目　次

第１章　複素数平面（数Ｃ）（８題）…… 2
岡山大学，鹿児島大学，群馬大学，埼玉大学，佐賀大学，島根医科大学，千葉大学，
奈良女子大学，広島大学，福井大学，琉球大学

第２章　式と曲線（数Ｃ）（９題）…… 6
愛知教育大学，宇都宮大学，鹿児島大学，九州歯科大学，佐賀大学，筑波大学，
徳島大学，名古屋市立大学，名古屋工業大学，山梨大学

第３章　関数と極限（数Ⅲ）（８題）…… 12
愛知教育大学，岩手大学，岡山大学，北見工業大学，岐阜薬科大学，首都大学東京，
広島市立大学，福島大学，山梨大学，和歌山県立医科大学

第４章　微分法（数Ⅲ）（14題）…… 16
岩手大学，大分大学，お茶の水女子大学，金沢大学，北九州市立大学，九州工業大学，
高知工科大学，埼玉大学，佐賀大学，信州大学，東京学芸大学，富山県立大学，
長崎大学，奈良教育大学，弘前大学，前橋工科大学，宮崎大学

第５章　積分法（数Ⅲ）（17題）…… 24
岡山県立大学，鹿児島大学，北九州市立大学，九州工業大学，熊本大学，埼玉大学，
筑波大学，鳥取大学，富山大学，豊橋技術科学大学，長崎大学，奈良教育大学，
兵庫県立大学，弘前大学，広島市立大学，福岡教育大学，宮城教育大学，宮崎大学，
山形大学，山梨大学，横浜国立大学，琉球大学

第６章　微分方程式（数Ⅲ）（４題）…… 34
鹿児島大学，高知女子大学，埼玉大学，信州大学，三重大学，琉球大学

（各章の収録大学名は五十音順）

12

楕円 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な2接線を l_1，l_1' とし，l_1，l_1' に直交する C の2接線を l_2，l_2' とする．

(1) l_1，l_1' の方程式を m を用いて表せ．

(2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ．ただし，平行な2直線 l，l' の距離とは，l 上の1点と直線 l' の距離である．

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ．

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ．さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ．　(筑波大)

思考のひもとき

1. 直線 $y=mx$ と平行な直線の傾きは，$\boxed{m}$ である．

2. 直線 $y=mx+n$ が，2次曲線 $ax^2+by^2=c$ に接する

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{ax^2+b(mx+n)^2=c}$ が重解をもつ

解答

(1) $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ は

$$9x^2+16y^2=144 \quad \cdots\cdots①$$

と表せる．

l_1，l_1' は，$y=mx$ と平行であるから

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots②$$

と表せる．②を①に代入し，y を消去すると

$$9x^2+16(mx+n)^2=144$$

$$\therefore\quad (16m^2+9)x^2+32mnx+16(n^2-9)=0 \quad \cdots\cdots③$$

③の判別式を D とおくと，②が C に接するための条件は

$$\frac{D}{4}=16^2m^2n^2-(16m^2+9)\cdot 16\cdot(n^2-9)=0$$

$$\therefore\quad 16m^2-n^2+9=0 \qquad \therefore\quad n=\pm\sqrt{16m^2+9}$$

よって，l_1，l_1' の方程式は　$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2) d_1 は，点 $\left(0,\ -\sqrt{16m^2+9}\right)$ と直線 $y=mx+\sqrt{16m^2+9}$ との距離であるから

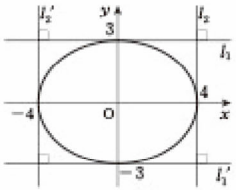
$$d_1=\frac{\left|\sqrt{16m^2+9}+\sqrt{16m^2+9}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\cdot\sqrt{\frac{16m^2+9}{m^2+1}} \quad \cdots\cdots④$$

l_2，l_2' は，l_1，l_1' に直交するから，$m\neq 0$ のとき　(傾き)$=-\dfrac{1}{m}$

d_2 は，④の m を $-\dfrac{1}{m}$ におき換えた値であり

$$d_2=2\cdot\sqrt{\frac{\frac{16}{m^2}+9}{\frac{1}{m^2}+1}}=2\cdot\sqrt{\frac{16+9m^2}{1+m^2}} \quad \cdots\cdots⑤$$

$m=0$ のとき，右図のように，l_1，l_1' は $y=\pm 3$，l_2，l_2' は $x=\pm 4$ となるから $d_2=8$ となり，⑤で $m=0$ のときに相当する．



$m=0$ のとき

ゆえに，d_2 は⑤で得られる．

(3) ④，⑤より

$$d_1^2+d_2^2=4\cdot\frac{(16m^2+9)+(9m^2+16)}{m^2+1}=4\cdot\frac{25(m^2+1)}{m^2+1}=100$$

となり，m の値によらず一定である．　□

(4) (3)の結果より

$$d_2=\sqrt{100-d_1^2}$$

であるから

$$S=d_1d_2=d_1\cdot\sqrt{100-d_1^2}=\sqrt{d_1^2(100-d_1^2)}$$

$$=\sqrt{-(d_1^2-50)^2+2500}\leqq 50$$

等号は，$d_1^2=50$　つまり，$4\cdot\dfrac{16m^2+9}{m^2+1}=50$ より

$$m^2=1 \qquad \therefore\quad m=\pm 1$$

のときにのみ成立する．

ゆえに　(S の最大値)$=50$　($m=\pm 1$ のとき)

解説

1° l_1，l_1' は傾きが m だから，y 切片を n とおくと，②のようにおくことができる．これを楕円の式①に代入して，y を消去してできる x についての2次方程式③が重解をもつことから，n が求まる(m を用いて表せる)．