

Além da simetria: Uma Proposta Matemática para Superar os Limites da Hipótese dos Mercados Eficientes e o Teorema Fundamental da Arbitragem

Por Natã Fernandes

Resumo

O objetivo deste estudo visa realizar uma análise crítica e matemática sobre a simetria inerente dos mercados financeiros e buscar uma solução, ou próximo disso, para operações de mercado onde há lucro garantido e risco nulo ou desprezível, o que tem sido o alvo de muitos analistas e matemáticos ao longo dos anos.

Introdução

Primeiro é preciso entender um pouco sobre a mais famosa e mais aceita teoria de mercados quando trata-se deste tipo de assunto, a Hipótese dos mercados eficientes. Ela tem sido base na para a estrutura dos mercados modernos, algoritmos de análises de preços etc. A hipótese dos mercados eficientes ou HME, proposta por Eugene Fama em 1960, é uma hipótese empírica e econômica onde afirma-se que os preços dos ativos refletem toda a informação disponível no mercado. Ela por sua vez se divide em três níveis principais que formam o pilar do trabalho de Eugene que são os seguintes:

- Os investidores são assumidos como racionais, e portanto, avaliam e precificam ativos de forma racional;
- Existem alguns investidores que não são racionais, portanto, sua participação no mercado é considerada aleatória, e consequentemente se anulam, não produzindo efeito sobre os preços praticados no mercado;
- Como os investidores são similares entre si, a presença de arbitradores racionais, presentes no mesmo mercado, elimina seu efeito sobre os preços.

Esses são os três pilares que compõe a hipótese dos mercados eficientes que tem sido usada como passe principal para a precificação de ativos nas bolsas hoje em dia. Em outras palavras ela sugere que ninguém pode sistematicamente “bater o mercado” usando informação pública, pois os preços já incorporaram tudo. Uma outra característica importante na HME é a possibilidade de arbitragem como correção de possíveis desvios que o mercado possa sofrer em sua forma eficiente, aqui entramos na segunda base e não menos importante que compõe este estudo, o Teorema Fundamental da Arbitragem.

O Teorema Fundamental da Arbitragem ou TFA é um resultado matemático formal da teoria moderna de finanças, especialmente dentro da teoria de precificação por arbitragem. Esse teorema é fundamental porque relaciona a ausência de arbitragem com a existência de uma medida de probabilidade de risco neutro (ou equivalente ao martingal) sob a qual os preços descontados dos ativos são martingais. O enunciado diz que: “Um mercado financeiro (discreto, finito) não possui arbitragem se, e somente se, existe uma medida de probabilidade equivalente sob a qual os preços descontados dos ativos seguem um processo de martingal”. O formalismo matemático que o consiste é:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Que é o espaço de probabilidade real,

$$F = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$$

É a filtragem, ou seja, o histórico de informações ao longo do tempo,

$$S_t \in \mathbb{R}^d$$

Que é o vetor de preços dos ativos no tempo t,

$$B_t$$

É um ativo livre de risco, como um título de governo, que é usado como base para descontar os preços, e,

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$$

São os preços descontados. Então temos que, uma estratégia autossustentável ϕ é arbitragem se,

$$V_0^\phi = 0$$

Com investimento inicial igual a zero,

$$P(V_0^\phi \geq 0) = 1$$

Probabilidade do ambiente definida anteriormente como sendo igual a 1,

$$P(V_0^\phi > 0) > 0$$

E, ou, maior que zero. Dado estes fatores chegamos a medida de Martingal ou medida neutra ao risco com uma medida de probabilidade $Q \sim P$, tal que os preços descontados seguem como:

$$E_Q[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t$$

Para resumir em termos simples, se não há oportunidade de arbitragem, então é possível modelar os preços de ativos com uma medida de probabilidade neutra ao risco, isso é a base de modelos como Black-Scholes, binomial etc. Agora uma rápida integração entre os dois conceitos para que se possa prosseguir. Ambos partem de uma mesma noção de eficiência, ou ausência dela, exploráveis no mercado. A ausência de arbitragem, vinda da Teoria Fundamental da Arbitragem é condição necessária, mas não suficiente para a Hipótese dos Mercados Eficientes, tal que ela é mais ampla e comportamental, enquanto a TFA é mais matemática e restritiva à lógica de especificação. Imagine que o mercado financeiro seria como um cassino justo, a TFA garante que não há falhas matemáticas no sistema evitando arbitragem ou seja, se há arbitragem alguém pode sempre ganhar sem nenhum tipo de risco, isso quebraria o sistema prejudicando a casa. Enquanto isso a HME garante que os jogadores do cassino não têm acesso a informações privilegiadas ou estratégias que deem vantagem de qualquer tipo sobre outros jogadores, ou seja, todos jogam com as mesmas chances de acerto, dadas as informações públicas.

Desenvolvimento

Dado as implicações das bases usadas para desenvolver este estudo, remontamos a um pressuposto simples, antes de partirmos para qualquer desenvolvimento matemático, uma simples ideia: “Seria possível ganhar sem nenhum tipo de risco no mercado financeiro?” Esta ideia pode parecer simples a priori, mas como demonstrado anteriormente na introdução, pode violar fortemente as bases solidas do mercado financeiro moderno cujo é estritamente fundamentado nestas duas bases teóricas-matemáticas.

Ao tentar desenvolver uma forma ou sistema matemático que explore intrinsecamente essas restrições impostas pela HME e TFA, esbarramos em uma característica que define mercados: movimentos de preços. Aqui é possível já observar as tuas bases trabalhando em conjunto. Veja a figura abaixo:



Na imagem é possível ver a dinâmica eficiente das teorias trabalhando em conjunto, compreende-se que, assumindo que o leitor tenha um conhecimento básico de mercados financeiros e gráficos de candles,

é possível notar que a formação e desenvolvimento do preço do ativo é formado pela quantidade infindável de informação de incontáveis variáveis, aqui tem-se TFA na prática, onde a movimentação do preço acontece somente, e estritamente, pelos participantes do mercado que a todo momento compram e vendem o ativo, participantes estes que podem ser categorizados como racionais ou irracionais, que remete aos três pilares da HME. Dessa forma, como seria possível desenvolvermos um formalismo matemático cujo qual nos permitisse contornar as restrições do primeiro obstáculo encontrado nesta jornada, que é a movimentação de preço? Pois como se sabe, se compramos um ativo, dado todas as incontáveis variáveis presentes que podem porventura fazer com que haja uma rápida desvalorização do mesmo, estar-se-ia frente a um risco iminente.

A primeira ação necessária foi desenvolver uma formulação que permitisse neutralizar este primeiro entrave. Aqui remontasse ao conceito de hedge. Hedging é uma estratégia de proteção contra riscos financeiros, especialmente contra variações adversas de preços, taxas de cambio ou juros. A intenção desta estratégia, é neutralizar ou reduzir perdas potenciais por meio de instrumentos financeiros que se movem em sentido oposto ao ativo principal. O que foi feito neste estudo é uma adaptação deste conceito, operando no mesmo ativo, foi desenvolvido a seguinte função:

$$y(x) = a(x) - b(x) = 0$$

onde temos:

$$x \in [0, 1]$$

onde x representa o retorno do capital investido, $a(x)$ o ativo comprado em função de um determinado percentual de retorno e $b(x)$ equivale

ao mesmo, mas para o ativo no lado vendido a descoberto. Esta função está dizendo que a diferença de preço em determinados percentuais de retorno sobre o capital investido, em determinado momento se igualam criando uma simetria perfeita onde não há lucro nem perda para todo percentual entre zero e cem por cento de retorno. É possível usar uma função linear simples para resolver para $a(x)$ e $b(x)$ dada por:

$$f(x) = V \cdot (1 + r(x))$$

onde V é o valor investido, e $r(x)$ o percentual na faixa discutida antes. Agora que foi possível contornar essa barreira, de maneira elegantemente simples inclusive, ao atingirmos o Hedging simétrico, agora é preciso extrair lucro. Apresenta-se então um novo problema, com Hedging simétrico, temos que independente da direção do ativo, não realizamos lucro nem perda, ou seja, $y = 0$. Para contornar esse novo obstáculo foi preciso derivar a função já apresentada em uma nova forma dada por:

$$y = I_a(1 + r_a) - I_b > 0$$

com a seguinte restrição de risco onde define-se que a perda máxima do lado perdedor não deve superar o ganho do lado vencedor:

$$I_b \leq I_a(1 + r_a)$$

Aqui temos o seguinte, I_a e I_b são os valores dos lados opostos da operação, dados como valores iguais ou ligeiramente diferentes. r é o retorno sobre o lado vencedor que não necessariamente precisa ser I_a , para todo $r \in [0, 1]$. Agora para um Hedging perfeito exige-se que

ambas as posições tenham o mesmo valor de risco então, neutralizando o risco obtém-se:

$$I_a = I_b = I$$

E como neste caso o retorno é considerado o mesmo para ambos os lados, $r_a = r_b = r$ então temos:

$$y = I(1 + r) - I = I_r$$

com isso o lucro cresce proporcionalmente a r (variação percentual do ativo), mas o risco permanece neutro pois o prejuízo de um lado é compensado pelo retorno do outro resultando em lucro zero. Mas precisamos que $y > 0$ para sair do lucro zero, então é preciso distorcer a simetria do Hedging minimamente para que ainda se mantenha de tal forma o Hedging perfeito. Para que haja essa distorção sem impactar na eficiência de Hedging ajustamos os valores de ambos os lados tal que a perda máxima não ultrapasse o lucro esperado no outro lado. Para descobrir qual a diferença mínima, primeiro assume-se retorno r iguais para ambos os lados, e valores fixos. Então pode-se usar a seguinte formulação:

$$\alpha > \frac{1}{1 + r}$$

Assumindo um retorno de capital de 1%, o valor investido em um dos lados deve ser pelo menos 99% do capital referente, para que haja lucro. Note que para $\alpha \neq 1$ o hedge deixa de ser perfeitamente simétrico, pois o capital investido em cada lado difere ligeiramente, porém consegue-se sair do lucro zero. Isso pode aumentar

ligeiramente o risco, mas se o movimento for limitado a 1%, o risco é estritamente controlado. Podemos abordar uma rápida implementação neste formalismo que considera uma vantagem estrutural de preços. Basicamente consiste em, dado o fato de sabermos que um lado precisa ser ligeiramente menor que outro, podemos implementar isso diretamente no formalismo como:

$$y = I_a(1 + r_a) - I_b + \Delta P_0$$

onde ΔP_0 é a diferença de preço de entrada entre a ordem de compra e a ordem de venda, que é dada exatamente por α . Neste caso agora, estamos blindados contra a movimentação aleatória de ativo, visto que, dada a diferença mínima nas ordens de entradas entre compra e venda simultaneamente, não dependemos da movimentação intrínseca do mercado, pois independente do movimento, temos lucro gerado pela diferença inicial. Note que é importante ressaltar que o lucro final, não necessariamente é a diferença mínima aplicada entre as ordens, pois aqui considera-se que o alvo de ambos os lados tem como objetivo de lucro uma movimentação percentual de 1% em qualquer direção, logo remetendo ao conceito básico de operações de mercado, o stop e o alvo de ganho de ambas as operações se sobreponem, garantindo assim proteção. Por tanto podemos inclusive escrever uma equação formal da seguinte forma:

$$y = I_a(1 + r_a) - I_b + \Delta P_0 = I_r + \Delta P_0$$

onde obtemos uma realização determinística de uma arbitragem pois I_r cancela com a perda oposta, $\Delta P_0 > 0$ que é o ganho estrutural. Portanto, monta-se uma posição de portfólio composta por dois ativos idênticos ou um mesmo ativo com ordens simultâneas opostas, ambas posições são simétricas em alvo de variação ($\pm 1\%$), mas com

assimetria estrutural de entrada, no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) a existência do portifólio Π com:

$$\Pi_0 = 0$$

E

$$\Pi_T > 0$$

Isso implica diretamente que em um dos pilares da TFA, ou seja, contrariando temos:

“Não existe medida equivalente $Q \sim P$ tal que \tilde{S}_t seja martingal.”

Dito de outra forma, o modelo consegue violar os fundamentos da TFA, logo ela não se aplica ao ambiente gerado pelo modelo desenvolvido. Dado que como os retornos se anulam, o lucro líquido final do portifólio permanece sendo ΔP_0 fixo. Podemos expressar isso em termos de TFA onde constrói-se o portifólio como:

$$\Pi_t = \theta_t^1 S_t + \theta_t^0 B_t$$

Onde se constrói Π_t com $\theta_t^1 = +1$ em um lado da operação (mesmo ativo ou corretoras diferentes, porém mesmo ativo) e $\theta_t^1 = -1$ no outro. Com a diferença estrutural

$$\Delta P_0 = S_t^{(1)} - S_t^{(2)} > 0$$

A expectativa de Π_T se torna a seguinte:

$$\mathbb{E}[\Pi_T] = \Delta P_0 + \theta_T^1 (S_T - S_t) > 0$$

E por tanto:

$$\exists \Pi : \Pi_0 = 0, \Pi_T \geq 0, \mathbb{P}(\Pi_T > 0) > 0$$

Logo, por definição, existe arbitragem no modelo. Porém é plausível argumentar que o modelo ainda não pode violar integralmente a TFA, pois assume dois pontos que são de extrema importância em mercados reais, trata-se de custos operacionais e desconsidera mesmo que indiretamente a lei do preço único, que afirma, o preço de um ativo ou comodity idêntico terá o mesmo preço globalmente, independente da localização, quando os benefícios futuros, como fluxo de caixa, forem iguais. Isso diz que, em outras palavras, é impossível negociar o mesmo ativo em posições distintas ao mesmo tempo. Mas podemos contornar esse entrave nos aproveitando justamente dessa mesma lei, onde agora nosso portfólio principal opera com carteiras diferentes dentro do mesmo portfólio. Ou seja, para preservar a premissa de entrada assimétrica com $\Delta P_0 > 0$, sem violar a lei do preço único, o modelo assume a existência de dois ambientes distintos de execução. Para isso define-se que a operação é executada por dois agentes independentes ou duas carteiras distintas operando o mesmo ativo em momentos ligeiramente defasados no tempo, com diferenciais de entrada:

$$\Delta P_0 = S_t^{(1)} - S_t^{(2)} > 0$$

Tal diferença é obtida por delay proposital de execução, micro desvios de spread, ou execução distribuída entre corretoras. Isso corresponde à uma introdução de defasagem $\delta t > 0$ onde:

$$S_t^{(1)} \neq S_t^{(2)}$$

Mesmo que:

$$S_t^{(1)}, S_t^{(2)} \in \mathbb{R}^d$$

A assimetria se torna estrutural e local no tempo, não violando a unidade de preço no instante global, mas sim explorando granularidade microestrutural. Para resolver o problema de custos, obtemos uma solução eficiente cujo qual, atribuímos a uma variável C a soma de todos os custos operacionais que pode ser descrita como:

$$C = \alpha + \beta + \gamma \dots$$

Dessa forma contornarmos os dois problemas de maneira elegante e simples. Com isso o formalismo continua basicamente o mesmo, mas agora com algumas pequenas alterações para incorporar fatores de realidade são eles:

$$y = I_a(1 + r_a) - I_b + \Delta P_0 = I_r + \Delta P_0 - C$$

E com uma pequena alteração na expectativa como:

$$\Pi_T = \Delta P_0 + \theta_T^1(S_T - S_t) - C > 0$$

Com isso é possível implementar fatores de realidade no modelo e perceber que ainda é possível, ao menos teoricamente, manter a quebra de simetria da TFA, e contrariando em parte a HME.

Discussão

Seria possível argumentar que este modelo não apresenta simetria perfeita dado o fato de haver uma diferença de preço entre ordem de compra e venda, mas a simetria ao qual a TFA se refere é explicitamente toda e qualquer discrepância entre lucro e perda, o que claramente o modelo discutido consegue contornar com elegância características. Este estudo não tem como intuito ferir décadas de estudos e embasamento fundamentado tanto por teoria e prática, é apenas uma visão crítica e analítica das barreiras causadas pela simetria de mercado. O intuito de “quebrar” essa simetria aqui, é comprovar que mesmo os modelos mais robustos e sofisticados ainda necessitam constantemente de melhorias. O conhecimento aqui discutido, ainda é teórico e carece de dados empíricos em mercados reais onde há variáveis ligadas ao sistema monetário que podem impor um potencial ineficiência prática deste modelo como taxas de corretagem, delay, descontos tributários etc. mas uma rápida análise feita, cujo qual não há muita relevância para ser incorporada neste estudo indica que há a possibilidade de em um mercado real, o sistema aqui apresentado se mostrar promissor de fato. Antes do comentário a seguir é importante ressaltar que não há qualquer incentivo a pôr em prática tal modelo que obviamente ainda é teórico e não tem embasamento experimental ou indicação de investimento. Considerando o fator de custos operacionais como taxas de corretagem, emolumentos etc., este estudo claramente se aplica, possivelmente, melhor a operações com ações na modalidade swing trade, dado um cálculo simples, irrelevante para expor no trabalho, concluiu-se que, ao menos considerando os valores das taxas da B3 (Bolsa, Brasil, Balcão) e calculando valores de uma ação com preço unitário, é efetivamente mais recompensador quando se aplica o modelo a esta modalidade de investimento. Em contrapartida, em ativos mais líquidos como minicontratos, onde geralmente se opera na modalidade day trade, os custos são de uma proporção um pouco maior trazendo a necessidade de ajuste na diferença de preço de

entrada nos agentes, o que consequentemente pode afetar o modelo de forma geral e sua simetria. Fica claro então aqui que há uma linha tênue entre simetria e lucro, onde o principal fator que pesa para que o resultado do modelo seja verdadeiro, é o ajuste fino e cuidadosamente pensado, sobre os valores de entrada, a modalidade e o tipo de ativo ao qual se deseja operar.

Resultados

Para validar a proposta do formalismo desenvolvido neste estudo, foi aplicado uma serie de operações em condições de mercado real na plataforma Profit da neológica. O experimento realizado, mostra que o modelo é viável na prática, e que consistente tanto em relação com o conceito quanto com a teoria matemática proposta. A seguir o relatório completo do experimento:

Conta: 10072933
Titular: NATA FERNANDES DA SILVA
Data Inicial: 01/08/2025
Data Final: 20/08/2025



Resumo de Performance

Saldo Líquido Total	R\$ 20,00	Saldo Total	R\$ 20,00
Lucro Bruto	R\$ 20,00	Prejuízo Bruto	R\$ 0,00
Fator de Lucro	0,00		
Número Total de Operações	8	Percentual de Operações Vencedoras	50,00%
Operações Vencedoras	4	Operações Perdedoras	0
Operações Zeradas	4		
Média de Lucro/Prejuízo	R\$ 2,50	Razão Média Lucro:Média Prejuízo	0,00
Média de Operações Vencedoras	R\$ 5,00	Média de Operações Perdedoras	R\$ 0,00
Maior Operação Vencedora	R\$ 5,00	Maior Operação Perdedora	R\$ 0,00
Maior Sequência Vencedora	1	Maior Sequência Perdedora	0
Média de Tempo em Op. Vencedoras	00:00:40	Média de Tempo em Op. Perdedoras	00:00:00
Média de Tempo em Operações	00:00:20		
Máximo Ações/Contratos	-	Patrimônio Necessário(Maior Operação)	R\$ 54.860,00
Retorno no Capital Inicial	0,04%	Percentual de Tempo no Mercado	-
Patrimônio Máximo	R\$ 20,00		
Declínio Máximo(Topo ao Fundo)		Declínio Máximo(Trade a Trade)	
Valor	R\$ 0,00	Valor	R\$ 0,00
Drawdown como % do Saldo Total	0,00%	Drawdown como % do Saldo Total	0,00%

Para fins de segurança, foi usada uma conta de simulação que reproduz fielmente e completamente todo o cenário real de mercado apenas com a diferença de não se operar dinheiro real. Sobre o método de operação, a primeira coisa foi abrir dois instrumentos de análise de preços, o book de ofertas e Times & Trades, ferramentas que a plataforma disponibiliza. Elas foram usadas para identificar as faixas de preço onde o ativo se encontrava mais acessível, é importante ressaltar que tais ferramentas não foram utilizadas com o intuito de prever de alguma forma a direção do ativo, mas para analisar

a faixa de preço atual em que o ativo estava trabalhando no momento da operação. Ao identificar essa faixa, é posto então as ordens opostas de compra e venda que se deu da seguinte maneira. Neste experimento não foi necessário abrir contas diferentes em corretoras diferentes pois a própria plataforma da neológica oferece a opção de criar carteiras, uma espécie de subconta, onde é possível operar diferentes ativos em diferentes quantidades e posições usando a mesma conta principal, então foram criadas duas carteiras uma nomeada “c” de compra e “v” de venda. O ativo operado foi o minicontrato de dólar da oferecido pela bolsa brasileira B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), a diferença de entrada entre as ordens foi estabelecida como padrão de 0,50 pontos, referente ao ativo em questão que é o mínimo de movimentação. Um rápido exemplo para o leitor, suponha que a contação neste exato momento seja de 5.400,00 logo abrimos uma compra neste preço e colocamos uma venda em 5.400,50. Pegando meio ponto de diferença que equivale a R\$ 5,00. Agora com relação aos alvos, para cada operação foi definido um alvo de 4 pontos e um stop loss de 3,50 pontos, dessa forma os alvos e stops de ambos os lados ficam perfeitamente simétricos. Uma rápida análise que podemos tirar do relatório apresentado, é que contra intuitivamente, esperava-se que a taxa de acerto fosse 100%, mas se mostrou a metade ou seja 50%. Isso está em concordância com a teoria já que inevitavelmente, mesmo nunca havendo perda, um lado sempre perde. Abaixo também podemos ver um gráfico do patrimônio com base no relatório:



Também é possível observar o relatório de operações com mais detalhes:

É possível observar uma pequena diferença entre as datas das operações. Isso se deve por motivos de agenda, pois não foi possível realizar operações em dias seguido, de minha parte. De certa forma isso pode ser visto como um acréscimo à robustez do estudo, onde fora testado em diferentes dias e condições de mercado.

Conclusão

Foi possível então observar analítica e experimentalmente que é possível obter lucro garantido e sem nenhum risco de capital no mercado financeiro violando intrinsecamente os conceitos postulados impostos pela HME e TFA. Isso levanta questões não só matemáticas sobre a integridade do próprio sistema e bases teóricas que o mercado financeiro de forma geral é baseado, como também questões éticas e possivelmente filosóficas. Pois ao imaginar uma forma de obter lucro garantido de um sistema que a pouco pensava-se

ser impossível essa, façanha creio que posso colocar desta forma, o que seria sensato de se esperar de quem tivesse posse de tal modelo, pois como se vê a dinâmica apresentada aqui é intrinsecamente estrutural, ou seja, o que foi discutido neste estudo não é simplesmente algo passageiro, uma falha que se pode aproveitar e que depois de identificada logo se concerta. A questão apresentada é puramente matemática e estrutural. Para ser concertada, se possível, possivelmente seria preciso mudar completamente o sistema financeiro.

Referencias

- [1] Pastore, L. R. (2018). *Teorias das finanças comportamentais e dos mercados eficientes e suas aplicações no mercado financeiro* [Trabalho de graduação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. Repositório institucional Lume.
- [2] Rabelo Junior, T. S., & Ikeda, R. H. (2004). *Mercados eficientes e arbitragem: um estudo sob o enfoque das finanças comportamentais*. Revista Contabilidade & Finanças, 15(34).
- [3] Bortolon, A. (2008). *Estudo das estratégias de hedge tradicional e ativo com contratos futuros de soja na BM&F* [Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. Lume Repositório Digital.