

Піднесення невід’ємної лівої і правої частин до квадрату призведе до громіздких обчислень. Краще радикал  перенести у праву частину:

.

Отримане рівняння можна розв’язати тим самим способом, що й попереднє, а можна підійти до розв’язування інакше. Ліва частина отриманого рівняння – невід’ємна, тому невід’ємною має бути і права частина. Отже, рівняння рівносильне системі:









Перше рівняння має корені  . Але лише другий задовольняє як умову , так і ОДЗ. Оскільки всі перетворення рівняння є рівносильними, то перевірка не є обов’язковою. Отже,  – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: .

***5. Заміна змінних у ірраціональному рівнянні***

Деякі ірраціональні рівняння зручно розв’язувати, використовуючи заміну . При цьому зауважимо, що у випадку парного  нова змінна *t* має задовольняти умову .

*Приклад 1*. Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

Зробимо заміну , де . Тоді , звідки маємо  . Умову  задовольняє перший корінь. Отже, ; ; .

Відповідь: –1.

*Приклад 2*. Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

На перший погляд, рівняння є складним, бо воно містить два кубічні радикали і невідоме поза радикалами. Перш ніж приступити до відшукання способу розв’язання, доцільно спочатку звести рівняння до більш-менш «стандартного» вигляду:  ; . Позначимо . Тоді   – коренів немає, . Звідки: , .

Відповідь: . [4, с.27]

***6. Ірраціональні рівняння з модулем***

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: 

 Розв’язання.

Враховуючи, що корені парного степеня і модуль дійсного числа невід’ємний, отримаємо рівносильне рівняння: 

Розкривши модуль, одержимо рівносильну сукупність двох систем:

     

Відповідь:  

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

Знайдемо область допустимих значень змінної: 

Оскільки всі три доданки невід’ємні, то їхня сума дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вони одночасно рівні нулю, тобто коли *x*=4, *y*=25.

Відповідь: .

***7. Ірраціональні рівняння з параметрами***

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

Задане рівняння рівносильне системі:

  

Розв’яжемо рівняння

 

Тоді матимемо системи:

 або 

 або 

 або 

 або 

 або 

Відповідь:  

 , 

 , 

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння: .

Розв’язання.

;



*або* 

 або 

Далі розв’язуємо систему (1).

або  або  або (система несумісна); 

Якщо , тоді система (1) матиме вигляд:



Відповідь: 

 [6, с.36]

***8. Системи, що містять ірраціональні рівняння***

При розв’язанні систем, що містять ірраціональні рівняння, використовують загальні прийоми розв’язування систем (спосіб підстановки, спосіб додавання, заміну змінних) та методи розв’язування ірраціональних рівнянь.

*Приклад1.* Розв’язати систему рівнянь: 

Розв’язання.

Домножимо чисельник і знаменник першого рівняння на . Отримаємо: ;

;;

 Отже,   

Звідки: 1.   2.  

Після перевірки отримаємо: .

Відповідь: (9;16). [4, с.40]

**В И С Н О В К И**

Вивчення науково-методичної літератури і аналізу практики навчання показали, що в уміннях учнів розв’язувати ірраціональні рівняння є значні недоліки. Учні не знають різних методів розв’язування цих рівнянь.

Практичне значення дослідження в тому, що у ньому розроблені методичні підходи і системи задач по навчанню учнів розв’язувати ірраціональні рівняння. У зв’язку із збільшенням свободи вибору вчителями методичних прийомів роботи виникла можливість впровадити дану методику навчання учнів розв’язувати ірраціональні рівняння у школі.

З усього зробленого можна зробити такі висновки:

1. Розв’язування ірраціональних рівнянь викликає труднощі при розв’язуванні їх учнями.
2. У навчальних посібниках з алгебри вміщено невелику кількість ірраціональних рівнянь.
3. Під час навчання учнів розв’язувати ірраціональні рівняння варто проводити їх типізацію.
4. Особливу увагу слід звернути на основні методи розв’язування цих рівнянь та різні способи розв’язання.
5. Для підвищення ефективності навчання учнів розв’язувати ірраціональні рівняння необхідно поєднувати різні форми і методи навчання.

Розроблена методика може бути використана вчителями при навчанні учнів розв’язувати ірраціональні рівняння.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закл. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 2006.–255 с.: іл.
2. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. Навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.
3. Вивальнюк Л. М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи. – К.: Вища школа, 1988. – 272 с.
4. Гап’юк С.Я., Гап’юк Я.Ф., Гринчишин Я.Т., Підручна М.В., Янченко Г.М. Вступні екзамени у ВУЗ. Тести з математики. – Тернопіль, 1994. – 212 с.
5. Григор'єв А.М. Ірраціональні рівняння. / / Квант.- 1972 .-№ 1.- с.46-49.
6. Добош У.П., Комарницька Л.І. Рівняння і нерівності з параметрами. Дрогобич, 2007. – 87 с.
7. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.
8. Скляренко О.В. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Академічний рівень: Комплексний зошит для контролю знань / О. В. Скляренко.

 – Х, 2010. – 64 с.

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
2. Шкiль М.І., Слєпкань З.I., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 272 с.
3. <http://fizmatsspu.sumy.ua/Konferencii/sbor/sborstud/Zbirnyk_fizmat_2012.pdf>