**Про відрізок, що з’єднує основи медіани і висоти**

Якщо в довільному трикутнику АВС провести висоту АН1 = і медіану , то отримаємо нібито непримітний відрізок *М1Н1* (мал.1). Цей відрізок має назву проекції медіани на сторону. Але виявляється, що при розв’язуванні задач роль відрізка *М1Н1* є досить суттєвою.

 Для визначеності розглядатимемо трикутник АВС зі сторонами .

Задача: У трикутнику АВС зі сторонами () з знайти довжину відрізка, що з’єднує основи висоти і медіани.

**Розв’язання.** Побудуємо медіану і висоту АН1.

. Оскільки медіана, то = =

 *Ма*л.1 З АН1В: ,

 , де (з теореми косинусів для АВС).

Тоді .

Отже, (1)

Якщо у АВС провести медіану і висоту з вершини В, то довжина відрізка



 (2)

Якщо у АВС провести медіану і висоту з вершини C, то довжина відрізка



 (3)

Розглянемо задачі, при розв’язанні яких формула є майже вирішальною.

**Задача 1**. У трикутнику АВС зі сторонами знайдіть відстань від центра описаного кола до висоти .

******

***Розв’язання.*** Нехай точка О – центр кола, описаного навколо АВС. Опустимо з точки О перпендикуляр на висоту Отже відстанню від центра описаного кола до висота є відрізок OF , який дорівнює відрізку .

Отже, OF = .

**Задача 2.** Доведіть справедливість рівності: .

***Доведення.*** Аналогічно

 і

 Тоді

 .

 **Задача 3.** У трикутнику АВС зі сторонами . Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

***Доведення.*** Згідно з умовою задачі , тобто ,

або ;

 ;

 .

Можливі два випадки: . Останнє неможливо, тому що с – найменша сторона. Отже, залишається єдине: і АВС – рівнобедрений.

**Задача 4.** Медіана трикутника складає зі стороною ВС кут . Доведіть, що .

*** Доведення.***

З прямокутного трикутника :

 .

**Задача 5.** Доведіть, що , де – кут між медіаною та стороною ВС.

***Доведення.*** З прямокутного трикутника :

 . де .

Тоді .

Аналогічно .

Звідси

 *Мал.4*

Враховуючи те, що (задача 4), отримаємо .

**Задача 6**. Знайдіть співвідношення між сторонами трикутника АВС, в якому (.

***Розв’язання.*** За властивістю бісектриси , або , звідки . .

Тоді .

 Згідно з умовою .

 Отже, .

Звідси .

**Задача 7.** .Нехай α – кут між висотою та медіаною, які проведені з вершини А, тобто α = . Аналогічно β= і γ=. Який з кутів α, β ,γ є найбільшим, якщо в трикутнику ABC знов-таки A>B>C ?

***Розв’язання***. З ∆ , або

 .

Аналогічно і .

Оскільки a >b >c, то очевидно, що буде найбільшим.

 Тангенс гострого кута є функцією зростаючою. Отже, кут і буде найбільшим.

**Задача 8.** Точка І – центр вписаного в трикутник АВС кола. Пряма М1І перетинає висоту АH1 в точці N. Доведіть, що відрізок АN дорівнює радіусу r вписаного кола.

*** Доведення.*** Нехай AN = x , тоді . Проведемо

 IK1 = r. З подібності трикутників M1K1I та M1H1N маємо:

 .

 *Мал.7* Отже,

або

 Звідси

Що і треба було довести.

**Задача 9**. О – центр описаного кола трикутника АВС зі сторонами СК – перпендикуляр до прямої АО. Знайдіть довжину відрізка КМ1 (М1 – середина ВС).

 ***Розв’язання.*** Відомо, що і АО складають рівні кути зі сторонами АВ і АС відповідно. Нехай ці кути дорівнюють . Нехай також М2 і М3 – відповідно середини АС і АВ.

Тоді - медіана, яку проведено до гіпотенузи АС в АКС, і А (зовнішній кут для АКМ2). – медіана, яку проведено до гіпотенузи АВ в . Тоді (зовнішній для ).

Оскільки АМ2М1М3 – паралелограм, то 1 = 2 . До того ж і - середні лінії в АВС. за двома сторонами та кутом між ними. Звідси .