

氏名

実施日

次の空欄に当てはまる数または式を記入しなさい. ただし, i は虚数単位, $\log$ は自然対数とする.

- (1) $\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ とする. $\alpha^{12} = \boxed{\text{ア}}$ である. また, $|z - \alpha| = 2|z|$ を満たす複素数 z の表す点の軌跡は, 中心が複素数 $\boxed{\text{イ}}$ を表す点である円であり, $|z|$ の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
- (2) 360 の正の約数の個数は $\boxed{\text{エ}}$, それらの約数の総和は $\boxed{\text{オ}}$ である. また, $\sqrt{n^2 + 60}$ が整数となる正の整数 n をすべて求めると $\boxed{\text{カ}}$ である.
- (3) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において, $f(\theta) = 2\cos^2 \theta + 2\sqrt{3}\sin \theta \cos \theta$ とおく. $f(\theta)$ の最大値は $\boxed{\text{キ}}$ であり, $f(\theta) = 2$ の解は $\theta = \boxed{\text{ク}}$ である. 方程式 $f(\theta) = a$ が異なる 2 個の解をもつような実数 a の範囲は $\boxed{\text{ケ}}$ である.
- (4) 曲線 $y = \frac{\log x}{x} (x > 0)$ 上の $x = e^2$ の点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{コ}}$ であり, $\int_1^{e^2} \frac{\log x}{x} dx = \boxed{\text{サ}}$ である. また, 方程式 $\frac{\log x}{x} = b$ が異なる 2 個の正の実数解をもつような実数 b の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である.

記述欄 小問番号を付け, 途中式や考え方を書くこと.

添削欄

文字は大きめに, はっきり書いてください.

氏名

実施日

点 P は 3 地点 A, B, C のいずれかにあり, 1 回の操作で次のように位置を変える.

- A にあるとき, 確率 $\frac{1}{2}$ で A にとどまり, 確率 $\frac{1}{2}$ で B に移る.
- B にあるとき, 確率 $\frac{1}{4}$ で A に, 確率 $\frac{1}{4}$ で C に移り, 確率 $\frac{1}{2}$ で B にとどまる.
- C にあるとき, 確率 $\frac{1}{2}$ で B に移り, 確率 $\frac{1}{2}$ で C にとどまる.

点 P は初め A にある. n 回の操作後に A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする. ただし, $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$ とする.

- (1) a_2, b_2, c_2 を求めなさい.
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n を用いて表しなさい.
- (3) $n \geq 1$ のときの a_n, b_n, c_n を求めなさい.
- (4) $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求め, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めなさい.

記述欄 小問番号を付け, 途中式や考え方を書くこと.

添削欄

文字は大きめに, はっきり書いてください.

氏名

実施日

$f(x) = xe^{-x} (x \geq 0)$ とし, そのグラフを C とする. ただし, $k = 1, 2$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ を用いてよい.

- (1) $f(x)$ の増減とグラフ C の凹凸を調べ, 概形をかきなさい.
- (2) $t > 0$ とする. C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めなさい.
- (3) 実数 a に対して, (2) の接線が点 $(0, a)$ を通るような $t > 0$ の個数を求めなさい.
- (4) C , 直線 $y = \frac{1}{e}$ および y 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい.

記述欄 小問番号を付け, 途中式や考え方を書くこと.

添削欄

文字は大きめに, はっきり書いてください.