

SERIE NUMERICHE

Data una succ. a_n , si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la somma degli infiniti
delle succ.

che senso ha sommare
"infiniti numeri"?

DEF₁: Data una succ. a_n , dato $K \in \mathbb{N}$,
la somma parziale K-esima
delle succ. a_n è S_K , data da:

$$S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \text{ etc...}$$

$$\text{(ovvero } S_K = \sum_{n=0}^K a_n \text{)}$$

→ sommatoria con
numeri finiti di
addendi

Def₂: Si definisce **SERIE NUMERICA** la
somma delle succ. a_n , ovvero il lim.
delle succ. S_K , per $K \rightarrow +\infty$

$$\text{Si scrive } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{K \rightarrow +\infty} S_K$$

→ Serie numerica, cioè

somme di un numero
infinito di addendi

In pratica: data a_n , si costruisce S_k e
poi si fa il lim.

• CARATTERE DI UNA SERIE:

Essendo un lim., una serie ha 4 possibili
comportamenti:

- 1) CONVERGE ad un certo $l \in \mathbb{R}$, se $S_k \rightarrow l$
- 2) DIVERGE a $+\infty$, se $S_k \rightarrow +\infty$
- 3) DIVERGE a $-\infty$, se $S_k \rightarrow -\infty$
- 4) È INDETERMINATA, se S_k non ha limite

SERIE
TELESCOPICHE

considero la
serie $n=2$

ES $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ per $n \geq 2$ $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

$$S_2 = \frac{1}{3} \quad S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \quad S_4 = \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)}_{= \frac{2}{n^2-1}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \right]$$

$$S_3 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right]$$

$$S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \left[1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} \right]$$

$$S_K = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right] \quad K \geq 2$$

$$\lim S_K = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{K}}_0 - \underbrace{\frac{1}{K+1}}_0 \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4} \quad \text{la serie converge.}$$

SERIE GEOMETRICHE

Una serie geometrica è una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

con $a \in \mathbb{R}$ un parametro

$$= (1 + a + a^2 + a^3 + \dots)$$

In questo caso si ha che

$$\begin{aligned} S_K &= \sum_{n=0}^K a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^K = \\ &= \frac{a^{K+1} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

1) $-1 < a < 1$: $a^{K+1} \rightarrow 0$ per $K \rightarrow +\infty$

$$S_K = \frac{a^{K+1} - 1}{a - 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad \text{CONVERGE}$$

2) $a > 1$: $a^{K+1} \rightarrow +\infty$

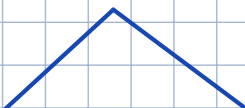
$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad \text{DIVERGE}$$

2b) $a = 1$: $\rightarrow$ DIVERGE

3) $a = -1$: indeterminata

3b) $a < -1$: a^{K+1} non ha limite

STRUMENTI per lo studio delle serie

- Teo. algebrici
 - condizione necessaria
 - serie "note"
 - criteri di convergenza
- 

serie a termini di segno costante

- RADICE
- RAPPORTO
- CONFRONTO

- CONFRONTO ASINTOTICO

→ caso standard
→ caso limite

serie a termini di segno qualunque

- LEIBNIZ
- ASSOLUTA CONVERGENZA

SERIE NOTE

1) Serie geometriche

2) Serie ARMONICHE GENERALIZZATE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \rightarrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \rightarrow \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

3) Origine dell' ARMONICA CLASSICA

(con $\alpha = 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \begin{cases} \rightarrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \rightarrow \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0$$

(oppure $a_n \leq 0$, che però si riconduce al prec. caso "raccoltendo il segno meno")

- RADICE
- RAPPORTO
- CONFRONTO
- CONFRONTO ASINTOTICO
 - caso standard
 - caso limite

SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

- ASSOLUTA CONVERGENZA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge,
allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

- LEIBNIZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

- (i) $a_n \geq 0$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n$
- (iii) $a_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.