2027 年度 一般選抜 対策

東京医科大予想問題演習 ’27

志望校別 予想問題演習

見本版

解答・解説／配点・採点基準

解き終わってから読み, 自分の答案と見比べてください.
解答に続く補足では, 考え方や詳しい計算を確認できます.

医歯薬・難関大受験　数学講師　富澤陽介

大学が作成・公認した教材ではありません.

無断転載・複製・配布・転売禁止（本人の学習用印刷可）

採点の共通事項

本教材独自の添削評価用の配点・採点基準である. 東京医科大学が公表した配点・採点基準ではない. マーク式の問題も, 提出用では途中式や考え方を含めて評価する.

配点と判定

第 1 問 25 点, 第 2 問 25 点, 第 3 問 25 点, 第 4 問 25 点, 合計 100 点.

○：完答.　△：ケアレスミスのみ.

×：解答できなかったもの, または論理的・数学的な誤りがあるもの（必要な導出の欠落を含む）.

判定は小問ごとに付ける. 大問では得点を合計する. ×でも, 正しくできている過程には部分点を与える.

得点の付け方

小問ごとの項目について, 答案で確認できる内容に点を与える. 正しい別解も同じ内容が示されていれば同じ点を与える. 答えだけが合っていても, 条件や根拠の項目を自動的に満点にはしない.

単純な計算ミス・答え欄への転記ミスは, 独立した原因 1 件につき 1 点減点とする. 式の整理が未完了の場合も同様に扱う. 同じミスによって後続の値が変わった場合は, その後の手順が正しければ評価し, 同一原因を重ねて減点しない. ただし, 誤りによって必要な計算や判断を省けた場合は, 未確認の項目に点を与えない.

条件の誤用, 必要な場合分けの欠落, 不十分な論証などは該当する項目の点を与えない. 一律 1 点の減点に置き換えない. 小問の得点は 0 点を下限, 配点を上限とする. 無解答は×・ 0 点とする.

読めない文字は推測で誤答にせず, 確認してから得点を確定する. 解答中の数値とマーク欄が一致しているかも確認する.

第 1 問

次の各問いの空欄を埋めよ. ただし, i は虚数単位を表す.

(1)　5 進法で表された循環小数 $0.232323\cdots_{(5)}$ を十進法の既約分数で表すと, $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{{}_5\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である.

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である.

(4)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とすると, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{1-z^k}=\boxed{コ}$ である.

解答

(1)　求める数を u とおく. 小数点を 2 桁ずらすと,

$$5^2u=13+u,\qquad u=\frac{13}{24}.$$

$$\boxed{\frac{13}{24}}$$

(2)　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_k}{k+1}=\dfrac{1}{6}{}_6\mathrm{C}_{k+1}$ より,

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{{}_5\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{6}\left\{\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k-1\right\}=\frac{2^6-1}{6}=\frac{21}{2}.$$

$$\boxed{\frac{21}{2}}$$

(3)　$x\neq 0$ で x が 0 に十分近いとき, 分子を有理化して,

$$\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=\frac{1+2x-(1+x)^2}{x^2\{\sqrt{1+2x}+1+x\}}=-\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1+x}.$$

したがって, 求める極限値は $-\dfrac{1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$ である.

$$\boxed{-\frac{1}{2}}$$

(4)　$z^5=1$ であり, z, z^2, z^3, z^4 はいずれも 1 ではない. $z^4=\dfrac{1}{z}$ より,

$$\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z^4}=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{z-1}=1.$$

同様に $z^3=\dfrac{1}{z^2}$ より, 残りの 2 項の和も 1 . よって, 求める値は 2 である.

$$\boxed{2}$$

補足

(1)　同じ数字の並びが繰り返されるので, 小数点を 2 桁ずらした数との差をとる. 5 進法では 2 桁ずらす操作が 5^2 倍に当たる.

(2)　二項係数を階乗で書くと,

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{5!}{(k+1)!(5-k)!}=\frac{1}{6}{}_6\mathrm{C}_{k+1}.$$

添字 $k+1$ は 1 から 6 まで動くため, 二項定理で加えた $k=0$ の項を一つ引く.

(4)　z と z^4 , z^2 と z^3 は互いに逆数である. 各項を実部と虚部に分ける前に, この組合せで分母をそろえると計算が短くなる.

配点・採点基準

(1)　配点 6 点

$$\boxed{\frac{13}{24}}$$

3 点　小数点を 2 桁ずらした式.
3 点　既約分数.
確認する点.　小数点を 2 桁ずらした式を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(2)　配点 6 点

$$\boxed{\frac{21}{2}}$$

3 点　二項係数の変形.
3 点　和の値.
確認する点.　二項係数の変形を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(3)　配点 6 点

$$\boxed{-\frac{1}{2}}$$

4 点　有理化と約分.
2 点　極限値.
確認する点.　有理化と約分を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(4)　配点 7 点

$\boxed{2}$

3 点　逆数になる組を見つける.
4 点　各組の和と結論.
確認する点.　逆数になる組を見つけるを示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

第 2 問

座標平面上の楕円 $E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を考える. $t>2$ とし, 点 $\mathrm{T}(0,t)$ から E に引いた 2 本の接線の接点を P , Q とする. ただし, P の x 座標は正とする.

(1)　$\mathrm{P}(p,q)$ とすると, P における接線の方程式は $\dfrac{p}{\boxed{ア}}x+\dfrac{q}{\boxed{イ}}y=1$ である.

(2)　$t=4$ のとき, $\mathrm{P}\left(\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}},\boxed{カ}\right)$ である.

(3)　三角形 TPQ の面積は $\dfrac{\boxed{キ}(t^2-\boxed{ク})^{\frac{3}{2}}}{t\boxed{ケ}}$ である.

(4)　三角形 TPQ の重心の y 座標の最小値は $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ であり, $t=\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}$ のときにその値をとる.

解答

(1)　$q=0$ なら $p=3$ で, 接線は $x=3$ となり T を通らない. よって $q\neq 0$ である. 楕円の式を微分すると,

$$\frac{2x}{9}+\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}=0,\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\mathrm{P}}=-\frac{4p}{9q}.$$

したがって接線は $y-q=-\dfrac{4p}{9q}(x-p)$. $\dfrac{p^2}{9}+\dfrac{q^2}{4}=1$ を用いて整理すると,

$$\frac{p}{9}x+\frac{q}{4}y=1.$$

$$\boxed{\frac{p}{9}x+\frac{q}{4}y=1}$$

(2)　接線が $\mathrm{T}(0,4)$ を通るから $\dfrac{q}{4}\cdot 4=1$, よって $q=1$. $p>0$ より,

$$\frac{p^2}{9}+\frac{1}{4}=1, \qquad p=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

よって $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},1\right)$ である.

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},1\right)}$$

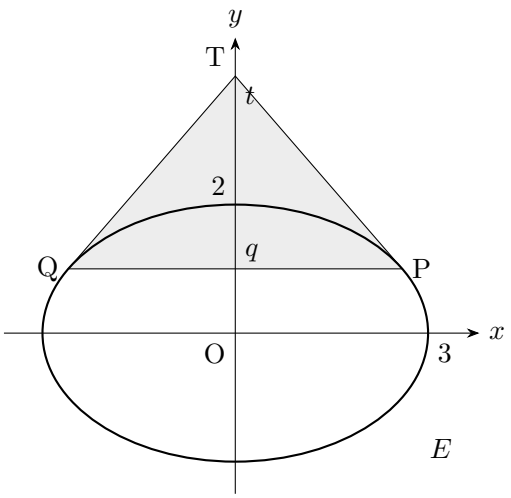
(3)　一般の $t>2$ について $q=\dfrac{4}{t}$. 楕円の式と $p>0$ より,

$$p=3\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}=\frac{3\sqrt{t^2-4}}{t}.$$

対称性から $\mathrm{Q}(-p,q)$ である. $\mathrm{PQ}=2p$, 高さは $t-q$ だから, 面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{t^2-4}}{t}\cdot\left(t-\frac{4}{t}\right)=\frac{3(t^2-4)^{\frac{3}{2}}}{t^2}.$$

$$\boxed{S=\frac{3(t^2-4)^{\frac{3}{2}}}{t^2}}$$



(4)　重心の y 座標を b とすると,

$$b=\frac{1}{3}\left(t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t}\right)=\frac{1}{3}\left(t+\frac{8}{t}\right).$$

$t>0$ より, 相加平均・相乗平均の関係を用いて,

$$t+\frac{8}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{8}{t}}=4\sqrt{2}.$$

等号は $t=\dfrac{8}{t}$, すなわち $t=2\sqrt{2}$ のときに成り立つ. この値は $t>2$ を満たすので, 最小値は $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ である.

$$\boxed{\text{最小値 } \frac{4\sqrt{2}}{3}\quad (t=2\sqrt{2})}$$

補足

(1)　接点の座標は楕円上の条件を満たす. 接線の式を整理した途中に現れる $\dfrac{p^2}{9}+\dfrac{q^2}{4}$ を 1 に置き換えることが要点である.

(3)　接線に外部の点の座標を代入すると, 二つの接点の y 座標はともに $\dfrac{4}{t}$ と分かる. したがって底辺 PQ は x 軸に平行で, 高さは $t-\dfrac{4}{t}$ である.

(4)　等号を満たす $t=2\sqrt{2}$ が, 指定された範囲 $t>2$ に入ることまで確かめて初めて最小値といえる.

配点・採点基準

(1)　配点 5 点

$$\boxed{\frac{p}{9}x+\frac{q}{4}y=1}$$

3 点　接線の傾き.
2 点　楕円の条件を用いた整理.
確認する点.　接線の傾きを示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(2)　配点 5 点

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},1\right)}$$

2 点　接線が指定点を通る条件.
3 点　接点の座標.
確認する点.　接線が指定点を通る条件を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(3)　配点 7 点

$$\boxed{S=\frac{3(t^2-4)^{\frac{3}{2}}}{t^2}}$$

3 点　一般の接点.
4 点　底辺と高さから面積.
確認する点.　一般の接点を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(4)　配点 8 点

$$\boxed{\text{最小値 } \frac{4\sqrt{2}}{3}\quad (t=2\sqrt{2})}$$

3 点　重心の座標.
3 点　最小値.
2 点　等号をとる t と範囲の確認.
確認する点.　重心の座標・最小値を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

第 3 問

a を正の実数とし, 方程式

$$x^4-ax^3+7x^2-ax+1=0$$

を考える.

(1)　$x\neq 0$ として $u=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと, この方程式は $u^2-au+\boxed{\text{ア}}=0$ と書き換えられる.

(2)　もとの方程式が相異なる 4 個の正の実数解をもつための a の条件は,

$$\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}<a<\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である.

(3)　$a=\dfrac{9}{2}$ のとき, もとの方程式の相異なる実数解を小さい順に並べると $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ である.

(4)　$a=\dfrac{9}{2}$ のときの 4 個の解を, 重複も含めて $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とし, $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n$ とおく. このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{3^n}=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である.

解答

(1)　$x=0$ は解ではない. 両辺を x^2 で割り,

$$x^2+\frac{1}{x^2}-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+7=0.$$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$ より $u^2-au+5=0$ となる.

$$\boxed{u^2-au+5=0}$$

(2)　$x>0$ のとき $u=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2$. 逆に, $u>2$ なら $x^2-ux+1=0$ は相異なる 2 個の正の解をもち, $u=2$ なら $x=1$ だけを与える. したがって必要十分条件は, $u^2-au+5=0$ が相異なる 2 個の解をもち, 小さい方の解も 2 より大きいことである.

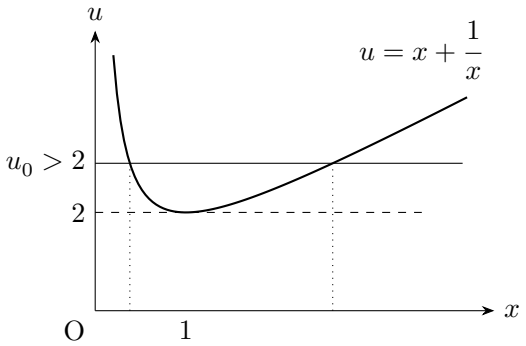
$$a^2-20>0,\qquad \frac{a-\sqrt{a^2-20}}{2}>2.$$

$a>0$ を用いると, 第 1 の条件は $a>2\sqrt{5}$. このとき $a-4>0$ なので, 第 2 の条件は

$$\sqrt{a^2-20}<a-4 \iff a^2-20<(a-4)^2 \iff a<\frac{9}{2}.$$

よって $2\sqrt{5}<a<\dfrac{9}{2}$ である.

$$\boxed{2\sqrt{5}<a<\frac{9}{2}}$$



(3)　$a=\dfrac{9}{2}$ を代入すると,

$$u^2-\frac{9}{2}u+5=(u-2)\left(u-\frac{5}{2}\right)=0.$$

$u=2$ から $x=1$. また, $u=\dfrac{5}{2}$ から $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)=0$. したがって相異なる解は $\dfrac{1}{2}, 1, 2$ である. 実際, もとの多項式は $(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$ と因数分解できる.

$$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ 2}$$

(4)　1 は重解なので, $S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2+2^n$. 各等比級数は収束し,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{3^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\&=\frac{\dfrac{1}{6}}{1-\dfrac{1}{6}}+2\frac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}+\frac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{16}{5}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{16}{5}}$$

補足

(2)　置き換えた方程式の解 u を数えるだけでは終わらない. $u>2$ なら対応する正の x は二つ, $u=2$ なら一つである. 端点を含めると, 求める「相異なる 4 個」という条件が崩れる.

(3)　$u=2$ に対応する式は $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ である. 相異なる解の一覧では 1 を一度だけ書くが, 次の小問では重複も含めて二度数える.

(4)　S_n の定数項は $1^n+1^n=2$ である. 無限和の三つの公比は $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ で, いずれも絶対値が 1 より小さい.

配点・採点基準

(1)　配点 4 点

$$\boxed{u^2-au+5=0}$$

2 点　x が 0 でないことと変形.
2 点　u の方程式.
確認する点.　x が 0 でないことと変形を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(2)　配点 10 点

$$\boxed{2\sqrt{5} < a < \frac{9}{2}}$$

4 点　u と正の解の個数の対応.
3 点　相異なる u の条件.
3 点　小さい u の範囲と a の条件.
確認する点.　u と正の解の個数の対応・相異なる u の条件を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(3)　配点 5 点

$$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ 2}$$

2 点　u の二つの値.
3 点　方程式の解と重複.
確認する点.　u の二つの値を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(4)　配点 6 点

$$\boxed{\frac{16}{5}}$$

3 点　S_n の表示.
3 点　等比級数の和.
確認する点.　S_n の表示を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

第 4 問

媒介変数 t を用いて

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線を C とする. x は t とともに単調に増加するので, C を $y = f(x)\,(0 \leqq x \leqq \pi)$ と表す.

(1)　$t = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式は, $y = \boxed{ア}x + \boxed{イ} - \dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ である.

(2)　曲線 C の長さは $\boxed{エ}$ である.

(3)　曲線 C, x 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ であり, この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi^2$ である.

(4)　$0 < x < \pi$ のとき, $f(x) > \dfrac{2x}{\pi}$ であることを証明せよ.

解答

(1)　$0 < t < \pi$ で $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t > 0$ だから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$t = \dfrac{\pi}{2}$ では点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1\right)$, 傾きは 1 . したがって接線は

$$y - 1 = 1\left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right\}, \qquad y = x + 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{y = x + 2 - \frac{\pi}{2}}$$

(2)　$0 \leqq t \leqq \pi$ では $\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$ なので,

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt$$
$$= \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4.$$

$$\boxed{L = 4}$$

(3)　$x = t - \sin t$ とおくと $dx = (1 - \cos t)\,dt$ であり, 積分範囲は $0 \leqq t \leqq \pi$ となる.

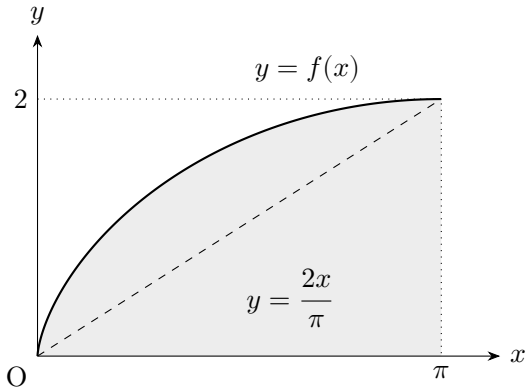
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^2\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

また, 体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} f(x)^2\,dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3\,dt \\ &= \pi \left(\pi + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

ここで $\int_0^{\pi} \cos t\,dt = 0$, $\int_0^{\pi} \cos^3 t\,dt = 0$ を用いた. 後者は t を $\pi - t$ に置き換えると積分の値が符号を変えることから分かる.

$$\boxed{S = \frac{3\pi}{2}, \quad V = \frac{5\pi^2}{2}}$$



(4)　$0 < t < \pi$ のとき,

$$f'(x) = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

さらに x で微分して,

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\right) \frac{1}{1 - \cos t} = -\frac{1}{4\sin^4\dfrac{t}{2}} < 0.$$

よって $y = f(x)$ は $0 < x < \pi$ で上に凸である. $f(0) = 0$, $f(\pi) = 2$ だから, 区間の内部ではグラフは両端を結ぶ直線 $y = \dfrac{2x}{\pi}$ より上にある. したがって $f(x) > \dfrac{2x}{\pi}$ である.

$$\boxed{f(x) > \frac{2x}{\pi} \quad (0 < x < \pi)}$$

補足

(2)　根号内は $2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \dfrac{t}{2}$ となる. 平方根を外す際は符号の確認が必要であり, この区間では $\sin \dfrac{t}{2} \geqq 0$ を使う.

(3)　置換するとき, 面積では y に, 体積では y^2 に $dx = (1 - \cos t)\, dt$ を掛ける. 体積の被積分関数が $(1 - \cos t)^3$ になる点を確認する.

(4)　$f'(x)$ を t で微分しただけでは $f''(x)$ にならない. その結果に $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{1 - \cos t}$ を掛ける. また, 凹凸だけでなく両端の座標を使って, 比較する直線を定める.

配点・採点基準

(1)　配点 5 点

$$\boxed{y = x + 2 - \frac{\pi}{2}}$$

3 点　媒介変数による微分.
2 点　点と傾きを代入した接線.
確認する点.　媒介変数による微分を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(2)　配点 5 点

$$\boxed{L = 4}$$

3 点　弧長の積分式と符号.
2 点　長さ.
確認する点.　弧長の積分式と符号を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(3)　配点 7 点

$$\boxed{S = \frac{3\pi}{2}, \quad V = \frac{5\pi^2}{2}}$$

3 点　面積の置換積分.
4 点　回転体の積分式と体積.
確認する点.　面積の置換積分を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.

(4)　配点 8 点

$$\boxed{f(x) > \frac{2x}{\pi} \quad (0 < x < \pi)}$$

4 点　第 2 次導関数.
2 点　端点と凹凸.
2 点　直線との比較.
確認する点.　第 2 次導関数・端点と凹凸を示していること. 答えだけでなく, 結論に至る根拠を評価する.