見本版　数学　60分

一般選抜対策

氏名：　　実施日：

第1問

次の各問いの空欄を埋めよ. ただし, i は虚数単位を表す.

(1)　5進法で表された循環小数 $0.232323\cdots_{(5)}$ を十進法の既約分数で表すと, $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{{}_5\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である.

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である.

(4)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とすると, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{1-z^k}=\boxed{コ}$ である.

© 富澤陽介　無断転載・再配布・転売を禁じます.

第 2 問

座標平面上の楕円 $E : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ を考える. $t > 2$ とし, 点 $\mathrm{T}(0, t)$ から E に引いた 2 本の接線の接点を P , Q とする. ただし, P の x 座標は正とする.

(1)　$\mathrm{P}(p, q)$ とすると, P における接線の方程式は $\dfrac{p}{\boxed{ア}}x + \dfrac{q}{\boxed{イ}}y = 1$ である.

(2)　$t = 4$ のとき, $\mathrm{P}\left(\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}, \boxed{カ}\right)$ である.

(3)　三角形 TPQ の面積は $\dfrac{\boxed{キ}(t^2 - \boxed{ク})^{\frac{3}{2}}}{t^{\boxed{ケ}}}$ である.

(4)　三角形 TPQ の重心の y 座標の最小値は $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ であり, $t = \boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}$ のときにその値をとる.

© 富澤陽介　無断転載・再配布・転売を禁じます.

第 3 問

a を正の実数とし, 方程式

$$x^4 - ax^3 + 7x^2 - ax + 1 = 0$$

を考える.

(1)　$x \neq 0$ として $u = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと, この方程式は $u^2 - au + \boxed{\text{ア}} = 0$ と書き換えられる.

(2)　もとの方程式が相異なる 4 個の正の実数解をもつための a の条件は,

$$\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} < a < \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である.

(3)　$a = \dfrac{9}{2}$ のとき, もとの方程式の相異なる実数解を小さい順に並べると $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}$ である.

(4)　$a = \dfrac{9}{2}$ のときの 4 個の解を, 重複も含めて $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とし, $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n$ とおく. このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{3^n} = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である.

© 富澤陽介　無断転載・再配布・転売を禁じます.

第 4 問

媒介変数 t を用いて

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線を C とする. x は t とともに単調に増加するので, C を $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と表す.

(1)　$t = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式は, $y = \boxed{ア}x + \boxed{イ} - \dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ である.

(2)　曲線 C の長さは $\boxed{エ}$ である.

(3)　曲線 C, x 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ であり, この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi^2$ である.

(4)　$0 < x < \pi$ のとき, $f(x) > \dfrac{2x}{\pi}$ であることを証明せよ.

© 富澤陽介　無断転載・再配布・転売を禁じます.