いろいろ写像

$f: X \to Y$ 写像
$x \mapsto y$

$A \subset X$

$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{ f(x) \in Y \mid x \in X \}$

Aの像 (image)

$C \subset Y$

$f^{-1}(C) \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in C \}$

Cの逆像

性質 (1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(3) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(4) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

<u>Def</u> $f: X \to Y$

(1) fが単射

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in X \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

$\iff \forall x, y \in X \ [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$

(2) fが全射

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall y \in Y \ \exists x \in X, \ f(x) = y$

$\iff f(X) = Y$

(1)はf: 単射のとき＝となる。

Def $f: X \to Y$ が全単射.

$\Leftrightarrow$ f は全射 かつ f は単射

$\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ $x \in X$ がただ一つ存在して $f(x) = y$

$\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ $\exists! x \in X$, $y = f(x)$

このとき写像

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & Y & \longrightarrow & X \\ & y & \longmapsto & x \quad (f(x) = y) \end{array}$$

が定まる

合成写像

$X \xrightarrow{f} Y$　$Y \xrightarrow{g} Z$ のとき

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

を f と g の合成写像という

(1) $g \circ f$ が全射 $\Rightarrow$ g 全射

$g \circ f$ が単射 $\Rightarrow$ f 単射

(∵) (2)の方, $\forall x_1, x_2 \in X$ $f(x_1) = f(x_2)$ と仮定して

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$g \circ f$ 単射より, $x_1 = x_2$ よって f も単射

恒等写像

$$\begin{array}{rccl} 1_X: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

とする

Prop $f: X \to Y$ 全単射
$\Leftrightarrow \exists g: Y \to X$ s.t. $g \circ f = 1_X,\ f \circ g = 1_Y$

全単射が存在するとき、

$X \leftrightarrow Y$ と書いて同一視できる。

集合の濃度

def $X \leftrightarrow Y$ のとき

X と Y は同じ濃度をもつ.

Def X が可算集合
$\Leftrightarrow X \leftrightarrow \mathbb{N}$

Th 1.1 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への全射は存在しない。

つまり $\mathbb{R}$ は可算でない

対角線論法による。