Заняття 3

Тема**: Комплексні числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.**

Мета: *ознайомити студентів з поняттям комплексного числа, необхідністю його введення в математику, показати алгебраїчну форму комплексного числа, вивчити основні поняття та означення, дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, ознайомити з геометричною інтерпретацією комплексного числа.*

Тип заняття: лекція.

План.

1. Поняття комплексного числа. Необхідність розширення класу чисел. Визначення комплексного числа.
2. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі. Геометрична інтерпретація комплексного числа, суми та різниці комплексних чисел. Розв’язування квадратних рівнянь з від’ємним дискримінантом.

1.Постановка проблемного запитання.

Чи існує корінь квадратний з від’ємного числа?

Потреби алгебри вимагають такого розширення поняття числа, при якому здійснюється дія добування корення з від’ємного числа. З розширенням поняття числа ми вже неодноразово зустрічалися. Для того, щоб зробити ділення одного дійсного числа на інше, ввели дробові числа, для можливості віднімання більшого числа з меньшого ввели від'ємні числа, для того щоб мати можливістьзаписати результати вимірювання відрізка несумісного з одиницею вимірювання знадобилися іраціональні числа. Приєднання кожного наступного классу числа до попереднього розширює поняття числа і разом з тим розширює сферу використання данного поняття. Добування кореня парного степеня з від'ємного числа вимагає розширення множин дійсних чисел.

$$3x^{2}-3x+1=0$$

$$D=b^{2}-4ac=(-3)^{2}-4×1×1=9-12=-3$$

$$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}=\frac{3\pm \sqrt{-3}}{2×3}=\frac{3\pm \sqrt{-3}}{6}$$

$$\sqrt{-1}=i$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{(-1)×3}=\sqrt{-1}×\sqrt{3}=\sqrt{3}i$$

$$x\_{1,2}=\frac{3\pm \sqrt{3}i}{6}=\frac{1}{2}\pm \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$\sqrt{-1}=i$ називається уявною одиницею. Числа, що містять уявну одиницю називаються *уявними числами.* Приклад: 2і, -5і, $\frac{1}{3}і$.

Комплексні числа **виникли в математиці на початку XVI століття** у зв'язку з рішенням алгебраїчних рівнянь 3-го степеня, а пізніше, і рівнянь 2-го степеня. Деякі італійські математики того часу (Сципіон дель Ферро, Ніколо Тарталья, Джіроломо Кардано, Рафаель Бомбеллі) ввели в розгляд символ $\sqrt{-1}$ як формальне рішення рівняння х 2 +1 = 0. Згодом вирази виду (а + b) ∙ $\sqrt{-1}$ стали називати «уявними», а потім «комплексними» числами і записувати їх у вигляді (а + bi) (символ i для позначення $\sqrt{-1}$ ввів Леонард Ейлер у XVIII ст.). Цих чисел, чисел нової природи виявилося достатньо для вирішення будь-якого квадратного рівняння (включаючи випадок D <0), а також рівняння 3-го і 4-го степеня.

Математики XVI ст. і наступних поколінь аж до початку XIX сторіччя ставилися до комплексних числах з явним недовір'ям і упередженням. Вони вважали ці числа «уявними» (Декарт), «неіснуючими», «вигаданими», «виникли від надлишкового мудрування» (Кардано) ... Лейбніц називав ці числа «витонченим і чудовим притулком божественного духу», а $\sqrt{-1}$ вважав символом потойбічного світу (і навіть заповідав накреслити його на своїй могилі).

Проте використання апарату комплексних чисел (незважаючи на підозріле ставлення до них), дозволило вирішити багато важкі завдання. Тому з часом комплексні числа займали все більш важливе положення в математиці і її додатках. В першу чергу вони глибоко проникали в теорію алгебраїчних рівнянь, істотно спростивши їх вивчення.

Після того, як в XIX ст з'явилося наочне геометричне зображення комплексних чисел за допомогою точок площини і векторів на площині (Гаус в 1831 р, Вессель в 1799 р, Арган в 1806 р), стало можливим зводити до комплексних числах і рівнянням для них багато завдань природознавства, особливо гідро-і аеродинаміки, електротехніки, теорії пружності і міцності, а також геодезії і картографії. З цього часу існування «уявних», або комплексних чисел стало загальновизнаним фактом і вони отримали таку ж реальний зміст, як і числа дійсні. До теперішнього часу вивчення комплексних чисел розвинулося в найважливіший розділ сучасної математики – теорію функцій комплексної змінної.

Логічно строгу теорію комплексних чисел побудував у XIX ст (1835 р) ірландський математик Вільям Роумен Гамільтон.

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв’язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від’ємних чисел. Щоб ця дія стала можливою, ввели множину нових чисел.

Без комплексних чисел неможливо розв'язати безліч цікавих та непростих на перший погляд *задач з механіки, фізики, математики, термодинаміки*. **Вони доповнюють множину дійсних чисел, використовуючи при цьому власні правила обчислень сум, часток** і т.д.

*Означення***.****Комплексним числом** називають сукупність дійсного числа і уявного числа z = a+bi, де а – **дійсна частина** комплексного числа, bi – **уявна частина** комплексного числа, b – коефіцієнт при уявній частині, і – уявна частина, позначаються символами Re z і Im z відповідно (real - дійсний, imanginerum - уявний). Re z= а, Im z= bi

*Приклад*: $5+7i, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}i$

Комплексні числа a+bi, в яких $b\ne 0$ називають **уявними числами**, а числа виду 0+bi, $b\ne 0$ – **чисто уявними числами**.

**Множина комплексних чисел** позначається C $(z\in C)$.

2. Запис комплексного числа z у вигляді суми двох чисел – дійсного числа а і чисто уявного числа bi, тобто у вигляді a+bi, називається **алгебраїчною формою комплексного числа.**

Операції над комплексними числами, записаними в алгебріїчній формі, виконуються таким же чином, як і над звичайними многочленами, з заміною $i^{2}$ на ***-1****.*

*Означення.* Комплексні числа $z\_{1}=a+bi i z\_{2}=c+di$ називаються **рівними** тоді і тільки тоді , коли a=b i c=d.

*Означення 3.* **Сумою** **комплексних чисел** $z\_{1}=a+bi i z\_{2}=c+di$ називається комплексне число (a+c)+(b+d)i, тобто ***z1+z2 =(a+bі)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i***

*Наприклад:* знайти суму комплексних чисел z1=2-і ,z2 =-1+3і:

z1+z2= (2-і) +(-1+3і)= (2-1)+((-1)i+3i)=(2-1)+(-1+3)i=1+2i

Додавання комплексних чисел має***властивості****:*

*- комутативності z1+z2=z2+z1*

*- асоціативності z1+(z2+z3)=(z1+z2)+z3*

*- дистрибутивності z1(z2+z3)=z1z2+z1z3*

*Геометрична інтерпретація:*

Будь-яке комплексне число виду a+bi **геометрично** зображається точкою на координатній площині з координатами A(a;b) або як векторз початком в точці (0,0) і кінцем в точці А з координатами (a;b).

 A

 b

О a

Площина, точкам якої у відповідність поставлені комплексні числа , називається **комплексною площиною.** Вісь абсцис називається **дійсною віссю**, а вісь ординат – **уявною віссю** комплексної площини.

*Геометричне зображення суми комплексних чисел.*

 Нехай дані комплексні числа z1=a+bi i z2=c+di і відповідні їм вектори i  . На векторах  i  будується паралелограм ОАСB.

*Тоді +=.*

*C*

*B(c;d)*

*A(a;b)*

*О*

Таким чином, **сума комплексних чисел геометрично** зображається сумою відповідних векторів, яка знаходиться за правилом паралелограма.

*Означення.* **Різницеюдвох комплексних чисел**  та  називається комплексне число виду . **z1-z2=(a+bi)-(c-di)=(a-c)+(b-d)i**

*Наприклад(сам)* Знайти різницю комплексних чисел z1=4+5i i z2=(-2)+3i

*Означення.* Комплексне число 0+0і називається **нулем**.  *z є С: z+0=z і z\*0=0*

*Означення.* Числа виду -a-bi та a+bi називаються **протилежними** **комплексними числами.**

*Наприклад: 3+5і і -3-5і.*

*Означення.* Числа виду a+bi i a-bi, які відрізняються знаками перед уявними частинами називаються **спряженими** **комплексними числами**.

*Наприклад: -7 +2і і -7-2і.*

*Геометричне зображення різних комплексних чисел.*

Нехай дано число . Тоді число  геометрично зображається точкою, симетричною відносно початку координат до точки, що відповідає числу .

**

**

*` *

-(c+di)

(a+bi)-(c+di)

A(a+bi)

B(c+di)

Відмітимо, що взаємно спряжені комплексні числа * і * зображуються на площині точками або векторами, симетричними відносно дійсної осі.

a+bi

a-bi

*Означення.* ***Добутком* двох комплексних чисел**  та  називається комплексне число виду .

Піднесення числа до степеня. Для будь-яких *m* i *n* мають місце рівності:

**

**

**



*Означення.* **Часткоюдвох комплексних чисел**  та  називається комплексне число виду .

Розглянемо частку:

**

*Правило*. **Для того, що б позбутися уявного числа в знаменнику, чисельник і знаменник домножають на число, спряжене до знаменника.**

*Наприклад : *

 *Означення.* Число ,де z0 позначається і називається **оберненим** до числа *z.*

**

**

*, *

**

*Приклад:* Обчислити число, обернене до числа 

**

*Приклад:* обчислити z-3 , якщо z=1+i.

**

 3. *Означення.* **Модулем** **комплексного числа** z=a+bi називається довжина (модуль) відповідного йому вектора.

Модуль комплексного числа позначається |z|=r.

За теоремою Піфагора: |z|=.

*Приклад:* Знайти модуль комплексного числа: z=4-3i.

|z|===5

Розв'язування вправ

1 Виконати дії додавання, віднімання, множення і ділення з даними числами, знайти модуль числа z1, записати число, спряжене до числа z1

z1=-3+5і, z2=-8і

2 Розв’язати квадратне рівняння 4x2-4x+5=0

**Домашнє завдання**

( завдання виконувати згідно номеру списку в журналі)

1. Вивчити формули та означення.
2. (6 балів) Знайти **суму, різницю, добуток і частку** комплексних чисел, записаних в алгебраїчному вигляді, обчислити **модуль** даних чисел $ a і b$, знайти **спряжені** числа до даних чисел $a і b$:
3. $a=3-2i; b=-2+i;$
4. $a=-6+2i; b=8-3i;$
5. $a=12+5i; b=i;$
6. $a=-2i; b=-2i+9;$
7. $a=-5+14i; b=-7+2i;$
8. $a=8-2i; b=3+4i;$
9. $a=13-12i; b=9-i;$
10. $a=-3+2i; b=-2i+1;$
11. $a=15; b=-2+9i;$
12. $a=-3+7i; b=-4+6i;$
13. $a=-2i+11; b=15+i;$
14. $a=6i-5; b=-2i-9;$
15. $a=-2+8i; b=-17+4i;$
16. $a=7-18i; b=-14+3i;$
17. $a=13-15i; b=i;$
18. $a=19-4i; b=-2i-7;$
19. $a=2-8i; b=-7i+9;$
20. $a=9-i; b=i-7;$
21. $a=-4i+3; b=i+5;$
22. $a=23i; b=-12;$
23. $a=6i+8; b=-5i+4;$
24. $a=9+4i; b=-2i+3;$
25. $a=-3i; b=-7;$
26. $a=5-2i; b=-i-9;$
27. $a=-4+3i; b=-7-2i;$
28. $a=-7+i; b=-2-4i;$
29. $a=2+3i; b=7-5i;$

3 (2 бали) Побудувати на площині числа а і b, та спряжені до них числа.

4 (4 бали) Розв’язати квадратні рівняння

1. а) 9x2+12x+5=0, б) 4x2+25=0
2. а)8x2-20x+17=0 б) -4x2-25=0
3. а)4x2-16x+25=0, б) 3x2+15=0
4. а)9x2+18x+58=0 б) x2+25=0
5. а)5x2+14x+10=0; б) -7x2 -63=0
6. а)2x2-14x+25=0 б) 5x2+25=0
7. а)x2-4x+29=0 б) 7x2+35=0
8. а)х2-6х+13=0 б) 9x2+18=0
9. а)х2-4х+6=0 б) -2x2-17=0
10. а)  б) 2x2+41=0
11. а)  б) 6x2+24=0
12. а) б) -3x2-2=0
13. а)49x2+14x+10=0 б) 2x2+7=0
14. а)5x2+6x+2=0; б) -x2-25=0
15. а)  б) 17x2+34=0
16. а)  б) -8x2-28=0
17. а)  б) 7x2+5=0
18. а)  б) 13x2+5=0
19. а)  б) -9x2-125=0
20. а) 9x2+2x+15=0, б) x2+125=0
21. а) -3x2+2x-5=0, б) x2+27=0
22. а) 4x2+11x+9=0, б) -6x2-24=0
23. а) -5x2+12x-15=0, б) x2+225=0
24. а) 19x2+7x+5=0, б) 3x2+72=0
25. а) 3x2+8x+25=0, б) 5x2+325=0
26. а)  б) -9x2-28=0
27. а)  б) 12x2+64=0