**Розв’язання ірраціональних рівнянь.**

Готуючись до олімпіад з математики, а зараз до зовнішнього незалежного оцінювання учні зустрічаються зі значним обсягом рівнянь, які потрібно виконати за обмежений проміжок часу. Серед них часто трапляються такі, якими перевіряються у учнів не стільки технічні навички, скільки уважність, уміння знайти найкоротший шлях розв'язання, застосовувати нетрадиційний, оригінальний метод тощо. Тому сьогодні дуже важливо оволодіти різноманітними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування ірраціональних рівнянь, який би не містив громіздких викладень, але за допомогою їх учні змогли б продемонструвати яскраві, ефективні, а інколи і несподівані застосування теоретичного матеріалу. Ці прийоми тісно пов’язані з матеріалом , що вивчається в школі, але, крім того, їх нестандартне розв’язання привчає школярів не задовольнятися шаблонами, алгоритмами, а вдумливо підходити до пошуку оригінальних розв’язань.

Розв’язування ірраціональних рівнянь потребує знань властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, проміжки зростання та спадання), властивостей рівнянь (рівносильність та не рівносильність перетворень), вміння проводити дослідження, не випускаючи ніяких випадків. Крім того, для застосування графічних методів потрібні вміння виконувати побудову графіків функцій та проводити графічні дослідження, що відповідають різним значенням параметра.

Різноманітність ірраціональних рівнянь охоплює весь курс шкільної математики. Володіння прийомами розв’язання їх можна вважати критерієм знань основних розділів шкільної математики, рівня математичного й логічного мислення.

Головна мета при розв'язуванні ірраціональних рівнянь - це позбутися ірраціональності. Вона досягається двома способами: піднесенням обох частин рівняння до відповідного степеня або заміною. Перший спосіб застосовується частіше, хоча останній часто значно спрощує перетворення. Розв'язуючи ірраціональні рівняння, потрібно пам'ятати, що:

а) перевірка одержаних значень для невідомого в загальному випадку являється обов'язковою частиною розв'язку, так як при піднесенні в парну степінь обох частин рівняння можуть з'явитися сторонні корені;

б) в багатьох випадках сторонні корені можуть належати ОДЗ невідомого в початковому рівнянні, тому є помилкою винесення в відповідь усіх розв'язків рівняння, що належать ОДЗ, без їх перевірки. Взагалі кажучи, перевірку здобутих розв'язків потрібно робити при розв'язанні будь-яких рівнянь, якщо це пов'язано з виконанням складних перетворень.

ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

**1.Рівняння на ОДЗ.**

В окремих випадках, не розв’язуючи дане ірраціональне рівняння, можна встановити, що воно не має коренів. Наприклад, =-3 рівняння  не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від’ємним.

Рівняння  +=0 не має розв’язків, бо обидва доданки є арифметичними коренями, а тому не можуть бути від’ємними. А сума двох невід’ємних чисел дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю. Одночасно ж вирази і нулю дорівнювати не можуть.

Наприклад **.**Розв’язати рівняння=..

Знаходимо ОДЗ із нерівностей https://studfiles.net/html/2706/1102/html_mb8tDFCdaP.5ukY/img-yZN8rI.png

Рівняння коренів не має.

**2.Метод піднесення до степеня (Метод рівносильних перетворень)** полягає у зведенні ірраціонального рівняння до раціонального шляхом піднесення до того самого степеня обох частин рівняння. Якщо підносимо до непарного степеня, то отримуємо рівняння, рівносильне даному. Якщо підносимо до парного степеня, то отримаємо рівняння-наслідок, тому після його розв’язання необхідно зробити перевірку і відкинути сторонні корені. Або знайти область визначення всіх функцій, які входять до рівняння і після розв’язання відкинути ті корені, що їй не належать. Розв’язування рівнянь виду люванням радикала, який при цьому отримується, і повторним піднесенням обох частин рівняння до квадрата. В результаті таких перетворень рівняння даного виду зводиться до раціонального.

Приклад 1 Розв’язати рівняння

Розв’язання.

( )² =(2-х)²; х-2=4-4х+ -5х+6=0; х=2 або х=-3.

Перевірка:1) 2-3.

Відповідь: 2.

II спосіб

Розв’язання

Дане рівняння рівносильне системі:

***Відповідь: 2.***

Приклад 2.Розв’язати рівняння - =2.

Розв’язання.

ОДЗ: , x.

3х+1+х+1-2 =4,

=2х-1,

3+4х+1=4-4х+1,

-8х=0, =0; =8.

Перевірка:х=0—сторонній корінь 1-12,

Х=8: 5-3=2.

Відповідь: 8.

**3.Виділення повного квадрата.**

При розв’язанні ірраціональних рівнянь часто використовують метод виділення повного квадрата

Приклад 1. Розв’язати рівняння +

Розв’язання.

Виділимо під радикалами повний квадрат += , що рівносильно Iх-2I +I x+2I=Ix-3I. Дане рівняння з модулями розв’язуємо на інтервалах (-; -2) ; [-2;2); [2;3); [3; +) і знаходимо корені

Відповідь: -3; -1.

Приклад 2.Розв’язати рівняння +=2.

Розв’язання.

Позначимо через t й одержемо рівняння It-1I + It-3I =2.

Дане рівняння на інтервалі t коренів немає, якщо t ,будь-яке число і якщо t[3;), t=3. Розв’язками рівняння для змінної t є інтервал [1;3], а для змінної х інтервал [3;11].

Відповідь:х

**4.Рівняння з кубічними ірраціональностями, рівняння виду**

**=h(x).**

При розв’язанні рівнянь такого виду доцільно піднести обидві частини рівняння до куба за формулою:( )³ = ab3 ( ). Раціональне рівняння, яке виникає, може мати сторонні корені, тому для знайдення розв’язків обов’язково потрібно виконати перевірку.

Наприклад, розв’язати рівняння +=3. Після піднесення обох частин рівняння до куба отримаємо:8-х+х+1+3( +)=27.Використаємо умову, що +=3. Одержемо: =2; (8-х)(х+1)=8;-7х=0;=0; =7. Перевіркою встановлюємо, що обидва значення перетворюють задане рівняння в тотожність.

Відповідь:0; 7.

В одній з контрольних робіт (МАН) було завдання: знайдіть значення виразу

+.

Розв’язання.

Обчислення значення цього виразу можна знайти подавши підкореневі вирази як (2+)³ і (2- )³. Значення виразу дорівнює 4.

Розглянемо другий спосіб розв’язання.

Нехай значення цього виразу дорівнює х .Розв’яжемо отримане рівняння використавши попередній метод.

=20+14+20-14+3( +. Врахувавши, що + =х, маємо рівняння За теоремою Безу знайдемо перший корінь х=4.

Поділивши многочлен на (х-4) отримаємо тричлен +4х+10,

який дійсних коренів не має (D). Робимо висновок, що значення цього виразу дорівнює 4.

Відповідь:4.

Висновок.

При розв’язанні ірраціональних рівнянь слід пам’ятати, що:

1. у рівнянні корені парного степеня є арифметичними, а це значить, що значення кореня завжди невід’ємне, крім цього, підкореневий вираз теж невід’ємний;
2. корені непарного степеня визначені для будь-якого значення підкореневого виразу;
3. формальне використання властивостей кореня = або = може призвести до звуження області визначення, що недопустимо.

Наприклад, у рівності = замість ab0 (у лівій частині), отримаємо вужчу область a0 і b0 (у правій частині).

ШТУЧНІ МЕТОДИ.

**1.Метод заміни**

Заміна підкореневого виразу спрощує зведення ірраціонального рівняння до раціонального.

Наприклад. Розв’язати рівняння + =7.

Позначимо вираз  . Тоді 2 і вихідне рівняння набуде вигляду: =7. Розв’яжемо його:=7-;

(²=(7-)²; t+7=49-14+t; =3; t=9. Повернувшись до заміни, одержимо:2-3х-4=0; =-1; =4. Виконавши перевірку, встановлюємо, що обидва значення задовільняють початкове рівняння.

Відповідь:-1;4.

Розглянемо розв’язання рівнянь за допомогою введення двох допоміжних змінних. Наприклад, розв’язати рівняння

-= - .

Розв’язання.

Позначимо = a, =b. Підставляючи введені позначення в рівняння, дістанемо рівняння: a -= b -, звідси a - b +- =0, (a-b)(1+)=0.

Рівняння рівносильне сукупності рівнянь a = b і ab = -1 при х5, х3.

Повертаючись до підстановки, дістанемо сукупність рівнянь

- =0,

1+ =0. Звідси маємо: х=0.

Відповідь:0.

**2.Множення на спряжений вираз.**

Приклад 1. Розв’язати рівняння - =х-5. (1)

Розв’язання.

Обидві частини рівняння помножимо на спряжений вираз

(-)( + =(х-5)( +;

(6+);

5( =(х-5)(

5(х-5)=(2) З рівнянь (1) і (2) отримаємо

=2(х-5);

3. Виконавши перевірку встановлюємо, що 4 є стороній корінь.

Відповідь:5:.

**Приклад 2**. Розв’язати рівняння з кубічними ірраціональностями ++=7;

Помножимо на спряжений вираз (-) і отримаємо в лівій частині рівняння різницю кубів -=7(-);

Спростивши його отримаємо більш просте рівняння -=1;

Введемо нову змінну t=; х=2-.Маємо рівняння =t+1;+7=+3+3t+1; +t-2=0; =-2; =1; =10;=1.

Відповідь:10;1.

**3. Однорідні ірраціональні рівняння.**

Рівняння виду

Воно зводиться до квадратного рівняння заміною =t або =t.

Наприклад. Розв’язати рівняння +4-5=0.

Розв’язання.

Очевидно, що х=0 не є коренем цього рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на і позначимо =t отримаємо рівняння +4t-5=0; =1, =-5. Другий корінь є сторонім. З рівняння =1, приходимо до висновку, що х=1.

Відповідь:1.

Приклад. Розв’яжемо рівняння +=2х.

Розв’язання.

х=0 не є коренем цього рівняння. ОДЗ: хПоділимо обидві частини рівняння на х. Отримаємо +=2. Позначимо через t. Розв’яжемо квадратне рівняння відносно змінної t.

t+ -2=0; t=1. Звідси =1; -2х-15=0; =-3; =5. Перевіркою встановлюємо, що =-3 є стороній корінь.

Відповідь:1.

**4. Розкладання на множники**

Приклад 1. Розв’язати рівняння + =2х+2.

Розв’язання.

Знайдемо спочатку ОДЗ із системи нерівностей:

ОДЗ:х.

Винесемо загальний множник ( +-2) =0,

+-2=0, =-1.

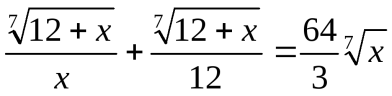
Піднесемо обидві частини рівняння +-2=0 до квадрата, отримаємо:+=2;

2х+6+х-1+2)=4х+4;

2=х-1; 7+18х-25=0; ; =1.

Другий корінь не задовільняє умову.

Відповідь:-1;1.

Приклад 2. Розв’язати рівняння .

Розв’язання.

Винесемо корінь за дужки, отримаємо (+)=; (=;

(=; (=; 12+х=128х; =-; =.

Відповідь: -; .

**5.Штучні методи.**

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння + =7.

Розв’язання.

Різниця підкореневих виразів дорівнює:(5-4х+8)-(5+3х+8)=-7х.

Подамо її вигляді (-(=-7х. Звідси

(-) (+)=-7х. За умовою + =7, тому

-=-х. Додавши ліві і праві частини рівнянь, дістанемо рівняння =7-х, яке рівносильне системі:

Розв’язавши яку, дістанемо =-.

Відповідь:1;-.

**3.6.**.**Застосування методу похідної пропорції до розв’язування рівнянь.**

Теорема: Якщо задана пропорція (bто справджуються

рівності: які називаються похідними пропорціями.

Приклад . Розв’яжіть рівняння =.

Розв’язання.

Складемо похідну пропорцію: =; =.

Запишемо утворене рівняння у вигляді: =. Ще раз складемо

похідну пропорцію. Маємо: =25, =5.

Розв’яжемо сукупність рівнянь:

=5,

-5.

У кожному з випадків ще раз складемо похідну пропорцію:

1. =, =, 5+4х+8=0 одержане рівняння дійсних коренів не має.

2. =, =, 5=-1,2; =3.

Перевіркою встановлюємо, що =-1,2 не задовільняє рівняння.

Відповідь:3.

Розв’язування рівнянь методом похідної пропорції грунтується на таких теоремах.

Теорема 1.Рівняння = є наслідком рівняння =,

якщо при значеннях х, які є коренями останього рівняння , обидві частини цього рівняння не дорівнюють одиниці.

Теорема 2. Рівняння = є наслідком рівняння = ,

якщо при значеннях х, які є коренями останього рівняння , обидві частини цього рівняння не дорівнюють -1

**3.7.Зведення ірраціональних рівнянь до системи рівнянь.**

Іноді при розв’язуванні ірраціональних рівнянь доцільно вводити не одну, а кілька змінних. Саме для рівнянь виду = c вводиться заміна Тоді дане рівняння набирає вигляду uАле для знаходження значень невідомих u і v недостатньо одного рівняння. Друге рівняння записуємо у вигляді

Наприклад. Розв’язати рівняння +

звідки 8-х= Одержимо систему рівнянь:

ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ.

**1.Використання монотонності функцій.**

Спочатку знаходимо область визначення функції і серед одержаних значень аргументу підбором знаходимо один з коренів рівняння. Потім доводимо, що рівняння не має інших коренів. Для цього використовуємо одну з теорем про корінь.

Теорема 1.Якщо в рівнянні f(x)=g(x) функція f(x) є монотонною на деякому проміжку, то дане рівняння може мати на цьому проміжку не більше одного кореня.

Теорема 2.Якщо в рівнянні f(x)=g(x) функція f(x) зростає (спадає) на деякому проміжку, а функція g(x) спадає (зростає) на цьому ж проміжку, то рівняння має на заданому проміжку не більше одного кореня.

Розглянемо рівняння +=12-2.Нехай = t, t0, тоді + =12 - 2t, t корінь t =4. Оскільки + -зростаюча функція, як сума двох зростаючих функцій, а 12-2t –спадна, то дане рівняння має не більше одного кореня. З того, що t=4, маємо: =4, х=2.

Відповідь:

**2.Використання обмеженості функцій. Оцінка лівої і правої частин рівнянь.**

У деяких рівняннях зручно знайти множини значень функцій, що є лівою і правою частинами рівняння. Розглянемо рівняння

+=-2

+ =-2(

+ =-2(+4,

1, тоді лівачастина рівняння не менша за 4, а права частина -2( Спільне значення лівої і правої частин рівняння- це число 4. Рівність досягається, якщо х=3.

Відповідь:3.

**3.Використання властивостей взаємно обернених функцій**

Розглянемо такі властивості взаємно обернених функцій :

Властивість 1.Якщо f(x) та g(x) взаємно обернені функції, то їх графіки симетричні відносно прямої y = х.

Властивість 2. Якщо графіки взаємно обернених функцій f(x) та g(x) перетинаються, то точки їх перетину лежать на прямій y = х.

Властивість 3. Якщо f(x) та g(x) взаємно обернені функції, то рівняння f(x)=g(x) рівносильне рівнянню f(x)=x або рівнянню g(x) = x.

Розв'язати рівняння:

Розв'язання.

Розглянемо дві функції: f(x)= та g(x)= Вони є взаємно оберненими.

За третьою властивістю рівняння = рівносильне рівнянню

= x. Яке, в свою чергу, рівносильне рівнянню -2x+1=0. За теоремою Безу

=1. Поділивши многочлен -2x+1 на (x-1) отримаємо тричлен +x-1.

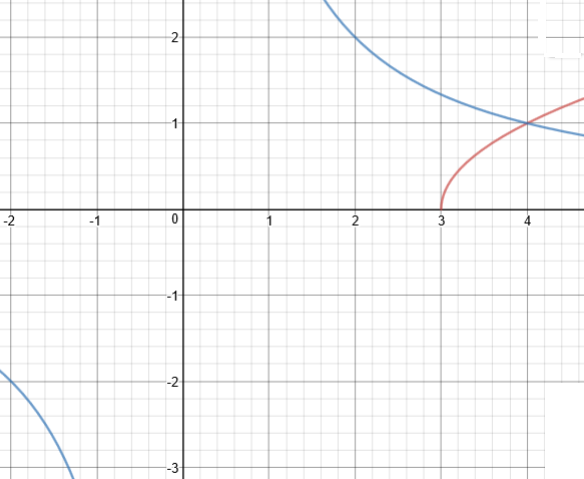
Коренями якого є =. Відповідь:-1; .

**4.Графічний метод**

Графічний методбазується на побудові графіків відповідних функцій, які стоять в обох частинах рівняння, та знаходженні їхніх точок перетину, що є відповідно розв’язками даного рівняння. Недоліком даного методу, є те, що для більшості рівнянь ми не зможемо знайти точного розв’язку.

**Приклад:** 

**Розв’язання.**

Будуємо графік функції y= і y=.

Відповідь:4.

**ВИСНОВКИ**

В сучасній теорії навчання математики одним із прийомів розвитку евристичного й творчого типу продуктивних дій учня є розв'язування рівнянь. Виходячи із сутності ірраціонального рівняння, їх розв'язання – це якісне узагальнення й систематизація навчального досвіду учня на більш високому продуктивному рівні діяльності. Тому технологія розв'язання ірраціональних рівнянь повинна бути гармонійно вбудована в кожну тему, чітко обумовлена, повинні бути розглянуті приклади, наведена система вправ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ :

1.Белешко Д. Т.Навчальна книга.-Богдан, 2012.-80с.

2.Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи: навч. посіб. / В.О. Гришина, О.Б. Папковська, Л.М. Васіліу; Одес. нац. політехн. ун-т. - О.: Наука і техніка, 2008. - 188 с.

3.Григорьев А. М. Иррациональные уравнения // Квант. – 1972. – №1. – С. 46-49.

4.Егоров А. Иррациональные уравнения // Математика. Первое сентября – 2006. – №5. – С. 9-13.

5.Ірраціональні рівняння, нерівності, системи / І.М. Конет, П.Б. Сиваківський; Кам'янець-Поділ. держ. ун-т. - Кам'янець-Поділ.: Абетка, 2006. - 47 с.

6.Ірраціональні рівняння. Розв'язування ірраціональних рівнянь: методические указания / А. І. Ярмоленко. - Суми : Коледж СНАУ, 2002. - 8 с.

7.Потапов М. Как решать уравнения без ОДЗ // Математика. Первое сентября – 2007. – №21. – С. 42-43.

8.Рациональное - иррациональные. Некоторые специальные способы решения иррациональных уравнений / Н.Я. Игнатенко // Гуманіт. науки. - 2005. - № 1. - С. 120-132.

9.Шарова Л. И. Уравнения и неравенства: пособие для подготовительных отделений. – К.: Вища школа, 1981. – 280 с.

10.Заслонкіна Л. С. Нестардатні алгебраїчні рівняння та їх системи.-Х.:Вид. група , 2016.-155, (5) с.