Курахівська ЗОШ ǀ-ǀǀǀ ступенів № 22 Міської Селидівської ради Тема: «Типи задач самостійної роботи та олімпіаді з геометрії 10 – 11 клас» Вчитель: Снеда В. В

[Геометрія](http://formula.kr.ua/Matematika/Geometriya/) — одна з найдавніших наук. Від початку вона була галуззю практичного знання, що розглядало довжини, площі, і об'єми.

 Початкові поняття геометрії виникли в результаті відволікання від будь-яких властивостей і відносин тіл, крім взаємного розташування і величини. Перші виражаються в дотику або приляганні тіл один до одного, в тому, що одне тіло є частиною іншого, в розташуванні «між», «всередині» тощо. Інші виражаються в поняттях «більше», «менше», в понятті про рівність тіл.

 Шляхом такого ж відволікання виникає поняття геометричного тіла. Геометричне тіло — абстракція, в якій зберігаються лише форма і розміри при повному абстрагуванні від усіх інших властивостей. При цьому геометрія, як властиво математиці взагалі, повністю абстрагується від невизначеності й рухливості реальних форм і розмірів і вважає всі досліджувані нею відносини і форми абсолютно точними і визначеними. Абстрагування від протяжності тіл призводить до понять поверхні, лінії і точки. Це явно виражене, наприклад, у визначеннях, даних Евклідом: «лінія є [довжина](http://formula.kr.ua/Odinitsi-vimiru-dovzhini/odynytsi-vymiru-dovzhyny-dovzhyna.html) без ширини», «поверхня є те, що має довжину і ширину». Точка без жодної протяжності — абстракція, що відображає можливість необмеженого зменшення всіх розмірів тіла, уявна межа його нескінченного розділення. Далі виникає загальне поняття про геометричну фігуру, під якою розуміють не тільки тіло, поверхню, лінію або точку, а й будь-яку їхню сукупність.

Геометрія в первинному значенні — наука про фігури, взаємне розташування і розміри їхніх частин, а також про перетворення фігур. Це визначення цілком узгоджується з визначенням геометрії як науки про просторові форми і відносини. Дійсно, фігура, як вона розглядається в геометрії, і є просторова форма; тому в геометрії говорять, наприклад, «[куля](http://formula.kr.ua/Tila-obertannya/kulya.html)», а не «тіло кулястої форми»; розташування і розміри визначаються просторовими відносинами; нарешті, перетворення, як його розуміють у геометрії, також є певне відношення між двома фігурами — даної і тієї, в яку вона перетвориться.
У сучасному, загальнішому смислі, геометрія обіймає різноманітні математичні теорії, приналежність яких до геометрії визначається не лише схожістю (хоча часом і вельми віддаленою) їхнього предмета зі звичайними просторовими формами і відносинами, але також тим, що вони історично склалися і складаються на основі геометрії в первісному її значенні, і в своїх побудовах виходять з аналізу, узагальнення і видозміни її понять. Геометрія в цьому загальному смислі тісно переплітається з іншими розділами математики та її кордони не є точними.

***Задачі для самостійної роботи з відповідями*** ***(геометрія ).***

**Завдання 1**. Два паралелограма *ABCD і AB1C1D1*лежать в різних площинах (точка А їх загальна вершина). Довести, що прямі *BB1, CC1, DD1*, паралельні деякій площині.

***Розв’язання*.** $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}, \vec{AC\_{1}}=\vec{AB\_{1}}+\vec{AD\_{1}}$

Для доказу паралельності прямих *ВВ1, СС1, DD1* деякої площині потрібно переконатися в тому, що направляючі вектори цих прямих компланарні (зокрема, колінеарні). Як направляючі вектори можна вибрати вектори $\vec{BB\_{1}}$, $\vec{CC\_{1}}$ і $\vec{DD\_{1}}$. Но

$$\vec{AC\_{1}}-\vec{AC}=\left(\vec{AB\_{1}}-\vec{AB}\right)+\left(\vec{AD\_{1}}-\vec{AD}\right),$$

 або $\vec{CC\_{1}}=\vec{BB\_{1}}+\vec{DD\_{1}}$.

Ця рівність показує, що вектори $\vec{BB\_{1}}$, $\vec{CC\_{1}}$, $\vec{DD\_{1}}$ дійсно компланарні, а тому і прямі *ВВ1, СС1, DD1* паралельні деякій площині. Необхідно звернути увагу учнів на важливий момент: за певних умов якісь три або більш прямі, що попарно схрещуються, можуть бути паралельні якій-небудь площині, але в загальному випадку вже три прямі, наприклад, паралельні ребрам тригранного кута, не паралельні жодній площині.

**Завдання** **2**. Дано чотири точки *A, B, C, D*, які не належать площині. Відрізки *АВ і CD* точками М і N розділені в рівних стосунках: |*AM| : | МВ | = | CN | : | ND* | = *k*. Довести, що прямі *AC, BD і MN* паралельні площині.

***Розв’язання*.** $\vec{AM}=k\*\vec{MB}, \vec{CN}=k\*\vec{ND}$

$\vec{AC},\vec{BD},\vec{MN}$ – направляючі вектори прямих AC, BD, MN – компланарні.

Якщо О довільна точка простору, то $\vec{OM}-\vec{OA}=k\*\left(\vec{OB}-\vec{OM}\right)$.

$\vec{ON}-\vec{OC}=k\*\left(\vec{OD}-\vec{OM}\right)$, значить $\vec{NM}-\vec{CA}=\left(\vec{BD}-\vec{NM}\right)$.

$\vec{NM}=\frac{1}{1+k}\vec{CA}+\frac{k}{k+1}\vec{DA}$, тоді вектори компланарні і *AC, BD* і *MN* паралельні площині.

**Завдання** **3.**  Паралельні площини α і β перетинають сторони кута *АВС* в точках *А1, С1, А2, С2* відповідно. Знайти *ВС1*, якщо *А1В : А1А1* = 1 : 3, *ВС2* = 12.

***Розв’язання*.**

1.  Оскільки *А1В* : *А1А2* = 1 : 3, то *А1В* = х, *А1А2* = 3х.
2. Площина (*АВС*) перетинає площину α по прямій А1С1, а площина β - по прямій *А2С2*. Оскільки площини α і β паралельні, то паралельні і прямі *А1С1* і *А2С2*.
3. Розглянемо кут *АВС*. По теоремі Фалеса виконується: *ВА1/ВА2* = *ВС1/ВС2*. Крім того, *ВА2* = *ВА1* + *А1А2*, тобто враховуючи пункт 1 *ВА2* = *ВА1* + *А1А2* = х + 3х = 4х.

Тоді х/ (4х) = *ВС₁*/12, тобто *ВС1* = 3.

**Завдання** **4.**  У ромбі *АВСD* кут *А* рівний 60°, сторона ромба дорівнює 4. Пряма *АЕ* перпендикулярна площині ромба. Відстань від точки *Е* до прямої *DC* дорівнює 4. Знайти квадрат відстані від точки *А* до площини *ЕDC*.

***Розв’язання*.**

1. ****** Проведемо *АН* перпендикулярно *DC* тоді *ЕН* перпендикулярно *DC* по теоремі про три перпендикуляри. Тоді *ЕН* - відстань від точки *Е* до прямої *DC*, тобто *ЕН* = 4.
2. Проведемо *АК* - висоту трикутника *АЕН* - і доведемо, що *АК* - відстань від точки *А* до площини (*ЕDC*) :

*DC* перпендикулярно *АН* і *DC* перпендикулярно *ЕН*, значить, *DC* перпендикулярно площини (*АЕН*) за ознакою перпендикулярності прямої і площини. *АК* міститься в площині (*АЕН*), означає *АК* перпендикулярно *DC*. Крім того, *АК* перпендикулярна *ЕН* по побудові. Оскільки пряма *АК* перпендикулярна двом пересічним прямим, що лежать в площині *ЕDC* (*ЕН* і *DC*), то *АК* перпендикулярно площини (*ЕDC*), значить, *АК* - відстань від точки *А* до площини (*EDC*).

Рис 4

1. Розглянемо трикутник *ADH*: *АD* = 4, кут *ADH* = 60° (*ВАD*, що навхрест лежить з кутом), тоді *АН* = *АD* · sin *ADH*. Маємо, що *АН* = 4 · √3/2 = 2√3.
2. Розглянемо трикутник *ЕАН* - прямокутний (кут *ЕАН* = 90°). По теоремі Піфагора *ЕН*2 = *ЕА*2 + *АН*2;

*ЕА*2 = 16 - 12 = 4;

*ЕА* = 2.

Для площі трикутника *ЕАН* можна використати формули

SEAH = (*EA* · *AH*) /2 або SEAH = (*AК* · *ЕH*) /2, тоді *EA* · *AH* = *AК* · *ЕH* або *АК* = (*EA · AH*) /*ЕН*.

 Маємо: *АК* = (2 · 2√3) /4 = √3, тому *АК*2 = 3.

**Завдання** **5.**  У трикутнику *АВС* кут *В* - прямій, *ВС* = 2. Проекцією цього трикутника на деяку площину є трикутник *ВDC*, *АD* = √2, кут між площинами *АВC* і *ВСD* дорівнює 45°. Знайти кут (у градусах) між прямою *АС* і площиною (*ВDC*).

***Розв’язання*.**

1. ******По теоремі про три перпендикуляри *ВD* перпендикулярно *ВС*, тоді кут між площинами (*АВС*) і (*ВDC*) - є кут *АВD* рівний 45°.
2. *АС* - похила, *АD* - перпендикуляр до площини (*BCD*), *CD* - проекція *АС* на площину (*ВСD*), означає кут *АСD* дорівнює куту між прямою *АС* і площиною (*ВDC*), тобто кут *АСD* - шуканий.
3. Розглянемо трикутник *АВD* - прямокутний (кут *АВD* = 90°) :

*АВ* = *АD*/sin *ABD*;

 *AB* = √2/(√2/2) = 2.

1. Розглянемо трикутник *АВС* - прямокутний (кут *АВС* = 90°). По теоремі Піфагора: *АС*2 = *АВ*2 + *ВС2*;

 *АС*2 = 4 + 4 = 8;

 *АС* = 2√2.

1. Розглянемо трикутник *АСD* - прямокутний (кут *ADC* = 90°) : оскільки *АD* = 1/2 *АС*, то кут *АСD* = 30°.

**Завдання 6**. *АВСDA1B1C1D1* - куб. Знайти кут (у градусах) між *АВ1* і *ВD1*.

***Розв’язання*.**

1. Пряма *АВ1* міститься в площині (АА1В1), пряма *ВD1* перетинає площину (*АА1В1*) в точці *В*, але *В* не належить *АВ1*, означає що прямі *АВ1* і *ВD1* перехрещені (за ознакою прямих, що перетинаються)
2. Введемо прямокутну систему координат з початком відліку в точці *В* і одиничним відрізком, рівним по довжині ребру куба.
3. Визначимо координати точок *B*, *D1, A, B1* в заданій системі координат :

*В*(0; 0; 0);

*D*1(1; 1; 1);

*A*(1; 0; 0);

*B*1 (0; 0; 1), тоді вектор *BD*1 {1; 1; 1}, а вектор *АВ*1  – {- 1; 0; 1}.

1. Знайдемо скалярний добуток векторів *ВD1* і *АВ1* :

Рис 6

 *ВD1* і *АВ1* = 1 · (- 1) + 1 · 0 + 1 · 1 = 0.

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони взаємно перпендикулярні, значить, кут між *АВ1* і *ВD1* дорівнює 90°.

**Завдання 7**. Довжина бічного ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8. Бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайти значення вираження √3 · V, де V - об'єм піраміди.

***Розв’язання*.** Оскільки по умові чотирикутна піраміда правильна, то в її основі лежить квадрат *ABCD.*

1. ******Висота піраміди *РО* проектується в центр основи (точку *О* - точку перетину діагоналей квадрата *АВСD*).
2. Кут між прямою *РС* і площиною (*АВС*) дорівнює плоскому куту *РСО* і рівний 60°.
3. Розглянемо трикутник *РОС* - прямокутний (кут *РОС* = 90°) :

*РО* = *РС* · sin *PCO*;

*OC* = *PC* · cos *PCO*;

*PO* = 8 · √3/2 = 4√3;

*OC* = 8 · 1/2 = 4.

1. Розглянемо квадрат *ABCD*: *АС* = 2 · *ОС* = 2 · 4 = 8, тоді S*ABCD* = d2/2, де d - діагональ квадрата, тобто S*ABCD* = 64/2 = 32.
2. V = 1/3 S*осн* · *h*; V = 1/3 · 32 · 4√3 = 128√3/3.
3. √3 · V = √3 · 128√3/3 = 128.

**Завдання** **8**. Дана правильна 4-кутна піраміда, усі ребра якої дорівнюють 2. Чи можна в неї вписати конус? Якщо так, то знайдіть площу бічної поверхні цього конуса.

***Розв’язання*.** Якщо, піраміда правильна то її основа квадрат і в нього можна вписати коло і вершина піраміди проектується у центр квадрата тоді у піраміду можливо вписати конус.

 Знайдемо площу бічної поверхні конуса по формулі S=π*Rl*. Необхідно знайти радіус основи конуса (*OH*) і його твірну (*SH*).

 Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола, вписаного в квадрат із стороною 2. Значить він дорівнює половині сторони квадрата - 1.

 Твірна конуса дорівнює апофемі бічної грані. Це висота рівностороннього трикутника із стороною 2. По теоремі Піфагора $SH=\sqrt{SD^{2}-DH^{2}}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ . Значить, площа бічної поверхні конуса :$S=π\sqrt{3}$ .

**Завдання** **9.** Два взаємно перпендикулярних перерізи сфери рівновіддалені від її центру. При цьому центр сфери знаходиться на відстані 4√2 см від загальної хорди цих перерізів, рівної 6 см Знайдіть площа сфери. Дано: сфера з центром в точці *О, АВ* ⊥ *CD, АВ* - діаметр перерізу, *CD* - діаметр перерізу *MN* - загальна хорда*. MN* = 6 см*, ОК* = 4√2, *ОО1 = ОО2*. Знайти: S*сф*.

***Розв’язання*.** Розглянемо прямокутний ΔONK з ∠OKN = 90°;

$NO=R=\sqrt{3^{2}+\left(4\sqrt{2}\right)^{2}}=\sqrt{9+32}=\sqrt{41} (см)$;

$S\_{сф}=4πR^{2}=4π\*41=164π (см^{2})$.

**Завдання** **10.** Знайти об'єм похилої призми, у якої основою є трикутник із сторонами 10 см, 10 см, 12 см, а бічне ребро рівне 8 см, складає з площиною основи кут 60°.

 Дано: *АВСА1В1С1* - призма похилої, *АВ* = 10 см, *ВС* = 10 см, *АС* = 12 см, *ВВ1* = 8 см, ∠*B1BK* = 60°. Знайти: *V*np. - ?

***Розв’язання*.**

1. $V\_{пр}=S\_{осн}\*h$; $S\_{осн}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ – (формула Герона);

$S\_{осн}=\sqrt{16\*6\*4\*6}=4\*2\*6=48\left(см^{2}\right)$.

1. Δ*BB1H* - прямокутний, оскільки *В1Н* - висота. *В1Н* = *ВВ1* · sin60°;

 $B\_{1}H=8\*\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3} \left(см\right)$.

1. $V\_{пр}=4\sqrt{3}\*48=192\sqrt{3} \left(см^{3}\right)$.

***Розв’язання завдань олімпіади з математики (геометрія )***

***Завдання*** **1**. Чи існує опуклий многокутник числа діагоналей якого у 10 раз більше числа його сторін.

***Розв’язання*.**Так $N=\frac{n\left(n-3\right)}{2}$, число діагоналей.

$\frac{n\left(n-3\right)}{2}=10n$;

$n^{2}-23n=0$;

$n\left(n-23\right)=0$;

$n=23$.

***Завдання*** **2**. Чи існують у просторі 4 точки *A, B, C, D* так, що *AB=CD*=8 cм, *AC=BD*=10 cм, *AB+BC*= 13 cм.

***Розв’язання*.** Умові відповідає фігура утворена двома трикутниками Δ*ABC*

D

A

B

C

 і Δ*BCD* розміщені під деяким кутом.

***Завдання*** **3**. На площині побудован відрізок *AB*. Де може знаходитися точка *С* так, щоб Δ *ABC* був гострокутним.

***Розв’язання*.** Треба побудувати на *АВ* як на діаметрі коло і через *А* і *В* провести дві прямі перпендикулярні *АВ*. Точка С знаходиться між цими прямими поза колом.

***Завдання*** **4**.Три кулі радіуса *R* дотикаються один одного і площини α, а четверта куля радіуса *R* знаходиться так, що дотикаються кожної з трьох даних куль і утворює «горки». Знайдіть висоту «горки» з 4 куль?

***Розв’язання*.** Нехай 4 кулі радіуса *R* з центрами *А, В, С, D* дотикаються один одного і перші три з площиною α у точках *А1, В1 , С1*. Тоді *АВСD* – вершини правильної піраміди з ребром 2*R*. Вершина *D* проектується у точку *О* – центр основи:

$AO= \frac{2}{3}\*\frac{2R\sqrt{3}}{2}=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$,

$OD=\sqrt{4R^{2}-AO^{2}}=\sqrt{4R^{2}-\frac{4R^{2}}{3}}=2R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Висота «горки» з чотирьох куль: $OD+2R=2R\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)$.

***Завдання*** **5**. Чи існує тетраедр, усі грані якого рівнобедрені трикутники, причому ніякі два з них не рівні?

***Розв’язання*.**  Припустимо, такий тетраедр *ABCD* існує. Помітимо спочатку, що з однієї вершини не може виходити три рівні ребра. Дійсно, якщо *АВ = АС = AD*, то, оскільки серед відрізків *ВС, BD* і *CD* є хоч би два рівних (*ABCD* - рівнобедрений), те серед трикутників *ABC, ABD, ACD* є хоч би два рівних.

Далі помітимо, що дві сусідні грані - рівнобедрені трикутники, не можуть мати загальне основані . Дійсно, якщо *АВ = АС* і *DB = DC*, то трикутники *ADB* і *ADC* рівні. Тепер помітимо, що жоден з трикутників не може бути рівностороннім. Дійсно, якщо *АВ = ВС = АС*, то хоч би одно з ребер *АВ, ВС, АС* є основою в обох трикутниках (чому?), що містять його.

 Далі, без обмеження спільності можна рахувати, що *АВ = АС, ВС = BD*. Тоді, оскільки *AD ≠ АВ*, то *AD = BD*. Аналогічно, *DC = АВ*. Отже, трикутники *ABC* і *ACD* рівні. Отже, такого тетраедра не існує. Сторону трикутника називатимемо основою у разі, якщо дві інші сторони цього трикутника рівні між собою; у рівностороннього трикутника усі сторони називаються підставами.

 Отже такий тетраедр не існує.

***Завдання*** **6**. Два кола *O* і *O1* перетинаються в точці *A* . Провести через точку A таку пряму, щоб відрізок *BC*, який висікається на ній колами *O* і *O1*, дорівнював даному.

***Розв’язання*.** Нехай завдання вирішене. Відрізок *BC* прямої, що проходить через точку перетину двох кіл *A*, дорівнює цьому відрізку a . Опустимо з центрів кіл *O* і *O1* перпендикуляри *OE* і *O1F* на цю пряму. З центру *O1* проведемо пряму *O1K*, паралельну *EF* (дивися малюнок). *EFO1K -* прямокутник, *KO1=EF, EF=EA+AF, BE=EA, AF=FC*, оскільки хорди діляться перпендикулярними до них радіусами навпіл. Тому *EF=BE+FC=*a/2 .

 Побудова зводиться до побудови прямокутного трикутника *KOO1* по гіпотенузі *OO1* і катету *KO1=EF=*a/2 . Побудувавши цей трикутник, проводимо шукану пряму паралельно *O1K* через точку *A* або опускаємо з точки A перпендикуляр на *OK* .

 Оскільки по одну сторону від цього відрізку *OO1* можна побудувати два рівних симетричних прямокутних трикутника, то завдання має два рішення. Два рішення буде і у тому випадку, коли вийде тільки один рівнобедрений трикутник, оскільки в цьому випадку його катети рівноправні і умові завдання задовольнятиме перпендикуляр, опущений на кожного з катетів. Побудова можлива, якщо можлива побудова прямокутного трикутника, тобто якщо a/2 < *OO1* .

 У разі a/2 = *OO1* рішення також можливо, але воно буде єдиним. Це буде пряма, що проходить через точку *А* паралельно лінії центрів.

***Завдання*** **7**. Якщо через точку *O*, розташовану усередині трикутної піраміди *ABCD*, провести відрізки *AA1, BB1, CC1, DD1*, де *A1* лежить на грані, протилежній вершині *A, B1* - на грані, протилежній вершині *B*, і так далі, то має місце рівність *A1O/A1A + B1O/B1B + C1O/C1C + D1O/D1D*=1.

***Розв’язання*.** Точка *O* є вершиною чотирьох пірамід, підставами яких служать чотири грані цієї піраміди. Сума об'ємів цих пірамід дасть об'єм піраміди *ABCD* (дивися малюнок). Порівняємо об'єм цієї піраміди з об'ємом однієї з внутрішніх пірамід, наприклад з об'ємом піраміди *OABC* . Оскільки ця піраміда має основу *ABC*, як і ця піраміда, то об'єми цих пірамід відносяться як їх висоти.

 Точка *O* є вершиною чотирьох пірамід, основами яких служать чотири грані цієї піраміди. Сума об'ємів цих пірамід дасть об'єм піраміди *ABCD* (дивися малюнок). Порівнянний об'єм цієї піраміди з об'ємом однієї з внутрішніх пірамід, наприклад з об'ємом піраміди *OABC* . Оскільки ця піраміда має основу *ABC*, як і ця піраміда, то об'єми цих пірамід відносяться як їх висоти.
 Нехай висота цієї піраміди *DM*, а висота піраміди *OABC - ON* . Обидві ці висоти лежать в площині трикутника *DD1M, NO*||*DM* .

З подібності трикутників знайдемо, що висоти пірамід відносяться як *D1O: D1D* .

 Якщо позначимо об'єм цієї піраміди через *V*, а об'єми внутрішніх пірамід через *V1, V2, V3, V4,* те для першої піраміди отримаємо *V1/V = D1O/D1D* . Аналогічно для інших пірамід знайдемо:

*V2/V = A1O/A1A;*

*V3/V = B1O/B1B;*

*V4/V = C1O/C1C.*

 Запишемо об'єм цієї піраміди : *V = V1 + V2 + V3 + V4* . Якщо цю рівність розділити почленно на *V* і підставити знайдені вище стосунки об'ємів, отримаємо доводжувану рівність.

***Завдання*** **8**.  – найбільша сторона у трикутнику . На цій стороні відмітили точки  таким чином, що  та . Позначимо через  та  середини відрізків  та  відповідно. Вписане коло  дотикається його сторін  та  у точках  та  відповідно. Доведіть, що точки  лежать на одному колі.

***Розв’язання*.** Позначимо через  – інцентр . Оскільки  рівнобедрений з вершиною в точці , тому медіана  співпадає з бісектрисою та висотою, звідси , аналогічно . Крім того . Аналогічно , тому усі чотири зазначені точки лежать на колі з діаметром .





















***Завдання*** **9**. Нехай  – сторони трикутника з периметром 1. Доведіть, що справджується нерівність:

.

***Розв’язання*.** Без обмеження загальності будемо вважати, що . З нерівності трикутника маємо, що , тому .

, , .

Далі просто

,

що й треба було довести.

***Завдання*** **10**.У гострокутному трикутнику  провели бісектрису . Описане коло  перетинає сторону  у точках  та . Пряма, що паралельна прямій  та проходить через точку , перетинає пряму  у точці . Доведіть, що  – рівнобедрений.

***Розв’язання*.** Позначимо , тоді . Оскільки  – циклічні, то . Оскільки , то , тому точки  – циклічні, але тоді , що й треба довести.  – рівнобедрений з вершиною .











