

1. Прямий відрізок алюмінієвого дроту утримують за нитку АВ над широкою посудиною з водою (рис.1). Верхню точку А нитки починають опускати зі швидкістю $v = 1$ см/с. Побудуйте: 1) графік залежності сили натягу нитки від часу; 2) траєкторію верхньої точки С дроту. Опором води знехтуйте. Довжина дроту CD $l = 40$ см, площа перерізу $S = 1$ мм², густина алюмінію $\rho = 2,7$ г/см³, відстань BD $h = 21$ см, прискорення вільного падіння $g = 9.8$ м/с², довжина відрізка $ADB = 50$ см.
2. Сірник запалили, провівши ним уздовж половини довжини спеціальної смужки на сірниковій коробці (рис. 2). Сірник рухався рівномірно під кутом $\alpha = 60^\circ$ до поверхні. При цьому вздовж нього була прикладена силу $F = 1$ Н. 1) Вважаючи, що половина виконаної роботи пішла на нагрів речовини в області контакту голівки сірника, оцініть, яка маса цієї речовини нагрілася до температури загорання 250°C (питома теплоємність речовини $c = 1$ Дж/(г · К)). 2) На експериментальному графіку (рис. 3) з урахуванням теплових втрат наведений час запалювання сірника в залежності від переданої йому потужності. З якою швидкістю рухався сірник в описаному досліді? Поясніть, чому при потужності, меншій деякого значення (0,1 Вт на графіку) сірник взагалі не загоряється. Варто зазначити, що робота залежить від кута між силою і переміщенням $A = F \cdot l \cdot \cos\alpha$.
3. На рис.4 показано світну точку А та три її зображення, отримані за допомогою оптичної системи, що складається з лінзи та великого плоского дзеркала. Відомо, що зображення A_1 та A_2 уявні, а зображення A_3 – дійсне. Накресліть можливе розташування елементів оптичної системи. Визначте межі області, звідки можна побачити всі три зображення.
4. Дріт повітряної лінії електропередачі має композитну структуру (навколо центральних сталевих оцинкованих проволоч розташовані алюмінієві). Кожен наступний шар навиваються у напрямку, протилежному попередньому. На рисунку зображено дріт, що складається з 7 сталевих і 30 алюмінієвих проволоч однакового діаметру $d = 2.2$ мм. Поясніть таку будову дроту та визначте опір 1 км його довжини. Як Ви вважаєте, зі скількох алюмінієвих проволоч складається наступний шар у більш товстих дротах? Визначте кут, під яким навиваються проволочки наступного шару. Питомі опори сталі та алюмінію $\rho_{\text{ст}} = 0.13$ Ом · мм²/м, $\rho_{\text{ал}} = 0.027$ Ом · мм²/м.
5. Ділянка електричної схеми містить сім резисторів (рис. 6). Схема коректно працює, якщо номінали вказаних резисторів дорівнюють їхнім номерам ($R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом і т.ін.) Резистор R_2 перегорів, і замінити його новим резистором номіналом 2 Ом неможливо. Для відновлення працездатності схеми один із резисторів, що залишилися, замінили резистором іншого номіналу. Який резистор було замінено? Резистор якого номіналу впаяли замість нього?

Задачі запропонували О.Ю.Орлянський (1,2,4), І.М. Гельфгат (3), Є.П.Соколов (5).

1. Прямой отрезок алюминиевой проволоки удерживают за нить АВ над широким сосудом с водой (рис.1). Верхнюю точку А нитки начинают опускать со скоростью $v = 1$ см/с. Постройте: 1) график зависимости силы натяжения нитки от времени; 2) траекторию верхней точки С проволоки. Сопротивлением воды пренебречь. Длина проволоки CD $l = 40$ см, площадь сечения $S = 1$ мм², плотность алюминия $\rho = 2,7$ г/см³, расстояние BD $h = 21$ см, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с², длина отрезка $ADB = 50$ см.
2. Спичка зажглась пройдя половину длины специальной полоски на спичечной коробке (рис.2). Спичка двигалась равномерно под углом $\alpha = 60^\circ$ к поверхности. При этом вдоль нее была приложена силу $F = 1$ Н. 1) Считая, что половина выполненной работы пошла на нагрев вещества в области контакта головки спички, оцените, какая масса этого вещества нагрелась до температуры зажигания 250°C (удельная теплоемкость вещества $c = 1$ Дж/(г · К)). 2) На экспериментальном графике (рис. 3) с учетом тепловых потерь приведено время зажигания спички в зависимости от передаваемой ей мощности. С какой скоростью двигалась спичка в описанном опыте? Объясните, почему при мощности, меньшей некоторого значения (0,1 Вт на графике) спичка вообще не загорается. Следует отметить, что работа зависит от угла между силой и перемещением $A = F \cdot l \cdot \cos\alpha$.
3. На рис.4 показана светящаяся точка А и три её изображения, полученные при помощи оптической системы, состоящей из линзы и большого плоского зеркала. Известно, что изображения A_1 и A_2 мнимые, а изображение A_3 – действительное. Начертите возможное расположение элементов оптической системы. Определите границы области, откуда можно увидеть все три изображения.
4. Кабель воздушной линии электропередачи имеет композитную структуру (вокруг центральных стальных оцинкованных проволоч расположены алюминиевые). Каждый следующий слой навивают в направлении, противоположном предыдущему. На рисунке изображен кабель, состоящий из 7 стальных и 30 алюминиевых проволоч одинакового диаметра $d = 2.2$ мм. Объясните такое строение кабеля и определите сопротивление 1 км его длины. Как Вы считаете, из скольких алюминиевых проволоч состоит следующий слой в более толстых кабелях? Определите угол, под которым навиваются проволочки следующего слоя. Удельные сопротивления стали и алюминия $\rho_{\text{ст}} = 0.13$ Ом · мм²/м, $\rho_{\text{ал}} = 0.027$ Ом · мм²/м.
5. Участок электрической схемы содержит семь резисторов (рис. 6). Схема корректно работает, если номиналы указанных резисторов равны их номерам ($R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и т.д.) Резистор R_2 перегорел, и заменить его новым резистором номиналом 2 Ом невозможно. Для восстановления работоспособности схемы один из оставшихся резисторов заменили резистором другого номинала. Какой резистор было заменен? Резистор какого номинала впаяли вместо него?

Задачи предложили О.Ю.Орлянський (1,2,4), І.М. Гельфгат(3), Е.П.Соколов (5).

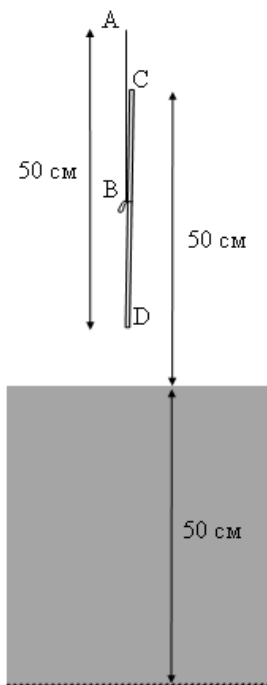


Рис.1

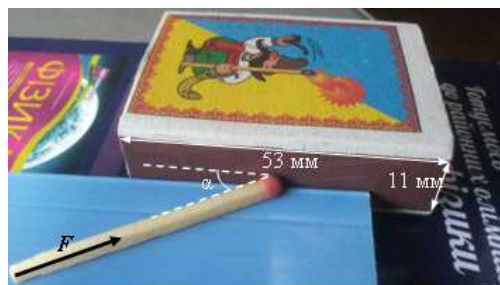


Рис.2

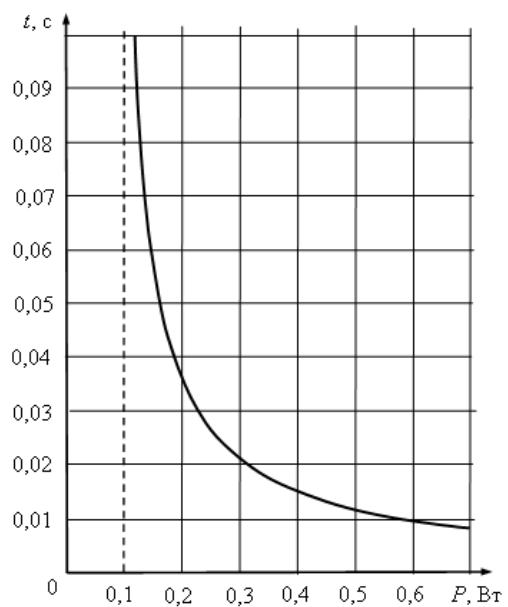


Рис.3

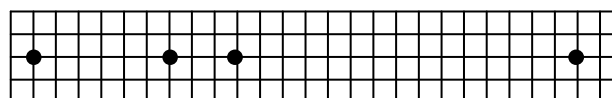


Рис. 4



Рис. 5

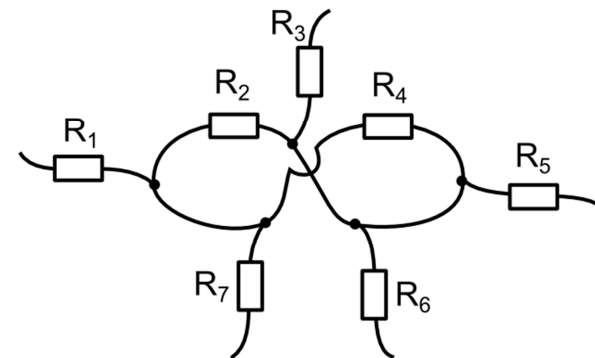
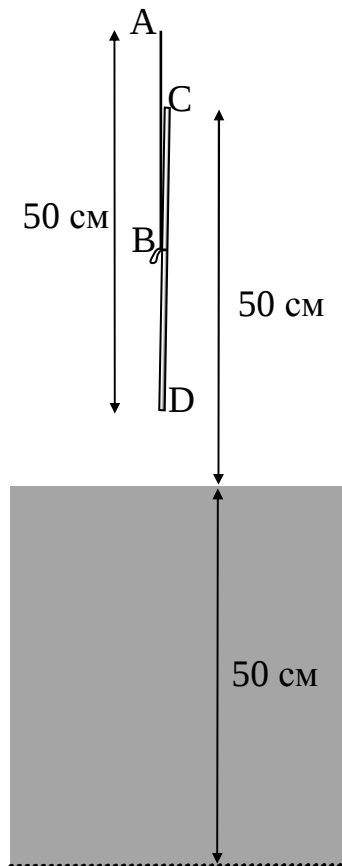


Рис.6

Теоретичний тур, 9-й клас 2015 рік
Задача 1

1. Прямий відрізок тонкого алюмінієвого дроту утримують за нитку АВ над широкою посудиною з водою так, як показано на рисунку. Верхню точку А нитки починають опускати зі швидкістю $v=1\text{ см/с}$. Побудуйте: 1) графік залежності сили натягу нитки від часу; 2) траєкторію верхньої точки С дроту. Опором води знехтуйте. Довжина дроту CD $l=40\text{ см}$, площа перерізу $S=1\text{ мм}^2$, густина алюмінію $\rho=2,7\text{ г/см}^3$, відстань BD $h=21\text{ см}$. Вважати, що прискорення вільного падіння $g=10\text{ м/с}^2$.



Розв'язок. Відстань від точки D до поверхні води 10 см. Отже, перші 10 с сила натягу нитки буде дорівнювати mg дроту ($T_1 = mg$). Далі на нижню частину дроту почне діяти сила Архімеда, яка зменшуватиме силу натягу на $\rho_e g S v t$. Оскільки дріт знаходиться у трохи нахиленому положенні, сила Архімеда намагатиметься його повернути. Розглянемо умови рівноваги частково зануреного у воду дроту, що перебуває у нахиленому положенні (див. Рис.1).

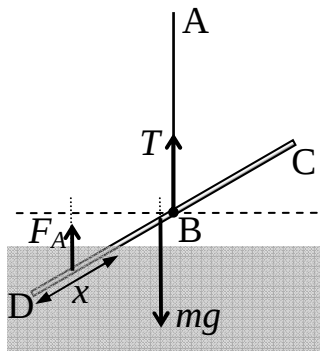


Рис.1

Позначимо довжину зануреної частини через x . Сила Архімеда $F_A = \rho_e g S x = \frac{\rho_e}{\rho} mg \frac{x}{l}$ прикладена до середини зануреної частини, відстань від якої до точки В дорівнює $h - \frac{x}{2}$. Сила тяжіння прикладена до середини

дроту, відстань від якої до точки В дорівнює $h - \frac{l}{2} = 1\text{ см}$. Відносно точки В момент сили Архімеда обертає дріт за годинниковою стрілкою, а момент сили тяжіння проти. З умови рівноваги маємо $F_A d_A = mg d_{mg}$. Плечі сил відносяться як згадані відстані. Отже, $F_A \left(h - \frac{x}{2} \right) = mg \left(h - \frac{l}{2} \right)$ або $\frac{\rho_e}{\rho} mg \frac{x}{l} \left(h - \frac{x}{2} \right) = mg \left(h - \frac{l}{2} \right)$, звідки отримуємо квадратне рівняння:

$$x^2 - 2hx + l(2h - l)\rho/\rho_e = 0.$$

Підставляємо числові дані і знаходимо два корені: 6 см і 36 см. Якщо $x < 6\text{ см}$, або $x > 36\text{ см}$ перемагатиме момент сили тяжіння, і дріт набуватиме вертикального положення, навіть, якщо спробувати його від нього відхилити. Якщо ж дріт занурити на $6\text{ см} < x < 36\text{ см}$, перемагатиме момент сили Архімеда, і дріт відхилиться від вертикального положення, змінюючи об'єм зануреної

частини, поки не настане рівновага або при $x=6$ см, коли точка В вище рівня води, або при $x=36$ см, коли точка В нижче рівня води.

Отже, після того, як нижня точка дротинки торкнеться води, протягом наступних 6 с дротинка зберігатиме вертикальне положення, а сила натягу буде змінюватися за законом $T = mg - F_A = mg \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho} \frac{vt}{l} \right)$, досягнувши значення

$T_2 = \frac{17}{18} mg$. Після цього дротинка нахилиться, зберігаючи під водою ті ж

6 см, доки точка В не торкнеться води. Цей режим руху при незмінній силі натягу

$T_2 = \frac{17}{18} mg$ відбуватиметься протягом 15 с, внаслідок чого дротинка набуде

горизонтального положення. Після цього вона знову почне нахилитися, але під водою будуть вже 36 см її довжини. Оскільки $36 \text{ см} - 21 \text{ см} = 15 \text{ см}$, цей режим відбуватиметься також протягом 15 с при незмінній силі натягу $T_3 = \frac{2}{3} mg$.

Дротинка набуде вертикального положення, виглядаючи над водою на 4 см. Далі дротинка занурюватиметься 4 с, а сила натягу нитки зменшуватиметься за законом $T = mg \left(\frac{2}{3} - \frac{\rho_s}{\rho} \frac{vt}{l} \right)$ від $T_3 = \frac{2}{3} mg$ до $T_4 = \frac{17}{27} mg$. Наступні 10 с повністю

занурена дротинка опускатиметься під водою при силі натягу нитки $T_4 = \frac{17}{27} mg$,

доки не торкнеться дна. Якщо вважати, що дротинка не проковзуватиме, подальший рух її верхньої точки буде рухом вздовж чверті дуги кола радіусом 40 см.

На Рис.2 зображено одне з можливих положень дротинки і її кінцевий стан, коли вона лежить на дні посудини. З умови рівноваги відносно точки D

знаходимо $T d_T = \frac{17}{27} mg d_{mgA}$. Цього разу також можна

обійтися без використання тригонометричних функцій, якщо, наприклад, площу трикутника ABD записати

двома способами: $\frac{1}{2} AB \cdot d_T = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{21}{20} d_{mgA}$. Отже,

$$T = \frac{17}{27} \frac{20}{21} \frac{AB}{AD} mg,$$

де $AB = 29 \text{ см}$, $AD = 50 \text{ см} - vt$. Значення AD, коли дротинка лягає на дно, знаходимо з теореми Піфагора $y = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 20 \text{ см}$. Точка С рухалась вздовж дуги кола протягом 30 с. Останні 20 с руху точки А нитка буде не натягнутою.

Траєкторія точки С за всі 100 с руху, а також графік залежності сили натягу нитки зображені на Рис.3 і Рис.4.

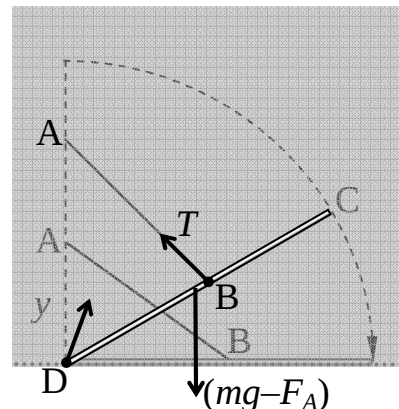


Рис.2

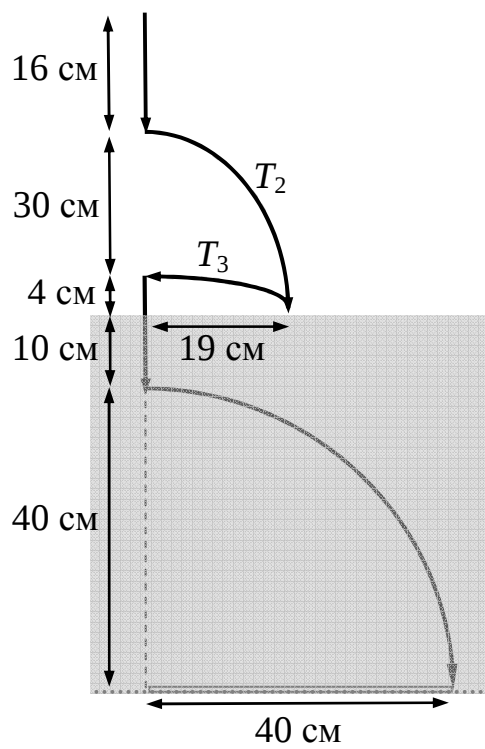


Рис.3

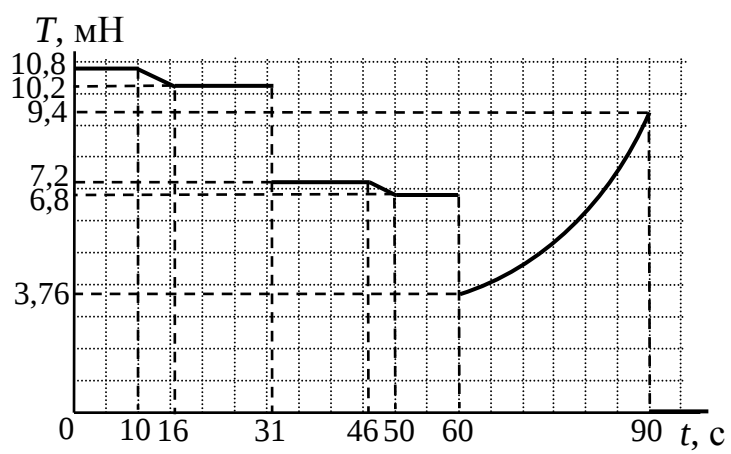


Рис.4

Теоретичний тур, 9-й клас 2015 рік

Задача 2

Сірник запалили, провівши ним уздовж половини довжини спеціальної смужки на сірниковій коробці (рис. 2). Сірник рухався рівномірно під кутом $\alpha = 60^\circ$ до поверхні. При цьому вздовж нього була прикладена силу $F = 1$ Н. 1) Вважаючи, що половина виконаної роботи пішла на нагрів речовини в області контакту голівки сірника, оцініть, яка маса цієї речовини нагрілася до температури



Рис. 2.

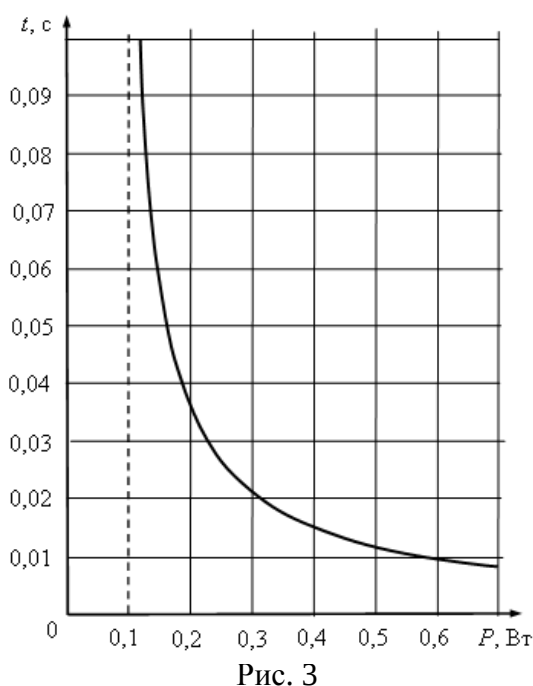


Рис. 3

загорання 250°C (питома теплоємність речовини $c = 1$ Дж/(г·К)). 2) На експериментальному графіку (рис. 3) з урахуванням теплових втрат наведений час запалювання сірника в залежності від переданої йому потужності. З якою швидкістю рухався сірник в описаному досліді? Поясніть, чому при потужності, меншій деякого значення (0,1 Вт на графіку) сірник взагалі не загоряється. Варто зазначити, що робота залежить від кута між силою і переміщенням $A = F \cdot l \cdot \cos \alpha$.

Розв'язування задачі

1) При переміщенні сірника зі сталою швидкістю вся робота, яку виконує сила F , переходить у тепло. Роботу виконує складова сили F вздовж напрямку переміщення, $A = Fl \cos \alpha$, де за умовою

l дорівнює половині довжини смужки. Половина цієї роботи йде на нагрів речовини області контакту голівки сірника:

$$\frac{1}{2} Fl \cos \alpha = cm(t - t_0),$$

звідки:

$$m = \frac{Fl \cos \alpha}{2c(t - t_0)} = \frac{FL \cos \alpha}{4c(t - t_0)}.$$

Відповідно до фотографії експеримент міг відбутися у кімнаті. Отже, можна за початкову температуру сірника обрати кімнатну $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

Підставляємо числові дані і виконаємо розрахунок маси:

$$m = \frac{FL \cos \alpha}{4c(t - t_0)} = \frac{1 \cdot 53 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ}{4 \cdot 10^3 \cdot (250 - 20)} = 28,8 \cdot 10^{-9} \text{ кг}.$$

Виконаємо перевірку одиниць вимірювання шуканої величини:

Ошибка! Ошибка связи.

2) Швидкість рівномірного руху сірника: $v = \frac{l}{t}$, де l - шлях пройдений сірником до моменту загорання за час t . Необхідно зазначити, що графік дозволяє визначити

кількість теплоти за час t . Проте, слід зауважити, що кількість теплоти надана системі, яка зображена на графіку змінюється з часом і є не постійною, тому $P \cdot t \neq \text{const}$. Критерієм вибору точки є умова, що теплота отримана сірником повинна бути більша за теплоту необхідну для загорання сірника.

Це можна зробити, перебираючи різні значення часу, або потужності. **Наприклад**, припустимо, що сірник внаслідок тертя отримувал потужність $P_1 = 0,4 \text{ Вт}$. Тоді за графіком відповідний час його руху до загорання був $t_1 = 15 \text{ мс}$. Отже, отримана ним кількість теплоти $Q_1 = P_1 t_1 = 6 \text{ мДж}$. У нашому випадку кількість теплоти дещо більша $Q = \frac{1}{2} F l \cos \alpha = 6,625 \text{ мДж}$. Підставляємо інші значення і після декількох спроб знаходимо найбільш точне: $P = 0,25 \text{ Вт}$, $t \approx 26,5 \text{ мс}$. Виходить, що відстань $l = 26,5 \text{ мм}$ сірник подолав за $t \approx 26,5 \text{ мс}$. Його швидкість була 1 м/с .

Звісно, можна було знайти значення потужності і часу без перебору чисел, помітивши, що у нашому випадку $Pt = 6,625 \text{ мДж}$. Якщо побудувати цю криву $t = 6,625 \text{ мДж}/P$ поверх запропонованого графіку, то точка перетину і дасть потрібні значення потужності і часу.

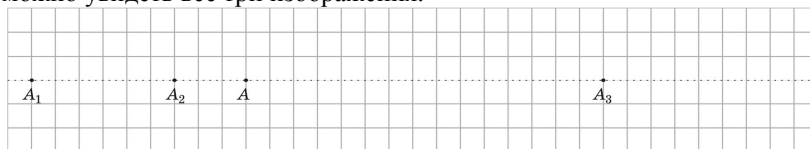
3) Під час нагріву зі збільшенням температури збільшуються теплові втрати. Отже, якщо сірник рухати повільно, речовина може й не прогрітися до температури загорання.

Теоретичний тур, 9-й клас 2015 рік

Задача 3

9 клас. На рисунку показано світну точку A та три її зображення, отримані за допомогою оптичної системи, що складається з лінзи та великого плоского дзеркала. Відомо, що зображення A_1 і A_2 уявні, а зображення A_3 — дійсне. Накресліть можливе розташування елементів оптичної системи. Визначте межі області, звідки можна побачити всі три зображення.

9 класс. На рисунке показана светящаяся точка A и три её изображения, полученные при помощи оптической системы, состоящей из линзы и большого плоского зеркала. Известно, что изображения A_1 и A_2 мнимые, а изображение A_3 — действительное. Начертите возможное расположение элементов оптической системы. Определите границы области, откуда можно увидеть все три изображения.



Розв'язання

Оскільки одне зображення є дійсним, лінза має бути збиральною, вона розташована між точками A і A_3 . Очевидно, дзеркало може бути розташоване тільки ліворуч від лінзи. Всі точки лежать на головній оптичній осі лінзи, перпендикулярної до площини дзеркала. Одне з уявних зображень є результатом відбивання світла від дзеркала, а інше — результатом заломлення світла в лінзі. Дійсне ж зображення є результатом послідовного відбивання світла від дзеркала та заломлення в лінзі (тобто точка A_3 є зображенням у лінзі якоїсь із точок A_1 або A_2). Таким чином, дзеркало розташоване в середині відрізка AA_1 або AA_2 . Розглянемо ці випадки.

1) Точка A_1 є зображенням точки A у дзеркалі.

Тоді точка A_2 буде уявним зображенням точки A в лінзі, точка ж A_3 — дійсним зображенням у лінзі точки A_1 . Скористаємося формулою тонкої лінзи. Будемо вимірювати відстані в клітинках, позначимо відстань оптичного центру лінзи від точки A через d . Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{d} - \frac{1}{d+3} = \frac{1}{F}, \\ \frac{1}{d+9} + \frac{1}{15-d} = \frac{1}{F}. \end{cases}$$

Звідси $d^2 + 2d - 15 = 0$ і $d = 3$, $F = 6$. Відповідні елементи та їх розташування показано на рис. 1.

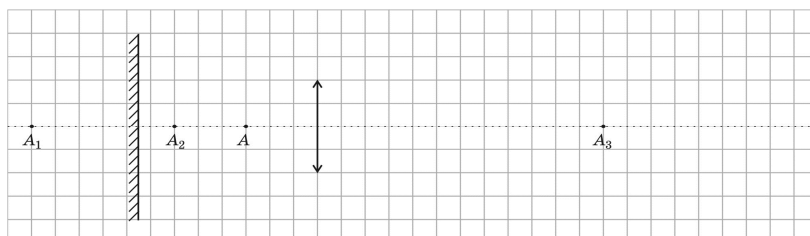


Рис. 1

На рис. 2 виділено область, звідки можна побачити зображення A_1 .

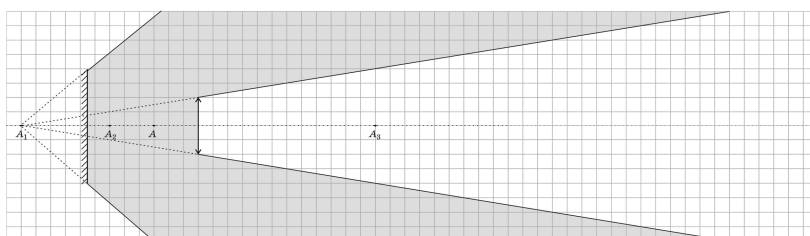


Рис. 2

На рис. 3 і 4 виділено області, звідки можна побачити відповідно зображення A_2 та A_3 .

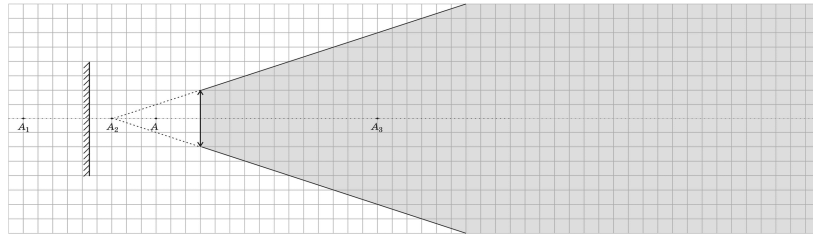


Рис. 3

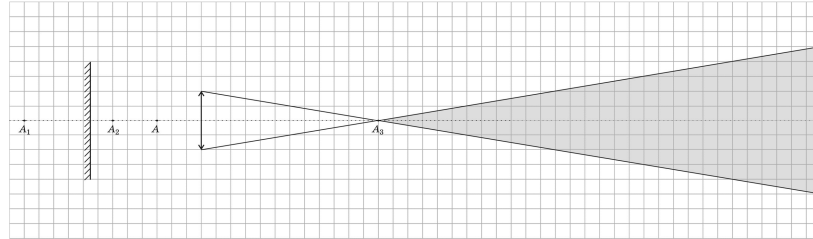


Рис. 4

Оскільки області на рис. 2 і 4 обмежені паралельними прямими, ці області не перетинаються. Отже, побачити одночасно з якоїсь точки всі три зображення неможливо.

2) Точка A_2 є зображенням точки A у дзеркалі.

Тоді точка A_1 буде уявним зображенням точки A в лінзі, точка ж A_3 — дійсним зображенням у лінзі точки A_2 . Аналогічно першому випадку отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{d} - \frac{1}{d+9} = \frac{1}{F}, \\ \frac{1}{d+3} + \frac{1}{15-d} = \frac{1}{F}. \end{cases}$$

Звідси отримуємо таке саме рівняння $d^2 + 2d - 15 = 0$ і $d = 3$ (легко показати, що це не випадковий збіг), однак тепер $F = 4$. Відповідні елементи та їх розташування показано на рис. 5.

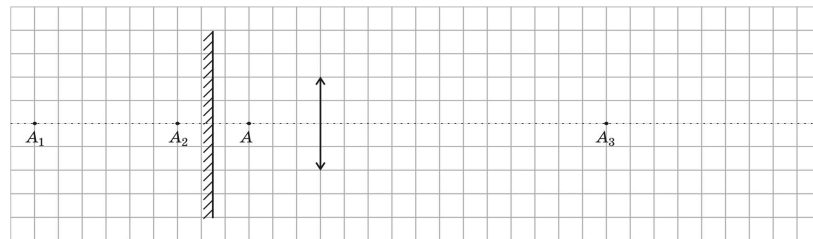


Рис. 5

На рис. 6 виділено область, звідки можна побачити зображення A_1 .

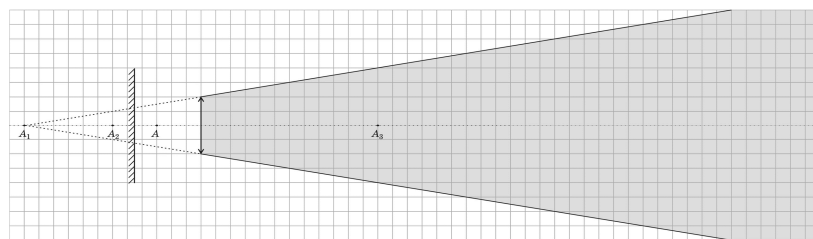


Рис. 6

На рис. 7 виділено область, звідки можна побачити зображення A_2 .

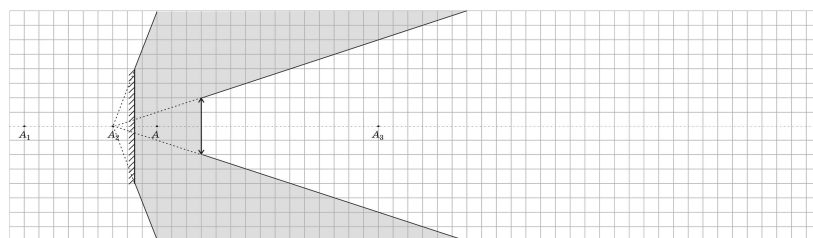


Рис. 7

Оскільки області на рис. 6 і 7 не перетинаються, подальший розгляд непотрібний. Побачити одночасно з якоїсь точки всі три зображення неможливо.

Теоретичний тур, 9-й клас 2015 рік
Задача 4

Дріт повітряної лінії електропередачі має композитну структуру.



Навколо сталевих оцинкованих проволоч розташовані алюмінієві. Кожен наступний шар навиваються у напрямку, протилежному попередньому. На рисунку зображено дріт, що складається з 7 сталевих і 30 алюмінієвих проволоч однакового діаметру $d = 2,2 \text{ мм}$. Поясніть таку будову дроту та визначте опір 1 км його довжини. Як Ви вважаєте, зі скількох алюмінієвих проволоч складається наступний шар у більш товстих дротах та під яким кутом вони навиваються? (на якій довжині дроту, навиваючись, вони роблять повний оберт?) Питомі опори сталі та алюмінію $\rho_{ст} = 0,13 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$, $\rho_{ал} = 0,027 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

Розв'язок. Сталь у дротах використовують завдяки її міцності. Це дозволяє зменшити кількість опор ліній електропередач, збільшивши між ними відстані. Щоб сталь не іржавіла під дією атмосферної вологи, її вкривають тонким шаром цинку. Алюміній виконує головну роль дроту, як гарний і досить дешевий провідник струму (його питомий опір майже у 5 разів менший за опір сталі). Але алюміній – м'який метал, і тому алюмінієву проволоку навивають навколо сталеві. Шари проволоки навивають у протилежних напрямках, щоб ніяка з проволоки не «провалилася» між проволоками попереднього шару, або не піднялася над іншими. Розглянемо

перпендикулярний переріз дроту, вважаючи, що всі проволоки прямі і нінащо не навиваються (Рис.1). Як бачимо, якщо перший шар з 6 проволоки ліг ідеально (ніяких зазорів між проволоками), то у другому шарі може бути не більше 12 проволоки. Для того, щоб вони щільно прилягали одна до одної, слід їх трохи повернути. Тоді кожна проволока другого шару навиватиметься на циліндр діаметром $3d$, а її форма нагадуватиме гвинтову лінію. З

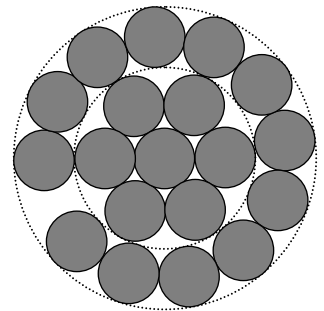


Рис.1

фотографії в умови задачі дійсно можна зробити висновок, що другий шар налічує 12 проволоки (на фото видно шість, рівно половину). Тоді третій шар за умовою матиме $30 - 12 = 18$ алюмінієвих проволоки. На фото у перпендикулярному до напрямку дроту перерізі напевне видно 8 проволоки, що менше половини від 18. Це пояснюється збільшенням розміром циліндричної поверхні шару і тим, що фотографували дріт, мабуть, зблизька. Чим більший радіус циліндричної поверхні, тим меншу її частину ми побачимо на фото. Кількість проволоки у шарі можна швидко оцінити, поділивши довжину кола, що проходить через центри відповідних проволоки на діаметр проволоки d . Так, для другого шару радіус кола

дорівнює $2d$. Тому $N_2 \approx \frac{2\pi \cdot 2d}{d} = 4\pi \approx 12,57$. 12 проволоки і ще трохи вільного місця, як на Рис.1. Результат такої оцінки дещо завищений і буде тим точніший,

чим більший радіус має черговий шар проволок. Для третього шару $N_3 \approx 6\pi \approx 18,85$, тобто 18 проволок і вільне місце. Для четвертого шару $N_4 \approx 8\pi \approx 25,13$. Оскільки отримане і дещо завищене число 25,13 близьке до 25, слід провести більш точні розрахунки. Попередньо можна зробити висновок, що у четвертому шарі точно може бути 24 проволочки або менше. Звісно, можна й однією проволокою виток до витка намотати увесь четвертий шар. Але тоді при фактично однаковому розході алюмінію опір шару буде у 24^2 рази більшим (у 24 рази за рахунок довжини і у 24 рази за рахунок площі перерізу). Тому кількість проволок у шарі повинна бути якомога більшою, але й такою, що дозволяє їм надійно втримуватись за рахунок щільного навивання.

Альтернативні розрахунки:

Перевіримо тепер кількість проволок у шарах дроту більш точними розрахунками. На Рис.2 ми бачимо три рівнобедрені трикутники зі спільною вершиною посередині центральної проволок і основами однакової довжини d , що з'єднують центри сусідніх проволок, відповідно, 1-го, 2-го і 3-го шарів. Бокові сторони цих трикутників мають довжини d , $2d$, $3d$. Якщо позначити номер шару буквою n , то довжина бокової сторони буде nd , а кут α_n , під яким її видно з центру, буде таким, що

$$\sin \frac{\alpha_n}{2} = \frac{1}{2n} \quad (\text{із співвідношення між протилежним катетом та}$$

гіпотенузою). Для першого шару $n = 1$, $\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2}$, цей кут $\alpha_1 = 60^\circ$, що рівно у 6 разів менше за 360° . Отже до першого шару входять 6 проволок, повертати які немає потреби. Для другого шару $n = 2$, $\sin \frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{4}$. За допомогою калькулятора знаходимо кут $\alpha_2 = 28,955^\circ$, що у 12,433 рази менший за 360° . Отже, другий шар складається з 12 проволок, між якими залишається зайвий простір (див. Рис.1). Для третього шару $n = 3$, $\sin \frac{\alpha_3}{2} = \frac{1}{6}$, кут $\alpha_3 = 19,188^\circ$, що у 18,762 рази менше за 360° . Маємо 18

проволок і досить значний зайвий простір, для заповнення якого проволочки слід повернути на такий кут, щоб відповідні розміри кожної збільшились приблизно у

$k_3 \approx 18,762/18 \approx 1,042$ рази. Для четвертого шару $n = 4$, $\sin \frac{\alpha_4}{2} = \frac{1}{8}$, кут $\alpha_4 = 14,362^\circ$,

що у 25,067 рази менше за 360° . Таким чином, теоретично четвертий шар може складатися з 25 проволок. Але тоді кут навивки буде настільки незначним, що проволочкам цього шару буде важко втриматись, і після деякого часу експлуатації дроту вони почнуть провисати. Скоріш за все четвертий шар складається з 24 проволок, які слід повернути так, щоб розміри їх перерізів, перпендикулярні до напрямку на центр дроту, збільшились приблизно у

$k_4 \approx 25,067/24 \approx 1,044$ рази. Це майже стільки ж,

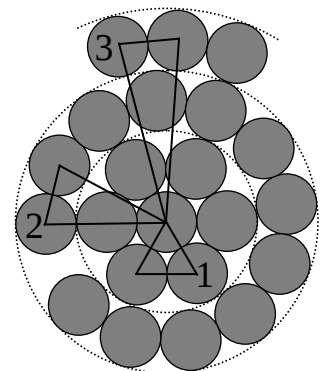


Рис.2

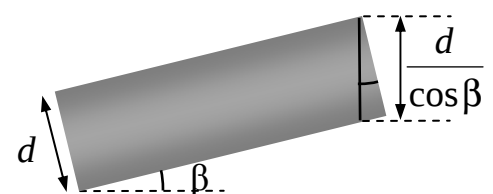


Рис.3

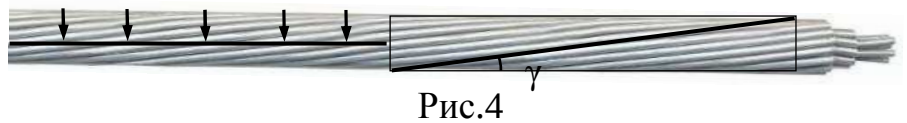
скільки у випадку третього шару ($k_3 \approx 1,042$), що технологічно зручно.

На Рис. 3 ми бачимо згори верхню проволочку дроту, яка утворює з напрямком дроту кут β і має перпендикулярний до цього напрямку переріз шириною $\frac{d}{\cos \beta}$.

Для третього шару (зовнішньому на фото в умові задачі) $\frac{1}{\cos \beta_3} = k_3$, звідки

знаходимо $\beta_3 = 16,3^\circ$. Аналогічно для четвертого шару $\beta_4 = 16,7^\circ$. Перевіримо отриманий результат на прикладі третього шару. Це можна зробити як мінімум двома способами: 1) провести дотичну до якоїсь проволочки посередині дроту, виміряти

сторони прямокутного трикутника (Рис 4, справа) і знайти кут γ ; 2) підрахувати кількість



проволок, що перетинають лінію вздовж напрямку дроту (Рис 4, зліва). Обидва способи дають приблизно однаковий кут $\gamma \approx 11^\circ$. Згідно нашим розрахункам він мав би дорівнювати $16,3^\circ$. Причина розбіжності може бути як у наближеності наших розрахунків, так навіть у тому, що дріт на фото зробили більш «струнким», розтягнувши його електронне фото випадково, або з естетичних міркувань. Але голова причина, мабуть, у неідеальності дроту. На фото це добре видно. В окремих місцях проволочки деформовані, про що свідчить й різна відстань між стрілочками на Рис.4. Це призводить до того, що у реальному виробництві під час намотування середні відстані між центрами проволочок у шарі перевищують діаметр однієї проволочки, внаслідок чого кут намотування виявляється меншим, ніж теоретично розрахований. Це майже напевне робить дуже проблематичним намотування 25 проволочок у четвертому шарі дроту.

Висновок: 4-й шар дроту складається з 24 проволочок, які при намотуванні утворюють кут менший від теоретично розрахованого $\beta_4 = 16,7^\circ$. На тому ж виробництві, де був зроблений дріт з фото, цей кут можна оцінити у 12° .

Тепер розрахуємо опір $l = 1 \text{ км}$ дроту з фото. Оскільки кут $\gamma \approx 11^\circ$ малий, довжина проволочки перебільшуватиме довжину дроту всього у $\frac{1}{\cos \gamma} \approx 1,02$ рази. Знехтуємо

цим, вважаючи, що струм кожною проволочкою тече перпендикулярно до її перерізу $\pi d^2/4$. Опір однієї проволочки $R = \rho l / S = 4 \rho l / \pi d^2$. Загальний опір $R_{\text{заг}}$ паралельного з'єднання 7 сталевих і 30 алюмінієвих проволочок:

$$\frac{1}{R_{\text{заг}}} = \frac{7 \pi d^2}{4 \rho_{\text{ст}} l} + \frac{30 \pi d^2}{4 \rho_{\text{ал}} l} = \frac{\pi d^2}{4 l} \left(\frac{7}{\rho_{\text{ст}}} + \frac{30}{\rho_{\text{ал}}} \right),$$

Звідки знаходимо: $R_{\text{заг}} \approx 0,23 \text{ Ом}$.

Теоретичний тур, 9-й клас 2015 рік

Задача 5

Задача «Перегоревшее сопротивление»

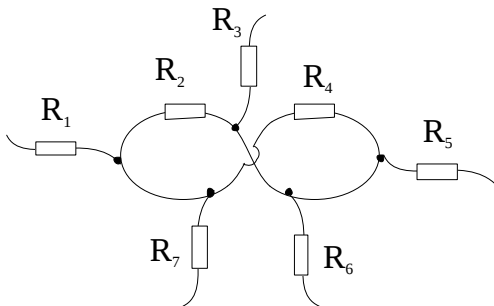


Рис. 1

Участок электрической схемы содержит семь резисторов (рис. 1). Схема корректно работает, если номиналы указанных сопротивлений равны их номеру ($R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$ и т.д.).

В силу непредвиденных обстоятельств резистор R_2 перегорает, и заменить его новым резистором сопротивлением 2 Ом невозможно.

Однако инженерам удалось восстановить работоспособность схемы. Для этого они заменили один из оставшихся резисторов резистором другого номинала.

Какой резистор было заменен? Резистор какого номинала впаяли вместо него?

Решение

Сформулируем главный принцип, с помощью которого мы будем анализировать условие предложенной задачи.

Изображение соединительных проводов на электрических схемах условно: их форму и длину мы можем изменять произвольным образом, а точки подключения мы можем сдвигать вдоль соединительных проводов (не перепрыгивая через сопротивление).

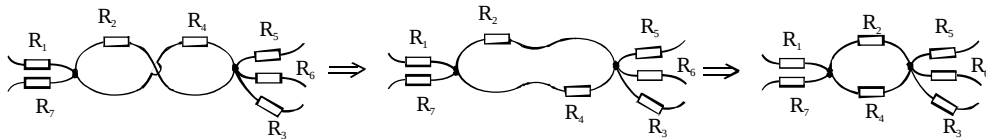


Рис. 2

Исходя из этого принципа, сместим точки подключения к «восьмерке» сопротивлений R_6 , R_3 и R_7 , а после этого «раскрутим» «восьмерку» (рис. 2). Теперь видно, что в приведенной схеме сопротивления R_2 и R_4 включены параллельно.

Поэтому в исходной схеме сопротивления R_2 и R_4 выполняли роль одного сопротивления с номиналом $R_{\text{общ}} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4}{3} \text{ Ом}$. После того как сопротивление R_2 перегорело, для восстановления работоспособности схемы достаточно заменить сопротивление R_4 одним сопротивлением с номиналом $R_x = \frac{4}{3} \text{ Ом}$.

Ответ: резистор R_4 заменили новым резистором с сопротивлением $R_x = \frac{4}{3} \text{ Ом}$.