**Авторське розв’язування задач**

**ХХI Всеукраїнського турніру юних математиків**

**імені професора М. Й. Ядренка**

 **(2018-2019 н. р.)**

**Автори:**

**Пелешко Ганна Михайлівна,**

**Ковалисько Євгенія Володимирівна,**

**вчителі математики ліцею «Оріяна», м. Львів**

**Львів 2019**

Щорічно проводиться Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка. Команда учнів нашого ліцею «Оріяна» брала участь у турнірі 13 жовтня 2018 року в ЛНУ імені І.Я. Франка. Пропонуємо авторський розв’язок двох задач з цього турніру.

**Задача 1. «Чарівні сни»**

**Умова задачі**

а) Алісі якось наснилися 2018 гномів, що стояли по колу. Кожен із гномів мав спочатку деяке парне (але, можливо, нульове) число цукерок. Далі сталося таке: усі гноми в один і той самий момент поділили свої цукерки на дві однакові частини та віддали одну частину своєму сусідові зліва, а іншу – своєму сусідові справа. У підсумку в деякого гнома опинилася 1 цукерка, у наступного за годинниковою стрілкою – 2 цукерки, у наступного – 3 цукерки і т.д.; в останнього (того, що стояв перед першим гномом) стало, відповідно, 2018 цукерок. Чи могло таке статися насправді?

б) Наступної ночі Алісі наснилися 1009 гномів, що так само стояли по колу та ділилися цукерками з сусідами. У підсумку в одного з гномів стало 2 цукерки, в наступного за годинниковою стрілкою – 4 цукерки, в наступного за ним – 6 цукерок і т.д.; в останнього гнома, таким чином, знову опинилося 2018 цукерок. Чи міг новий сон Аліси бути правдою?

**Розв’язання**

а) Покажемо на схемі 2018 гномів, що стали по колу:



Суму після розподілу цукерок для 2018 гномів можна записати так:

 **S= 1 + 2 + 3 + 4 +…+2017+2018.**

Скористаємось способом доведення, як для виведення формули суми n-членів арифметичної прогресії:

 **S= 1 + 2 + 3 + 4 +…+2017+2018**

 **S=2018+2017+2016+2015+…+ 2 + 1**

─────────────────────────────────────────────────────────

**2S=2019+2019+2019+2019+…+2019+2019**

Тоді: 2‧S= 2019‧2018, S= 2019‧2018 / 2

S=2019‧1009=2 037 171 (цукерок).

Зауважимо, що у відповіді ми отримали число непарне, а за умовою, загальне число цукерок після перерозподілу – парне, тому із протиріччя випливає, що **таке насправді не могло статися**.

б) **Загальне формулювання задачі**

**Задача.** Нехай по колу розташовані $n=4m+1$ гномів, *m*$\geq 1$(якщо *m*=252, то *n*=1009, що відповідає умові завдання). У кожного гнома є парна невід’ємна кількість цукерок. В один момент кожен гном поділив свої цукерки на дві рівні частини і віддав одну сусіду праворуч, другу – сусіду ліворуч. У певного гнома (з номером 1) виявилося 2 цукерки, в наступного за годинниковою стрілкою (номер 2) – 2‧2 цукерок, в наступного (номер 3) – 3‧2 тощо. В останнього гнома, який стоїть перед першим (номер *n*), відповідно, – *n*‧2 цукерок. За яких значень *m* це можливо?



Таблиця 1

Запис системи рівнянь і її розв’язання

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Гном | Рівняння | Розв’язання |
| 2 | $$x\_{1}+x\_{3}=4$$ | $$x\_{3}=4-x\_{1}=4‧1-x\_{1}$$ |
| 4 | $$x\_{3}+x\_{5}=8$$ | $$x\_{5}=\left(8-4\right)+x\_{1}=4‧1+x\_{1}$$ |
| 6 | $$x\_{5}+x\_{7}=12$$ | $$x\_{7}=12-\left(8-4\right)-x\_{1}=8-x\_{1}=4‧2-x\_{1}$$ |
| 8 | $$x\_{7}+x\_{9}=16$$ | $$x\_{9}=\left(16-12\right)+\left(8-4\right)+x\_{1}=4‧2+x\_{1}$$ |
| … | … | … |
| 4*i*-2 | $$x\_{4i-3}+x\_{4i-1}=2‧4i-4$$ | $$x\_{4i-1}=4i-x\_{1}$$ |
| 4*i* | $$x\_{4i-1}+x\_{4i+1}=2‧4i$$ | $$x\_{4i+1}=4i+x\_{1}$$ |
| … | … | … |
| 4*m*-2 | $$x\_{4(m)-3}+x\_{4(m)-1}=2‧4m-4$$ | $$x\_{4m-1}=4m-x\_{1}$$ |
| 4*m* | $$x\_{4(m)-1}+x\_{4(m)+1}=2‧4m$$ | $$x\_{4m+1}=4m+x\_{1}$$ |
| 1 | $$x\_{4(m)+1}+x\_{2}=2$$ | $$x\_{2}=2-4m-x\_{1}$$ |
| 3 | $$x\_{2}+x\_{4}=6$$ | $$x\_{4}=6-2+4m+x\_{1}=1‧4+4m+x\_{1}$$ |
| 5 | $$x\_{4}+x\_{6}=10$$ | $$x\_{6}=\left(10-6\right)+2-4m-x\_{1}=1‧4+2-4m-x\_{1}$$ |
| 7 | $$x\_{6}+x\_{8}=14$$ | $$x\_{8}=14-(10- 6)-2+4m+x\_{1}=2‧4+4m+x\_{1}$$ |
| 9 | $$x\_{8}+x\_{10}=18$$ | $$x\_{10}=\left(18-14\right)+\left(10-6\right)+2-4m-x\_{1}==2‧4+2-4m-x\_{1}$$ |
| … | … | … |
| 4*i*-1 | $$x\_{4i-2}+x\_{4i}=2(4i-1)$$ | $$x\_{4i}=4i+4m+x\_{1}$$ |
| 4*i*+1 | $$x\_{4i}+x\_{4i+2}=2(4i+1)$$ | $$x\_{4i+2}=4i+2-4m-x\_{1}$$ |
| … | … | … |
| 4*m*-1 | $$x\_{4m-2}+x\_{4m}=2(4m-1)$$ | $$x\_{4m}=4m+4m+x\_{1}=8m+x\_{1}$$ |
| 4*m*+1 | $$x\_{4m}+x\_{1}=2(4m+1)$$ | $$x\_{1}=4m+2-4m-x\_{1}=2-x\_{1}$$ |

З останнього рядка таблиці отримаємо $x\_{1}=2-x\_{1}$, тобто $x\_{1}=1$.

Визначимо $x\_{2}$:$ x\_{2}=2-4m-x\_{1}=2-4m-1=1-4m$.

Найбільше значення $x\_{2}$ досягається за $m=1$, тобто $ x\_{2}=-3$.

Від’ємний розв’язок суперечить умові завдання, в якому вказано, що гноми мали деяку парну (але, можливо, нульову) кількість цукерок.

**Висновок**

За будь-яких $m\geq 1$ для $n=4m+1$ гномів, розв’язок системи рівнянь містить від’ємну кількість цукерок для другого гнома.

**Відповідь**: **новий сон не міг бути правдою для 1009 гномів (**$m=252$**).**

**Задача 2. «Дивна таблиця»**

**Умова задачі**

У верхньому рядку та лівому стовпці таблиці 2018×2018 проставлено одиниці. Число у будь-якій іншій комірці таблиці дорівнює сумі всіх чисел, що стоять водночас ліворуч і вище від цієї комірки.

а) Знайдіть усі комірки, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч.

б) Знайдіть усі комірки, числа в яких націло ділять і свого сусіда знизу, і свого сусіда праворуч.

**Розв’язання**

Початкова таблиця показана на рис. 1.



Рис. 1. Початкова таблиця

Частина заповненої таблиці показана на рис. 2.



Рис. 2. Частина заповненої таблиці

Введемо позначення:

$n$ – кількість стовпців і рядків у таблиці (у завданні $n=2018$).

 $t\_{ij}$ – число в комірці $i,j$ таблиці, де $i$ – номер рядка (1$\leq i\leq n$), $j$ – номер стовпця (1$\leq j\leq n$).

Утворена таблиця є симетричною відносно головної діагоналі таблиці, тобто $t\_{ij}=t\_{ji}$. Це випливає зі способу підрахунку чисел в комірках таблиці.

***Лема 1.*** У заповненій таблиці $t\_{ij}=t\_{i,j-1}+t\_{i-1,j}$ для всіх комірок $2\leq i\leq n$ і $2\leq j\leq n$ (за винятком комірки (*2,2*), де $t\_{2,2}=1$).

*Доведення*. Для будь-якої комірки $(i,j)$ суму $t\_{ij}$ можна розділити на чотири частини, як це показано на рисунку 3 для комірки (*4,6*) з $t\_{4,6}=41$. Тоді $t\_{ij}=2S+S\_{v}+S\_{H}$ (1).

Зауважимо, що $t\_{i-1,j}=S+S\_{v}$ (2) і $t\_{i,j-1}=S+S\_{H}$ (3).

Перепишемо (1) у формі $t\_{ij}=(S+S\_{v})+(S+S\_{H})$ (4).

Підставивши (2) і (3) в (4) отримаємо $t\_{ij}=t\_{i,j-1}+t\_{i-1,j}$, що й треба було довести.

**

Рис. 3. Схема поділу $t\_{ij}$ на чотири частини (ілюстрація до леми)

Ілюстрація доведення леми 1

|  |  |
| --- | --- |
|  |   |
| Рис. 2. Частина заповненої таблиці | Рис. 3. Схема поділу $t\_{ij}$ на чотири частини (ілюстрація до леми) |

**Висновки**

а) Лема 1 виконується для всіх комірок, зокрема для комірок на головній діагоналі таблиці, де $i=j, 3\leq i\leq n.$ З урахуванням симетричності таблиці $t\_{i,i-1}=t\_{i-1,i}$, тобто $t\_{ij}=2t\_{i-1,j}$ (наприклад, $t\_{4,4}=2\*t\_{3,4}=2\*7=14)$.

Усіх комірок, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч, є $n-2$ (згідно з лемою 1) + 3 (комірки (*2,2*), (*2,3*), (*3,2*)), тобто $n+1$. Згідно з умовою таких комірок буде 2018+1=2019.

Інших таких комірок немає, бо з таблиці видно, що $t\_{i,j-1}\ne t\_{i-1,j}$ для $i\ne j$. З цього випливає, що одне з чисел $t\_{i,j-1}$ або $t\_{i-1,j}$ є більшим за половину $t\_{i,j}$, яке не може націло ділити $t\_{i,j}$.

б) усі комірки, числа в яких націло ділять і свого сусіда знизу, і свого сусіда праворуч показані на рисунку червоним кольором. Таких комірок є $\left(n-1\right)+\left(n-2\right)+1.$ Згідно з умовою таких комірок буде 2017+2016+1=2\*2017=4034. Інших таких комірок немає, бо, як видно з таблиці, число в комірці є більшим за половину щонайменше одного з таких сусідів, тобто не може ділити такого сусіда націло.

Рис. 4. Ілюстрація для задачі 2б.