

1. Гравітаційною лінзою (ГЛ) називається масивне небесне тіло маси  $M$ , в гравітаційному полі якого може відбуватись помітне відхилення світлових променів, що випромінюються джерелом  $S$ , від прямолінійного поширення (рис.1).

Кут  $\alpha$  відхилення світла залежить від гравітаційного радіуса ГЛ  $r_g = 2GM/c^2$  ( $G$  – гравітаційна стала,  $c$  – швидкість світла) та прицільного параметра  $\xi$  – найменшої відстані від ГЛ до початкового напрямку променя (мал. 1)

Завдання 1. При якому співвідношенні між  $\xi$  та  $r_g$  кут  $\alpha$  буде малим? ( $\alpha \ll 1$ )

Кут  $\alpha$  зв'язаний із  $\xi$  та  $r_g$  співвідношенням  $\alpha = A(r_g)/\xi$  (1), де  $A(r_g)$  суттєво залежить від того, яку теорію (Ньютона чи Ейнштейна) використовують для опису явища.

Завдання 2. Використовуючи закон всесвітнього тяжіння Ньютона, вважаючи кут відхилення  $\alpha$  малим, доведіть справедливості співвідношення (1) та знайдіть чому дорівнює  $A(r_g)$ .

*Вказівка:* Вважати за початковий момент часу  $t=0$  момент, коли світло проходить повз гравітаційну лінзу ( $r(t=0)=\xi$ ), і  $dr/dt=c$ .

На рис. 2 зображено хід променя, який поширюється від джерела  $S$  до спостерігача на Землі (точка  $O$ ) повз ГЛ (точка  $D$ ). Для спрощення траєкторію променя зображено у вигляді ламаної. Спостерігач бачить джерело випромінювання не в точці  $S$  (у напрямку  $OS$  під кутом  $\gamma$ ), а в напрямку променя  $OC$  на прямій  $OS'$  під кутом  $\beta$ .

Завдання 3. Вважаючи, кути  $\beta, \gamma$  малими, і що кут  $\alpha$  визначається співвідношенням (1), а величини  $l$  та  $L$  – відомі, знайдіть рівняння ГЛ, що пов'язує кути  $\beta, \gamma$ , відстані  $l, L$  і коефіцієнт  $A(r_g)$ .

Завдання 4. Знайдіть кут  $\beta$  як функцію  $\gamma$  та  $l, L$  і  $A(r_g)$ . Скільки зображень джерела буде спостерігатись? Якщо зображень буде більше одного, то зобразіть схематично хід променів у полі ГЛ і знайдіть прицільні параметри та кути відхилення для кожного з них

Завдання 5. Що буде спостерігатись, коли точки  $S, D$  та  $O$  лежать на одній прямій?

2. Циліндричний електронний пучок з однорідною концентрацією  $n$  рухається із релятивістською швидкістю  $v_0$  вздовж силових ліній зовнішнього однорідного магнітного поля з індукцією  $B_0$ , обертаючись як єдине ціле навколо своєї осі. Якою має бути частота обертання, щоб пучок зберігав свою форму? Вважати, що 1) поперечна складова швидкості електронів значно менша від поздовжньої складової; 2) індукція магнітного поля поздовжнього струму силою  $I$  з аксіально-симетричним розподілом густини на віддалі  $r$  від осі визначається лише силою струму через поперечний переріз циліндра радіусу  $r$ , вісь якого збігається з віссю системи:  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ .

3. На рисунку подана залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Проаналізуйте графік з фізичної точки зору і аргументовано вкажіть на можливі наявні в ньому

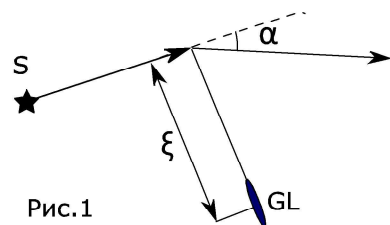


Рис. 1

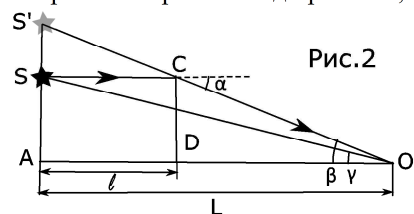
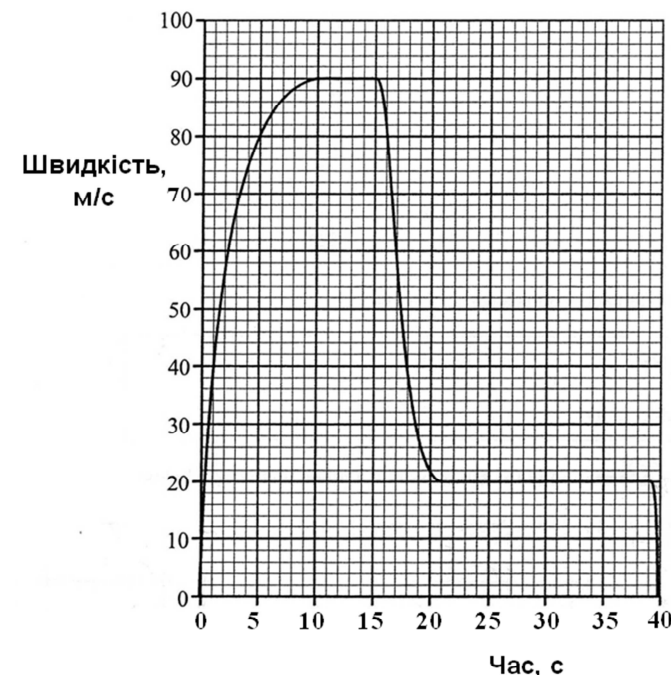


Рис. 2

неточності. Зобразіть схематично правильну, на Ваш погляд, залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Висоту падіння парашутиста оберіть приблизно такою самою, як і на наведеному рисунку.

4. Маятникова система складається з двох кульок масами  $m_1$  та  $m_2$ , сполучених легким стержнем. Цю систему розташували біля поверхні сферичного астероїда так, щоб вона могла вільно обертатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через її центр мас. Який кут із вертикаллю утворює стержень у стані рівноваги? Розрахуйте період малих коливань системи, якщо період обертання супутника, який рухається навколо астероїда з першою космічною швидкістю, складає 130 хв.



5. 11 лютого 2016 року колаборація LIGO оголосила про успішне детектування гравітаційних хвиль, існування яких передбачив Ейнштейном. LIGO складається з двох гравітаційних обсерваторій: у Лівінгстоні (30,6°пн.ш. 90,8°зх.д.) і Хенфорді (46,5°пн.ш. 119,4°зх.д.). Обсерваторія у Хенфорді зафіксувала сигнал на 6,9 мс пізніше, ніж обсерваторія у Лівінгстоні. Визначте, під яким кутом до лінії Лівінгстон-Хенфорд поширювалася гравітаційна хвиля. Гравітаційні хвилі розповсюджуються зі швидкістю світла у вакуумі  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Землю вважати кулею радіусом  $R = 6370$  км. Як ще один метод визначення напрямку на джерело гравітаційних хвиль можна використати ефект Доплера. Яка максимальна різниця відносних зсувів частоти хвиль може спостерігатись для обсерваторій колаборації LIGO? Для якого напрямку на джерело? Вважати, що при ефекті Доплера відносний зсув частоти  $\Delta\nu/\nu$  дорівнює відношенню проекції швидкості руху приймача в напрямку джерела до швидкості поширення хвиль.

Задачі запропонували С.Й.Вільчинський (1), І.О.Анісімов (2), О.Ю.Орлянський (3-5)

1. Гравитационной линзой (ГЛ) называется массивное небесное тело массой  $M$ , в гравитационном поле которого может происходить заметное отклонение световых лучей, которые излучаются источником  $S$ , от прямолинейного распространения (рис.1).

Угол  $\alpha$  отклонения света зависит от гравитационного радиуса ГЛ  $r_g = 2GM/c^2$  ( $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света) и прицельного параметра  $\xi$  – минимального расстояния от ГЛ до направления луча (рис. 1)

Задание 1. При каком соотношении между  $\xi$  и  $r_g$  угол  $\alpha$  будет малым? ( $\alpha \ll 1$ )

Угол  $\alpha$  связан с  $\xi$  и  $r_g$  соотношением  $\alpha = A(r_g)/\xi$  (1), где  $A(r_g)$  существенно зависит от того, какая теория (Ньютона или Эйнштейна) используется для описания явления.

Задание 2. Используя закон всемирного тяготения Ньютона, и считая угол отклонения  $\alpha$  малым, докажите справедливость соотношения (1) и найдите,  $A(r_g)$ ?

Указание: Считать начальным моментом времени  $t=0$  момент, когда свет проходит мимо гравитационной линзы ( $r(t=0)=\xi$ ), и  $dr/dt=c$ .

На рис. 2 изображен ход луча, который распространяется от источника  $S$  к наблюдателю на Земле (точка  $O$ ) мимо ГЛ (точка  $D$ ). Для упрощения траектория луча изображена в виде ломаной. Наблюдатель видит источник излучения не в точке  $S$  (в направлении  $OS$ ) под углом  $\gamma$ , а в направлении луча  $OC$  на прямой  $OS$  под углом  $\beta$ .

Задание 3. Считая углы  $\beta, \gamma$  малыми, и что угол  $\alpha$  определяется соотношением (1), а величины  $l$  и  $L$  – известны, найдите уравнение ГЛ, которое связывает углы  $\beta, \gamma$ , расстояния  $l, L$  и  $A(r_g)$ .

Задание 4. Найдите угол  $\beta$  как функцию  $\gamma$  и  $l, L$  и  $A$ . Сколько изображений источника будет наблюдаться? Если изображений будет больше одного, то изобразите схематически ход лучей в поле ГЛ и найдите прицельный параметр и угол отклонения для каждого из них.

Задание 5. Что будет наблюдаться, если точки  $S, D$  и  $O$  лежат на одной прямой?

2. Цилиндрический электронный пучок с однородной концентрацией  $n$  движется с релятивистской скоростью  $v_0$  вдоль силовых линий внешнего однородного магнитного поля с индукцией  $B_0$ , вращаясь как единое целое вокруг своей оси. Какой должна быть частота вращения, чтобы пучок сохранял свою форму в процессе движения? Считать, что 1) поперечная составляющая скорости электронов значительно меньше продольной составляющей; 2) индукция магнитного поля тока с аксиально-симметричным распределением плотности на расстоянии  $r$  от оси определяется только силой тока  $I$  через поперечное сечение цилиндра радиуса  $r$ , ось которого совпадает с осью системы:  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ .



осью системы:  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ .

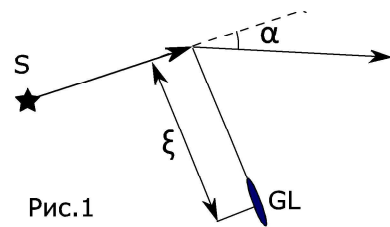


Рис.1

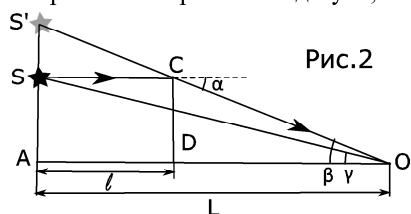


Рис.2

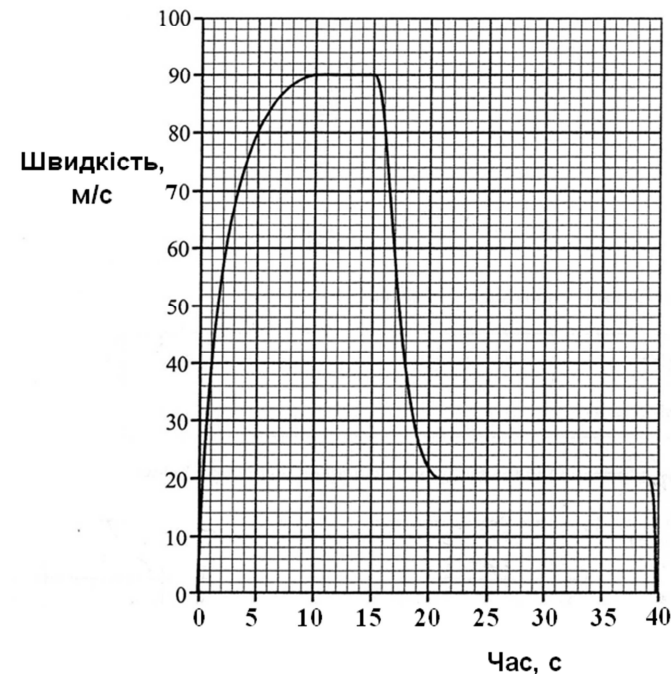
3 На рис.5 приведена зависимость вертикальной скорости парашютиста от времени. Ваша задача проанализировать график с физической точки зрения и аргументировано указать на возможно содержащиеся в нём неточности. Изобразите схематически правильную, на Ваш взгляд, зависимость вертикальной скорости парашютиста от времени. Высоту падения парашютиста примите приблизительно такой же, как и на приведенном рисунке.

4. Маятниковая система состоит из двух небольших шариков,  $m_1$  та  $m_2$ , соединённых лёгким стержнем. Эту систему установили вблизи поверхности сферического астероида так, чтобы она могла свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр масс. Какой угол с вертикалью образует стержень в положении равновесия? Найдите период малых колебаний системы, если период обращения спутника, движущегося вокруг астероида с первой космической скоростью, равен 130 мин.

5. 11 февраля 2016 року коллаборация LIGO объявила об успешном детектировании гравитационных волн, существование которых было предсказано Эйнштейном еще в 1916 г. LIGO состоит из двух гравитационных обсерваторий: в Ливингстоне (30,6°сев.ш. 90,8°зп.д.) і Хенфорде (46,5°сев.ш. 119,4°зп.д.). Обсерватория в Хенфорде зафиксировала сигнал на 6,9 мс позже чем обсерватория у Ливингстоне. Определите, под каким углом к линии Ливингстон-Хэнфорд двигалась гравитационная волна. Гравитационные волны распространяются со скоростью света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Землю считать шаром радиусом  $R = 6370$  км. В качестве еще одного метода определения направления на источник гравитационных волн можно использовать эффект Доплера. Какая максимальна разность относительных смещений частоты волн может наблюдаться для обсерваторий коллаборации LIGO? Для какого направления на источник?

Считать, что при эффекте Доплера относительное смещение частоты  $\Delta\nu/\nu$  равно отношению проекции скорости движения приемника в направлении источника к скорости распространения волн.

Задачи предложили С.И.Вильчинский (1), И.А.Анисимов (2), О.Ю.Орлянский (3-5).



## Задача 1. «Гравітаційна лінза»

Гравітаційною лінзою (ГЛ) називається масивне небесне тіло маси  $M$ , в гравітаційному полі якого може відбуватись помітне відхилення світлових променів, що випромінюються джерелом  $S$ , від прямолінійного поширення (рис.1).

Кут  $\alpha$  відхилення світла залежить від гравітаційного радіуса ГЛ  $r_g = 2GM/c^2$  ( $G$  – гравітаційна стала,  $c$  – швидкість світла) та прицільного параметра  $\xi$  – найменшої відстані від ГЛ до початкового напрямку променя (мал. 1)

Завдання 1. При якому співвідношенні між  $\xi$  та  $r_g$  кут  $\alpha$  буде малим? ( $\alpha \ll 1$ )

Кут  $\alpha$  зв'язаний із  $\xi$  та  $r_g$  співвідношенням  $\alpha = A(r_g)/\xi$  (1), де  $A(r_g)$  суттєво залежить від того, яка теорія (Ньютона чи Ейнштейна) використовують для опису явища.

Завдання 2. Використовуючи закон всесвітнього тяжіння Ньютона, вважаючи кут відхилення  $\alpha$  малим, доведіть справедливність співвідношення (1) та знайдіть чому дорівнює  $A(r_g)$ ?

*Вказівка: Вважати за початковий момент часу  $t=0$  момент, коли світло проходить повз гравітаційну лінзу ( $r(t=0)=\xi$ ), і  $dr/dt=c$ .*

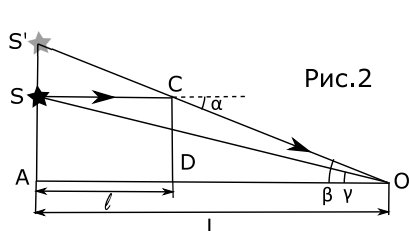


Рис.2

На рис. 2 зображено хід променя, який поширюється від джерела  $S$  до спостерігача на Землі (точка  $O$ ) повз ГЛ (точка  $D$ ). Для спрощення траєкторію променя зображено у вигляді ламаної. Спостерігач бачить джерело випромінювання не в точці  $S$  (у напрямку  $OS$  під кутом  $\gamma$ ), а в напрямку променя  $OC$  на прямій  $OS'$  під кутом  $\beta$ .

Завдання 3. Вважаючи, кути  $\beta$ ,  $\gamma$  малими, і що кут  $\alpha$  визначається співвідношенням (1), а величини  $l$  та  $L$  – відомі, знайдіть рівняння ГЛ, що пов'язує кути  $\beta$ ,  $\gamma$ , відстані  $l$ ,  $L$  і коефіцієнт  $A(r_g)$ .

Завдання 4. Знайдіть кут  $\beta$  як функцію  $\gamma$  та  $l$ ,  $L$ ,  $A$ . Скільки зображень джерела буде спостерігатись? Якщо зображень буде більше одного, то зобразіть схематично хід променів у полі ГЛ, знайдіть прицільні параметри та кути відхилення для кожного з них.

Завдання 5. Що буде спостерігатись, коли точки  $S$ ,  $D$  та  $O$  лежать на одній прямій?

**Завдання 1.** Кут відхилення променя від прямолінійного розповсюдження буде малим, якщо кінетична енергія частинок, з яких утворено промінь, буде набагато більшою за їх максимальну потенціальну енергію в гравітаційному полі лінзи:

$$\frac{mv_0^2}{2} \gg \frac{GmM}{\xi}.$$

Звідси, враховуючи, що  $v_0 = c$ , знаходимо, що  $\xi \gg 2GM/c^2 \equiv r_g$ , тобто  $\xi \gg r_g$ .

Розміри більшості грав. лінз набагато більші за їх гравітаційний радіус, тому ця умова добре виконується.

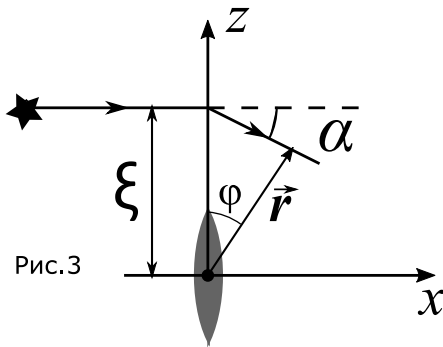


Рис.3

**Завдання 2.** Згідно закону всесвітнього тяжіння сила, яка діє з боку гравітаційної лінзи на частинки, з яких утворено промінь, завжди направлена в сторону грав. лінзи вздовж лінії, яка з'єднує центр мас гравітаційної лінзи з миттєвим положенням частинки, яке задається радіус-вектором  $\vec{r}$ , а модуль цієї сили  $f = GmM/r^2$ , де  $r = |\vec{r}|$  – відстань між частинкою та грав. лінзою. Вважаючи  $\alpha$

малим, можна записати  $\alpha \cong -\Delta v_z/c$ . Знайдемо зміну швидкості частинки по осі  $OZ$ , записавши рівняння проекції руху на вісь  $OZ$ :

$$m \frac{dv_z}{dt} = -f \cos \varphi.$$

Так як кут  $\alpha$  вважається малим, можна наближено вважати  $\cos \varphi \cong \xi/r$  і  $m \frac{dv_z}{dt} = -m \frac{GM}{r^2} \frac{\xi}{r} \rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -\frac{GM\xi}{r^3} \rightarrow \Delta v_z = -GM\xi \int_0^\infty \frac{dt}{r^3(t)}$ . Враховуючи, що  $\frac{dr}{dt} = c$  і що згідно умови задачі  $r(t=0) = \xi$ , маємо  $\Delta v_z = -GM\xi/c \int_\xi^\infty \frac{dr}{r^3} = -\frac{GM\xi}{c} \left( -\frac{1}{2r^2} \right) \Big|_\xi^\infty = \frac{GM\xi}{2c} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\xi^2} \right) = -GM/(2c\xi)$ . Звідси знаходимо  $\alpha = \frac{GM}{2c^2\xi} = \frac{r_g}{4\xi}$ , тобто  $A(r_g) = r_g/4$  в даному наближенні. Зауважимо, що отримане значення параметру  $A$  в 8 раз менше за результат, отриманий в рамках загальної теорії відносності.

**Завдання 3.** З рис. 2 видно, що  $AS' = AS + SS'$ . Так як кути  $\alpha, \beta, \gamma \in$  малими, так що  $\sin \alpha \cong \alpha, \sin \beta \cong \beta, \sin \gamma \cong \gamma, \cos \alpha \cong 1, \cos \beta \cong 1, \cos \gamma \cong 1$ , то маємо  $L\beta = L\gamma + l\alpha$ . Враховуючи, що  $\alpha = \frac{A(r_g)}{\xi}$ , а  $\xi = (L-l)\beta$ , знаходимо  $L\beta = L\gamma + l \frac{A(r_g)}{(L-l)\beta}$ , звідки знаходимо рівняння гравітаційної лінзи:

$$\beta^2 - \gamma\beta - \frac{l}{L} \frac{A(r_g)}{(L-l)} = 0.$$

Завдання 4. Отримане рівняння має 2 розв'язки

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{l}{L} \frac{A(r_g)}{(L-l)}}.$$

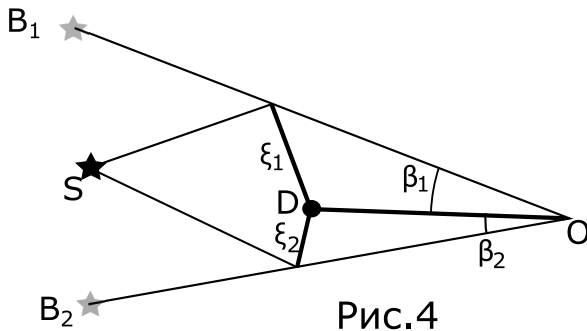


Рис.4

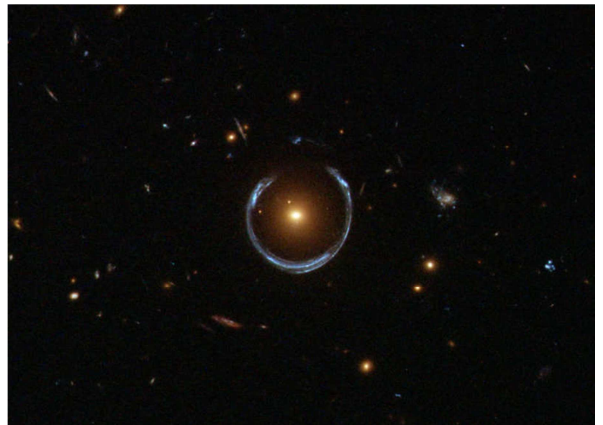
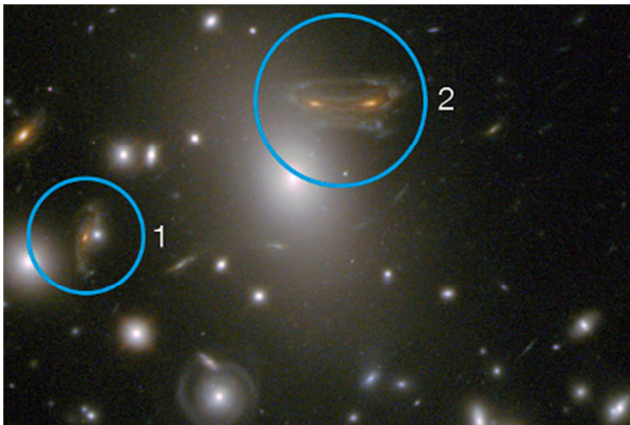
Це означає, що лінза створює 2 зображення, напрямок на які даються кутами  $\beta_1$  та  $\beta_2$ . Перший з цих кутів є додатнім, другий – від'ємним. Хід відповідних променів зображень на рис 4. Прицільні параметри  $\xi_1$  та  $\xi_2$  є різними для цих двох розв'язків:  $\xi_1 = (L-l)\beta_1$ ,  $\xi_2 = (L-l)\beta_2$ , а значить

різними є і кути відхилення:  $\alpha_1 = \frac{A(r_g)}{\xi_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{A(r_g)}{\xi_2}$ .

Завдання 5. У випадку, коли грав. лінза, спостерігач та джерело випромінювання знаходяться строго на одній лінії, кут  $\gamma = 0$  і в цьому випадку розв'язок рівняння грав. лінзи має вигляд:

$$\beta \equiv \beta_0 = \pm \sqrt{\frac{l}{L} \frac{A(r_g)}{(L-l)}}.$$

Картина має очевидну симетрію, так що спостерігач бачить не точку  $S'$ , а кільце, яке утвориться обертанням цієї точки навколо осі симетрії OS. Кутовий радіус кільця дорівнює  $\beta_0$ . Ці кільця називаються кільцями Ейнштейна.



Циліндричний електронний пучок з однорідною концентрацією  $n$  рухається із релятивістською швидкістю  $v_0$  вздовж силових ліній зовнішнього однорідного магнітного поля з індукцією  $B_0$ , обертаючись як єдине ціле навколо своєї осі. Якою має бути частота обертання, щоб пучок зберігав свою форму в процесі руху? Вважати, що поперечна складова швидкості електронів значно менша від поздовжньої складової.

Примітка. Магнітне поле струму з аксіально-симетричним розподілом густини на віддалі  $r$  від осі визначається лише величиною струму через поперечний переріз циліндра радіусу  $r$ .

## Розв'язок

Для того, щоб форма пучка не змінювалася, сума сил, що діють на кожний електрон у радіальному напрямку, повинна дорівнювати нулеві:

$$\frac{mv_\phi^2}{r\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - eE_r = -e\{v_0B_\phi - v_\phi B_0\}, \quad (1)$$

де  $E_r$  – радіальне електричне поле, зумовлене зарядом пучка,  $B_\phi$  – аксіальне магнітне поле, зумовлене струмом пучка. В силу умови  $v_\phi \ll v_0$  магнітним полем, зумовленим обертанням пучка, можна знехтувати поруч із зовнішнім магнітним полем, а релятивістський множник визначається лише поздовжньою швидкістю електронів.

Поле  $E_r$  на поверхні нескінченного зарядженого циліндра легко знайти з теореми Гаусса:

$$\varepsilon_0 E_r 2\pi r \Delta L = -en\pi r^2 \Delta L, \quad E_r = -\frac{enr}{2\varepsilon_0}. \quad (2)$$

В силу обставини, вказаної в примітці, аксіальне магнітне поле на поверхні рівномірно зарядженого циліндра, що рухається зі швидкістю  $v_0$ , можна знайти за формулою

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 en v_0 \pi r^2}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 en v_0 r}{2}. \quad (3)$$

Шукана частота обертання пучка  $\omega$  пов'язана з азимутальною швидкістю  $v_\phi$  співвідношенням  $v_\phi = \omega r$ .

Підставимо всі ці співвідношення до умови (1):

$$\frac{m\omega^2 r}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} + \frac{e^2 nr}{2\varepsilon_0} = v_0 \frac{e\mu_0 en v_0 r}{2} + e\omega r B_0,$$

або

$$\frac{\omega^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} + \frac{e^2 n}{2\varepsilon_0 m} = v_0 \frac{e^2 \mu_0 n v_0}{2m} + \frac{e\omega B_0}{m}. \quad (4)$$

Введемо позначення

$$\omega_b^2 = \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}, \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} -$$

відповідно пучкова частота, циклотронна частота та релятивістський фактор. Тоді замість (4) маємо:

$$\gamma\omega^2 + \frac{\omega_b^2}{2} + \omega\omega_c = \frac{e^2 n v_0^2}{2mc^2 \varepsilon_0}$$

(враховано, що  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ), або остаточно

$$\gamma\omega^2 - \omega\omega_c + \frac{\omega_b^2}{2\gamma^2} = 0. \quad (5)$$

Розв'язавши квадратне рівняння (5), маємо:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\gamma} \left( \omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - \frac{2\omega_b^2}{\gamma}} \right). \quad (6)$$

Якщо густина пучка мала, а магнітне поле велике, так що  $\omega_b \ll \omega_c$ , формулу (6) можна спростити до вигляду

$$\omega_{1,2} \approx \frac{1}{2\gamma} \left[ \omega_c \pm \omega_c \left( 1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma \omega_c^2} \right) \right] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\gamma} - \frac{\omega_b^2}{2\gamma^2 \omega_c}; \\ \frac{\omega_b^2}{2\gamma^2 \omega_c}. \end{cases}$$

### Задача 3 (11 клас)

На рисунку подана залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Проаналізуйте графік з фізичної точки зору і аргументовано вкажіть на можливі наявні в ньому неточності. Зобразіть схематично правильну, на Ваш погляд, залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Висоту падіння парашутиста оберіть приблизно такою самою, як і на наведеному рисунку.

На рисунку приведена залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Ваша задача проаналізувати графік з фізичної точки зору і аргументовано вказати на можливі неточності. Зобразіть схематично правильну, на Ваш погляд, залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Висоту падіння парашутиста приміть приблизно такою ж, як і на приведеному рисунку.

**Розв'язок.** Відповідно до рисунка, перші 10 секунд парашутист падав із зростаючою вертикальною швидкістю, яка, досягнувши сталого значення 90 м/с, у наступні 5 с не мінялась. У момент часу  $t=15$  с парашутист розкрив парашут, про що свідчить наступне різке зменшення швидкості падіння. Після 21-ї секунди парашутист спускався на парашуті уже з новою сталою швидкістю 20 м/с. На протязі останньої, 40-ї секунди, парашутист, мабуть торкнувся поверхні землі і погасив свою швидкість до нуля. Висоту, з якої був здійснений стрибок, можна оцінити по площі під графіком приблизно як 1,8 км.

Далі про основні невідповідності графіка.

Оскільки у початковий момент часу вертикальна швидкість парашутиста дорівнювала нулю, то у момент стрибка його літак чи гвинтокрил або летів горизонтально, або завис. В обох випадках спочатку на парашутиста у вертикальному напрямку діяла тільки сила тяжіння, тому його початкове вертикальне прискорення мало б дорівнювати прискоренню вільного падіння. На графіку  $v(t)$  прискорення відповідає тангенсу кута нахилу дотичної  $a=\Delta v/\Delta t$ , отже для знаходження прискорення можна провести дотичну і в утвореному прямокутному трикутнику знайти відношення катетів. В той же час, на представленому графіку наявне різке зростання швидкості із прискоренням, що у кілька разів переважає прискорення вільного падіння  $g$ .

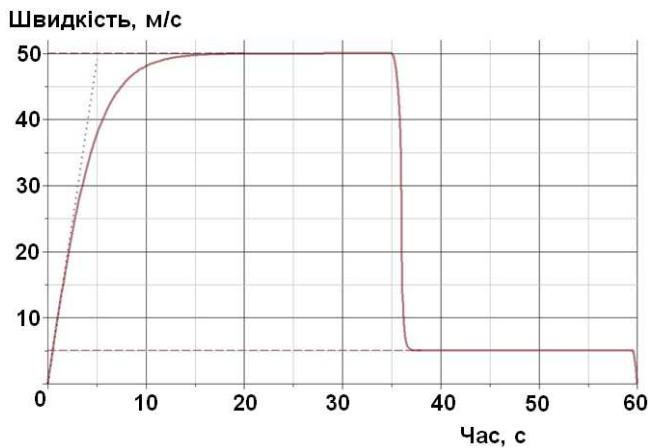
Таке зростання не відповідає реаліям, оскільки на падаючого парашутиста крім тяжіння діє сила опору повітря, яка збільшується по мірі зростання швидкості, що зменшує прискорення і врешті-решт призводить до набуття падаючим тілом сталого значення швидкості.

Ще одна помилка на графіку пов'язана із кінцевою ділянкою руху (із розкритим парашутом). Відповідно до графіка, парашутист із розкритим парашутом рухався зі сталою швидкістю 20 м/с, тобто 72 км/год. Такої швидкості тіло могло б набутися, наприклад, у процесі вільного падіння з висоти  $h=V^2/2g\approx 20$  м, тобто приблизно висоти 6-поверхового будинку. Падіння з такої висоти звичайно призводить до фатальних наслідків.

Площа під графіком за останню секунду руху явно перевищує 10 м. Зрозуміло, що парашутист на такій відстані не може затримувати ноги, хоча і може це зробити за допомогою маніпуляцій із стопами парашута.

Оцінімо реальну швидкість спуску на парашуті. Якщо припустити можливість падіння зі швидкістю такою, яка була б при стрибку із висоти приблизно 1,5 м (максимально безпечна висота для людини спортивного складу), то ця швидкість  $V=\sqrt{2gh}$  перед ударом об землю отримується трохи меншою за 5,5 м/с. Таким чином, можна припустити, що парашут має забезпечувати швидкість спуску не більше за  $\approx 5$  м/с.

На рисунку наведений графік зміни в часі швидкості парашутиста при стрибку із типовими значеннями часів, швидкостей та прискорень, які мають місце на практиці. Висота стрибку в цьому випадку оцінюється по площі під графіком і становить також, як і в попередньому графіку, приблизно 1,8 км



Менша швидкість спуску з парашутом ніж 5 м/с вимагатиме занадто великих, а отже, і важких парашутів, які до того ж будуть сильніше залежати від повітряних потоків, що є небажаним, оскільки підвищує небезпеку стрибків.

З мілких неточностей графіка слід відзначити фіксовані переходи до усталеного руху (моменти на 10-й та 21-й секундах) і у зв'язку з цим не досить правдоподібні криві. У другому випадку навіть створюється враження, що крива має злам.

Припустимо, що парашутист падає вертикально вниз, а сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості  $F_c = kV^2$ . З 2-го закону Ньютона прискорення  $a = g - \frac{k \cdot V^2}{m}$ . При швидкості  $V_{90} = 90$  м/с, прискорення рівно нулю, отже  $\frac{k}{m} = \frac{g}{V_{90}^2}$ . Тепер

вираз для прискорення приймає зручний вигляд:  $a = g \cdot \left(1 - \frac{V^2}{V_{90}^2}\right)$ . Підставимо швидкість

близьку до 90 м/с, напр.  $V = 88$  м/с, і отримаємо  $a = 0,43$  м/с<sup>2</sup>. З графіка знаходимо  $a = 1,5$  м/с<sup>2</sup>. Аналогічні невідповідності є і поблизу виходу на швидкість 20 м/с, де

$$a = g \cdot \left(1 - \frac{V^2}{V_{90}^2}\right).$$

Відзначимо також, що швидкість 90 м/с є завищеною для вільного падіння. Реальне значення ближче до 50 м/с. Звичайно, це потребує фактичних знань, втім, враховуючи, що сила опору пропорційна площі перпендикулярного перерізу, а вона для реальних парашутів явно менше за  $10 \text{ м} \times 10 \text{ м} = 100 \text{ м}^2$ , можна спробувати оцінити швидкість падіння з нерозкритим парашутом, якщо з розкритим 5 м/с. Площа перерізу парашутиста зі складеним парашутом за плечами оцінимо у  $0,5 \text{ м}^2$ , тоді площа розкритого парашута виявиться у 200 разів більшою, а швидкість у  $\sqrt{200} \approx 14$  разів більшою, тобто приблизно 70 м/с.

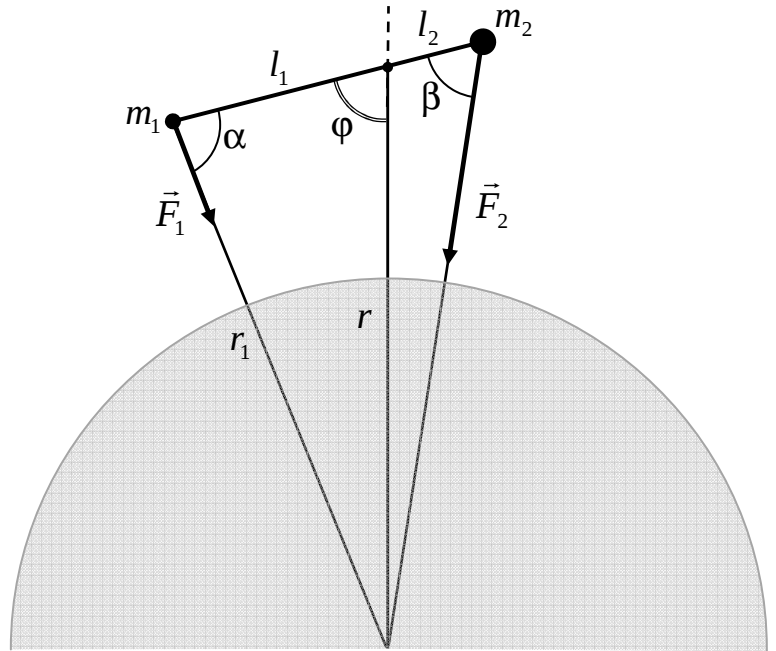
#### Задача 4 (11 класс).

**Решение.** Заметим, что в однородном поле тяжести система пребывала бы в равновесии в любом положении. Однако в условии идёт речь о сферическом астероиде. Его поле тяжести неоднородно.

Рассмотрим произвольное положение стержня (угол между стержнем и вертикалью  $\varphi$ ) и запишем условие равенства моментов сил относительно оси вращения, проходящей через центр масс (см. рис.):  $M_1 = M_2$ , где  $r_2$

$$M_1 = F_1 l_1 \sin \alpha = \frac{Gmm_1}{r_1^2} l_1 \sin \alpha,$$

$$M_2 = F_2 l_2 \sin \beta = \frac{Gmm_2}{r_2^2} l_2 \sin \beta,$$



$m$  - масса астероида.  $\sin \alpha$  (аналогично  $\sin \beta$ ) можно выразить из теоремы синусов (см. рис.)  $\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \varphi}{r_1}$ . В результате находим

$$M_1 = \frac{Gmm_1 l_1}{r_1^3} \sin \varphi, \quad M_2 = \frac{Gmm_2 l_2}{r_2^3} \sin \varphi. \quad (1)$$

В положении равновесия моменты равны. Сокращая на константы, получаем:

$$\frac{m_1 l_1}{r_1^3} \sin \varphi = \frac{m_2 l_2}{r_2^3} \sin \varphi.$$

Поскольку ось вращения проходит через центр масс,  $m_1 l_1 = m_2 l_2$ , и последнее уравнение записывается в виде:  $\left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin \varphi = 0$ .

Оказывается, существует три положения равновесия, когда

$$1) r_1 = r_2, \quad 2) \varphi = 0, \quad 3) \varphi = \pi.$$

Значение угла в первом случае найдём, приравняв квадраты расстояний  $r_1^2$  и  $r_2^2$ , выраженные через соответствующие теоремы косинусов:

$$r^2 + l_1^2 - 2rl_1 \cos \varphi = r^2 + l_2^2 + 2rl_2 \cos \varphi,$$

откуда  $\cos \varphi = \frac{l_1 - l_2}{2r}$ . По условию система из стержня и двух шариков была подвешена «вблизи поверхности сферического астероида», что физически возможно, когда длина стержня много меньше радиуса астероида, то есть,  $l_1, l_2 \ll r$ ,  $\cos \varphi = \frac{l_1 - l_2}{2r} \approx 0$ , а, следовательно,  $\varphi \approx \pm \frac{\pi}{2}$ . В общем случае данному углу соответствует положение неустойчивого равновесия, в чём легко убедиться, чуть отклонив «гантельку» от положения равновесия, например в сторону увеличения угла  $\varphi$  (см. рис.). Тогда момент  $M_1$  уменьшится, как за счёт уменьшения силы  $F_1$ , так и за счёт уменьшения её плеча. Момент  $M_2$  по тем же причинам увеличится, что приведёт к дальнейшему увеличению угла  $\varphi$ , а не к возвращению системы в исходное положение.

Что касается углов  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , они оба соответствуют положению устойчивого равновесия. Это следует из формул (1) для моментов.

Запишем уравнение динамики вращательного движения для небольшого отклонения от угла  $\varphi = 0$ :

$$I\ddot{\varphi} = -M_1 + M_2 = -Gmm_1l_1r\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)\sin \varphi,$$

где  $I = m_1l_1^2 + m_2l_2^2$  - момент инерции системы (в нашем случае  $I = m_1l_1(l_1 + l_2)$ ). Тот, кто не знает, что такое момент инерции, может получить точно такое уравнение ещё проще, записав закон сохранения энергии и продифференцировав его по времени. В случае малых углов  $\varphi$ :  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $r_1 = r - l_1$ ,  $r_2 = r + l_2$ . С учётом  $l_1, l_2 \ll r$  уравнение колебаний принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3Gm}{r^3}\varphi = 0.$$

Оказывается, циклическая частота  $\sqrt{\frac{3Gm}{r^3}}$ , а с ней и период не зависят от массы шариков и длины стержня

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{3Gm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\pi r}{\sqrt{Gm/r}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\pi r}{v_1} = \frac{T_1}{\sqrt{3}} = \frac{130 \text{ с}}{\sqrt{3}} = 75 \text{ с}.$$

Поскольку ответ не зависит от  $m_1$  и  $m_2$ , период колебаний при  $\varphi = \pi$  будет выражаться такой же формулой.

### Задача 5.

**Розв'язок.** Для зручності обсерваторію у Лівінгстоні, яка першою зафіксувала сигнал, позначимо цифрою 1, а обсерваторію у Хенфорді – цифрою 2. На Рис. 1 зображено фронт і напрям руху гравітаційної хвилі, яка зі швидкістю  $c$  падає під кутом  $\alpha$  на лінію 1-2 (Лівінгстон-Хенфорд). Оскільки швидкість перпендикулярна фронту,

$$\cos \alpha = \frac{c\Delta t}{l}.$$

Залишилося знайти відстань  $l$  між

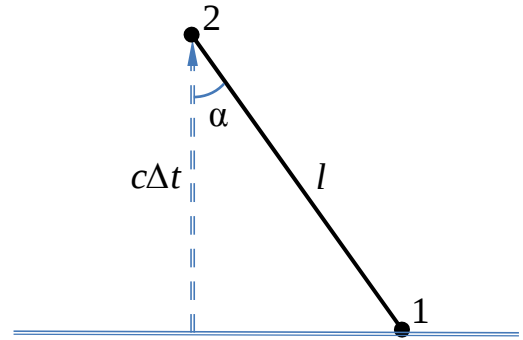


Рис.1

обсерваторіями. Кут  $\theta$ , який відміряє північну широту від екватору, задає відстань обсерваторії до земної осі:  $r_1 = R \cos \theta_1$ ,  $r_2 = R \cos \theta_2$  (див.

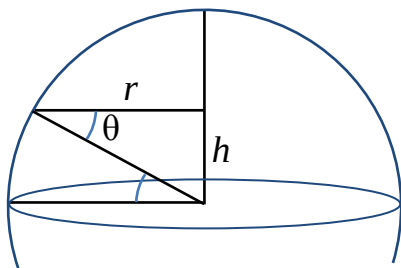


Рис.2

Рис.2), а також «висоту» над площиною екватору  $h_1 = R \sin \theta_1$ ,  $h_2 = R \sin \theta_2$ .

Отже, по вертикалі різниця «висот» між обсерваторіями  $y = h_2 - h_1 = R(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$ .

Якщо подивитися «згори» вздовж земної осі (Рис.3), ми побачимо відстань між обсерваторіями  $x$  в «горизонтальній» проекції, яку можна

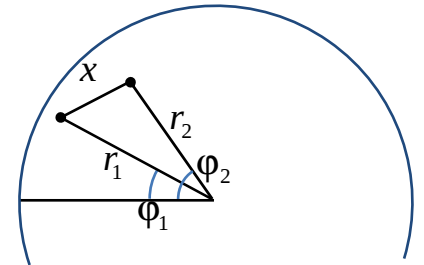


Рис.3

виразити, наприклад, з теореми косинусів

$x^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Далі за теоремою Піфагора знаходимо

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = R\sqrt{2(1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))} \approx 2995,3 \text{ км} \approx 3000 \text{ км}.$$

Отже,  $\cos \alpha = \frac{c\Delta t}{l} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6,9 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^6} = 0,69$ , і кут, під яким до лінії Лівінгстон-Хенфорд пройшла гравітаційна хвиля,  $\alpha \approx 46,4^\circ$ . Можна уявити конічну поверхню з кутом  $\alpha \approx 46,4^\circ$  між віссю (Лівінгстон-Хенфорд) і твірною, звідки могла надійти гравітаційна хвиля.

Для визначення напрямку можна скористатися як просторовою орієнтацією гравітаційних обсерваторій, так і ефектом Доплера. Зазначимо, що за рахунок обертання Землі, швидкості обох обсерваторій лежать у площинах, паралельних екватору. Це означає повну відсутність відносного зсуву частоти у випадку, коли гравітаційна хвиля рухатиметься вздовж земної осі (перпендикулярно до швидкостей) і максимальний ефект, коли рух

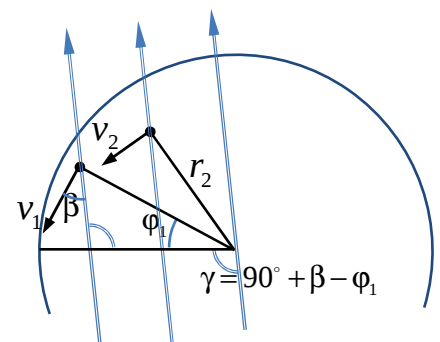


Рис.4

гравітаційної хвилі перпендикулярний до земної осі. Будь-яке відхилення руху гравітаційної хвилі від цього напрямку може хіба що зменшити не тільки відносний зсув частоти кожної лабораторії, але й різницю їх зсувів. Саме різниця зсувів є важливою, оскільки ми не знаємо напевно рухається в нашому напрямку джерело, чи ні. Розглянемо рух гравітаційної хвилі в екваторіальній площині. Кут між швидкістю  $v_1$  першої обсерваторії і напрямком на джерело гравітаційного випромінювання  $\beta$  (див. Рис.4). Тоді:  $\frac{\Delta v_1}{v} = \frac{v_1 \cos \beta}{c}$ ,  $\frac{\Delta v_2}{v} = \frac{v_2 \cos(\beta + (\varphi_2 - \varphi_1))}{c}$ .

Швидкості лабораторій  $v_1 = \omega r_1 = \omega R \cos \theta_1$  і  $v_2 = \omega r_2 = \omega R \cos \theta_2$ , де кутова швидкість обертання Землі (період  $T \approx 24$  год):  $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Максимум різниці відносних зсувів частоти

$$f(\beta) = \frac{\Delta v_1}{v} - \frac{\Delta v_2}{v} = \frac{\omega R}{c} (\cos \theta_1 \cos \beta - \cos \theta_2 \cos(\beta + \Delta\varphi)).$$

Прирівнюючи похідну до нуля  $f'(\beta) = \frac{\omega R}{c} (-\cos \theta_1 \sin \beta + \cos \theta_2 \sin(\beta + \Delta\varphi)) = 0$ , отримуємо рівняння  $\cos \theta_1 \sin \beta = \cos \theta_2 \sin(\beta + \Delta\varphi) = \cos \theta_2 (\sin \beta \cos \Delta\varphi + \cos \beta \sin \Delta\varphi)$ , звідки  $\text{ctg} \beta = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2 \sin \Delta\varphi} - \text{ctg} \Delta\varphi \approx 0,778$ , а кут  $\beta \approx 52,1^\circ$ . Кут  $\gamma = 90^\circ + \beta - \varphi_1 \approx 51,3^\circ$  (див. Рис.4).

Отримати відповідь можна було інакше, без використання похідної. Відносний зсув частоти  $\frac{\Delta v_1}{v} = \frac{v_1 \cos \beta}{c}$  можна записати через скалярний добуток вектору швидкості і одиничного вектору  $\vec{n}$ , що спрямований на джерело хвилі. Тоді  $\frac{\Delta v_1}{v} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{n}}{c}$ ,  $\frac{\Delta v_2}{v} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{n}}{c}$  і  $\frac{\Delta v_1}{v} - \frac{\Delta v_2}{v} = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{n}}{c}$ . З останньої формули видно, що максимальний ефект буде у випадку, коли відносна швидкість  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  спрямована або на джерело хвилі, або від нього. Отже, напрям на джерело визначає відносна швидкість. З теореми синусів для трикутника швидкостей (Рис.5) знаходимо вже знайдене раніше рівняння:

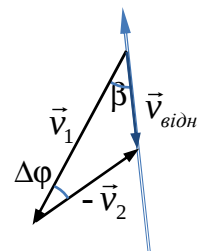


Рис.5

$$\frac{\sin \beta}{v_2} = \frac{\sin(\beta + \Delta\varphi)}{v_1}, \text{ або } \cos \theta_1 \sin \beta = \cos \theta_2 \sin(\beta + \Delta\varphi). \text{ З теореми}$$

косинусів (Рис.5) легко знайти відносну швидкість  $v_{\text{відн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ , а потім і максимальну різницю відносних зсувів частоти:  $f_{\text{max}} = \frac{v_{\text{відн}}}{c} \approx 6,4 \cdot 10^{-7}$ .