

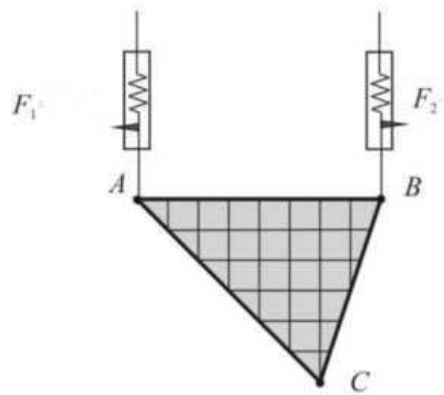
1. На вхід системи опалювання будинку подається вода температурою $T_{\text{вх}}=75^{\circ}\text{C}$ із швидкістю $V=15$ л/хв, а на виході вода має температуру $T_{\text{вих}}=55^{\circ}\text{C}$. При такому обігріванні, якщо на вулиці була температура $T_0=-10^{\circ}\text{C}$, температура повітря всередині будинку складала $T_1=18^{\circ}\text{C}$. Після обклеювання вікон будинку термоплівкою температура всередині зросла до $T_2=24^{\circ}\text{C}$. Оцініть щосекундну економію кількості теплоти при незмінних умовах теплообміну, а також щомісячну економію коштів, якщо б для отримання потрібної температури доводилося б використовувати електрообігрівач за тарифу $p=0,76$ грн/(кВт·год). Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг $^{\circ}\text{C}$), густина води 1000 кг/м³.
2. Два пароплави рухаються в одному напрямку на схід, один слідом за іншим. Через вітер, що дме строго у південно-східному напрямі, дим із труби першого пароплава, швидкість якого $V_1=40$ км/год, направлений на південний захід, а від другого - прямо на південь. Третій пароплав пливе неподалік зі швидкістю $V_3=34$ км/год, таким чином, що відстань від нього до першого пароплава зберігається сталою і рівною відстані від нього ж до другого. Визначить швидкість третього пароплава відносно першого.
3. Майстер вручив своєму юному учню-помічнику плату з 10 пронумерованими клемами та 45 однакових резисторів опором $r=45$ Ом. Він доручив учневі з'єднати кожен пару клем одним резистором. Учень знає, що після закінчення роботи майстер здійснить швидку перевірку: виміряє опір між клемами 1 та 2. Закінчивши роботу, учень помічає, що в нього залишилися «зайві» резистори — отже, якісь пари клем він не з'єднав одну з одною. За якої максимальної кількості «зайвих» резисторів у нього залишається шанс, що майстер не помітить порушень? Майстер застосовує прилад, що визначає опір з точністю до $0,2$ Ом.
4. Трикутник, вирізаний з однорідного шматка плексигласу, при першому зважуванні підвісили за дві вершини (рис.1а), а при другому зважуванні — за три вершини (рис.1б). У першому випадку лівий динамометр показав силу 9 Н, а правий — 12 Н. Чому дорівнюють покази кожного з трьох динамометрів при другому зважуванні?
5. На початку березня 2017 р. німецький кінооператор опублікував на YouTube ролик, на якому гвинтокрил злітає з майже нерухомим гвинтом. За 3 дні ролик переглянули більше мільйона разів. Після цього автор пояснив, що знімав відео на мобільний телефон з частотою 30 кадрів на секунду. Оцініть, якою насправді могла бути частота обертів гвинта. Визначте, у скільки разів швидкість підйому гвинтокрила менша за швидкість руху кінчиків гвинта. Врахуйте, що швидкості будь-яких частин гвинтокрила не перевищують швидкості звуку (340 м/с). Для відповіді на питання можна скористатися вимірювальною лінійкою і кадрами підйому гвинтокрила (рис. 2). Кадри наведені з інтервалом у 2 с. При перегляді відео гвинт за 6 с дійсно ледь повертається (приблизно на кут 30°).

Задачі запропонували Р.В.Мартинюк (1), В.П.Сохацький (2), І.М.Гельфгат (3), Є.П.Соколов (4), О.Ю.Орлянський (5)

1. На вход системы отопления дома подается вода температуры $T_{\text{вх}}=75^{\circ}\text{C}$ со скоростью $V=15$ л/мин, а на выходе вода имеет температуру $T_{\text{вих}}=55^{\circ}\text{C}$. При таком обогреве, если на улице была температура $T_0=-10^{\circ}\text{C}$, температура воздуха внутри дома составляла $T_1=18^{\circ}\text{C}$. После оклейки окон дома термопленкой температура внутри поднялась до $T_2=24^{\circ}\text{C}$. Оцените ежесекундную экономию количества теплоты при неизменных условиях теплообмена, а также месячную экономию денежных средств, если бы для получения нужной температуры приходилось бы использовать электрообогреватель при тарифе $p=0,76$ грн/(кВт·ч). Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $^{\circ}\text{C}$), плотность воды 1000 кг/м³.
2. Два парохода движутся в одном направлении на восток, один следом за другим. Из-за ветра, дующего строго в юго-восточном направлении, дым из трубы первого парохода, скорость которого $V_1=40$ км/ч, направлен на юго-запад, а от второго - прямо на юг. Третий пароход плывет неподалеку со скоростью $V_3=34$ км/ч, таким образом, что расстояние от него до первого парохода остается постоянным и равным расстоянию от него же до второго. Определить скорость третьего парохода относительно первого.
3. Мастер вручил своему юному ученику-помощнику плату с 10 пронумерованными клеммами и 45 одинаковых резисторов сопротивлением $r=45$ Ом. Он поручил ученику соединить каждую пару клемм одним резистором. Ученик знает, что после окончания работы мастер проведет быструю проверку: измерит сопротивление между клеммами 1 и 2. Закончив работу, ученик замечает, что у него остались «лишние» резисторы — значит, какие-то пары клемм он не соединил между собой. При каком максимальном количестве «лишних» резисторов у него остаётся шанс, что мастер не заметит нарушений? Мастер использует прибор, определяющий сопротивление с точностью до $0,2$ Ом.
4. Треугольник, вырезанный из однородного куска оргстекла, при первом взвешивании подвесили за две вершины (рис.1а), а при втором взвешивании — за три вершины (рис.1б). В первом случае левый динамометр показал силу 9 Н, а правый — 12 Н. Чему равны показания каждого из трех динамометров при втором взвешивании?
5. В начале марта 2017 г. немецкий кинооператор опубликовал на YouTube ролик, на котором вертолет взлетает с почти неподвижным винтом. За 3 дня ролик просмотрели более миллиона раз. После этого автор объяснил, что снимал видео на мобильный телефон с частотой 30 кадров в секунду. Оцените, какой на самом деле могла бы быть частота вращения винта. Определите, во сколько раз скорость подъема вертолета меньше скорости движения кончиков винта. Учтите, что скорости любых частей вертолета не превышают скорость звука (340 м/с). Для ответа на вопросы можно воспользоваться измерительной линейкой и кадрами подъема вертолета (рис. 2). Кадры приведены с интервалом в 2 с. При просмотре видео винт за 6 с действительно проворачивается лишь чуть-чуть (приблизительно на угол 30°).

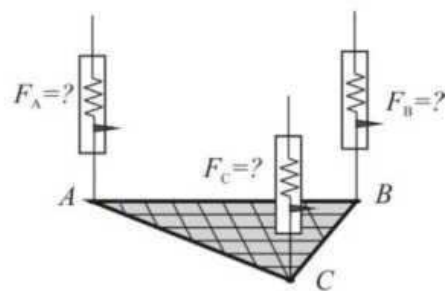
Задачи предложили Р.В.Мартинюк (1), В.П.Сохацкий (2), И.М.Гельфгат (3), Е.П.Соколов (4), О.Ю.Орлянский (5)

первое взвешивание



а)

второе взвешивание



б)

Рис. 1



Рис. 2

Теоретичний тур

8 клас

Задача №1.

На вхід системи опалювання будинку подається вода температурою $T_{\text{вх}}=75^{\circ}\text{C}$ із швидкістю $V=15$ л/хв., а на виході вода має температуру $T_{\text{вих}}=55^{\circ}\text{C}$. При такому обігріванні, якщо на вулиці була температура $T_0=10^{\circ}\text{C}$, температура повітря всередині будинку складала $T_1=18^{\circ}\text{C}$. Після обклеювання вікон будинку термоплівкою температура всередині зросла до $T_2=24^{\circ}\text{C}$. Оцініть щосекундну економію кількості теплоти при незмінних умовах теплообміну, а також щомісячну економію коштів, якщо б для отримання потрібної температури доводилося б використовувати електрообігрівач за тарифу $p=0,76$ грн./($\text{кВт}\cdot\text{год}$). Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг $^{\circ}\text{C}$), густина води 1000 кг/м³.

Розв'язування:

Розглянемо випадок опалення неутепленого будинку. Кількість теплоти яку отримує будинок рівно кількості теплоти яку будинок віддає у навколишнє середовище. Згідно закону Ньютона потужність теплових втрат прямо пропорційна різниці температур тіл і навколишнього середовища. Баланс теплових потужностей має вигляд

$$P_B = \alpha(T_1 - T_0), \quad (1)$$

де P_B – теплова потужність батареї; α – коефіцієнт, що характеризує умови теплообміну між будинком і навколишнім середовищем.

Теплова потужність батареї в будинку:

$$P_B = c\rho V(T_{\text{вх}} - T_{\text{вих}}) \quad (2)$$

де c – питома теплоємність води; ρ – густина води.

Після застосування термоплівки частина теплової потужності P , що раніше розсіювалася будинком у навколишнє середовище, тепер «повертається» всередину будинку і тим самим підсилює потужність батареї. Рівняння балансу має вигляд:

$$P + P_B = \alpha(T_2 - T_0). \quad (3)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3), отримаємо вираз для зекономленої теплової потужності

$$P = \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} - 1 \right) c\rho V(T_{\text{вх}} - T_{\text{вих}}) = \left(\frac{24 - (-10)}{18 - (-10)} - 1 \right) \cdot 4200 \cdot 10^3 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} (75 - 55) = 4,5 \text{ кВт}.$$

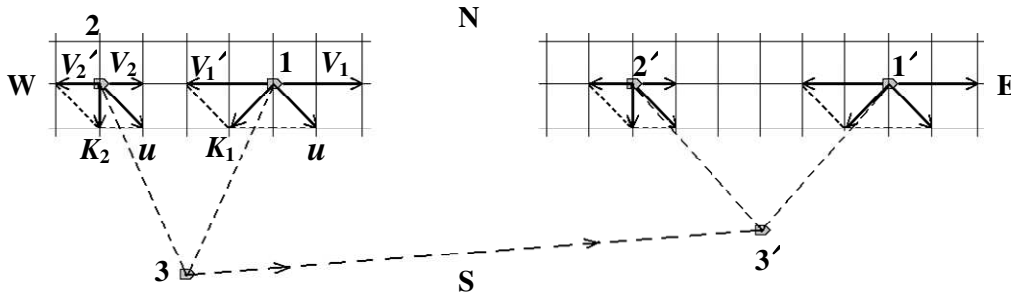
Місячна економія коштів становить:

$$S = pPt = 0,76 \cdot 4,5 \cdot 30 \cdot 24 = 2462,4 \text{ грн}.$$

Задача 2.

Два пароплави рухаються в одному напрямку на схід, один слідом за іншим. Через вітер, що дме строго у південно-східному напрямі, дим із труби першого пароплава, швидкість якого $V_1=40$ км/год, направлений на південний захід, а від другого - прямо на південь. Третій пароплав пливе неподалік зі швидкістю $V_3=34$ км/год, таким чином, що відстань від нього до першого пароплава зберігається сталою і рівною відстані від нього ж до другого. Визначить швидкість третього пароплава відносно першого.

Розв'язок. Якщо перший та другий пароплав рухаються на схід, зі швидкостями V_1 та V_2 , то з урахуванням вітру (під кутом 45°) дим рухається для першого пароплаву на південний захід і на південь - для другого. (В умові задачі відбулась технічна помилка: замість «вітер строго у північно-східному напрямку» правильно було б «у південно-східному». З трикутника швидкостей знаходимо швидкість вітру $u=28,28$ км/год, результуючий напрямок віднесення диму 1-го пароплава (напрямок зустрічного вітру пароплавів позначено векторами зі штрихами – V_1' та V_2' , напрям диму позначено K_1 та K_2 ,) буде на південний захід. Дим другого зноситиметься на південь (K_2) при його власній швидкості $V_2=20$ км/год.



Далі визначимо напрямок швидкості третього пароплаву.

З рисунка очевидно, що горизонтальна (Західно-Східна) складова цієї швидкості буде середнім арифметичним між швидкостями V_1 і V_2 : $V_{3\text{гор}}=(V_1+V_2)/2=30$ км/год, а вертикальну складову можна визначити із заданого модуля швидкості V_3 : $V_{3\text{верт}}^2=(V_3)^2-(V_{3\text{гор}})^2$, $V_{3\text{верт}}=16$ км/год.

Швидкість 3-го пароплава відносно 1-го визначається як $V_{\text{відн}}^2=(V_1-V_{3\text{гор}})^2+(V_{3\text{верт}})^2$, $V_{\text{відн}} \approx 18,87$ км/год.

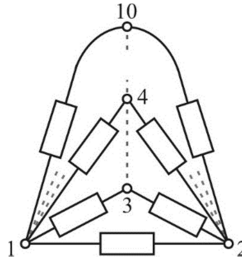
8 клас теортур.

№3

Припустимо, що учень з'єднав усі пари клем одну з одною (приєднав усі $10 \cdot 9/2 = 45$ резисторів). Визначимо опір такого кола між двома клемми 1 і 2. Тоді всі резистори можна розділити на групи:

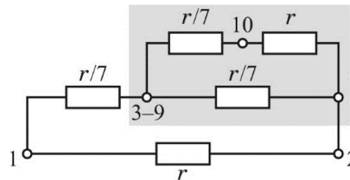
- Перша група — один резистор з'єднує клемми 1 і 2.
- Друга група — 16 резисторів з'єднують клемми 1 і 2 з рештою клем.
- Третя група — 28 резисторів ($8 \cdot 7/2 = 28$) з'єднують решту 8 клем одну з одною.

На рисунку показано лише перший резистор і частину резисторів другої групи. Резистори ж третьої групи з'єднують клемми 3, 4, ..., 8 — середини ділянок з двох резисторів, приєднаних між клемми 1 і 2. Отже, напруга між цими клемми дорівнює нулю. Тому по резисторах третьої групи струм не тече. Еквівалентна схема у цьому випадку містить 9 паралельних ділянок: одну опором r і 8 — опором $2r$. Отже, загальний опір кола $R_0 = r/5 = 9$ Ом.



Подивимося тепер, як змінюється опір через відсутність *одного* з резисторів.

- Якщо це резистор третьої групи, то опір взагалі не зміниться..
- Якщо відсутній резистор між клемми 1 і 2, то опір кола становить $r/4 = 11,25$ Ом. Збільшення опорів є таким, що буде помічено майстром Розглянемо окремо випадок, коли відсутній резистор другої групи. Оскільки всі ці резистори відіграють однакову роль у колі, видалимо резистор між клемми 1 і 10. Сила струму в резисторах, що з'єднують одну з одною клемми 3 — 9, залишається рівною нулю. А от у резисторах третьої групи, що з'єднують клему 10 з клемми 3 — 9, з'явиться струм. Відповідно зміниться еквівалентна схема кола. Сім клем (від третьої по дев'яту) можна подумки об'єднати та розглядати як один вузол кола (3–9). Між цим вузлом і клемою 1 — сім паралельно з'єднаних однакових резисторів, які можна замінити одним з опором $r/7$. Аналогічна ситуація з опором між вузлом 3–9 і клемою 2, а також з опором між вузлом 3–9 і клемою 10 (див. рисунок).



Опір ділянки кола, яку виділено на рисунку сірим кольором, дорівнює $8r/63$. Опір цієї ділянки з послідовно приєднаним резистором $r/7$ дорівнює $17r/63$. Отже, загальний опір кола в цьому випадку становить $17r/80$, тобто приблизно 9,56 Ом. Таку зміну опорів майстер помітить.

Отже, якщо буде видалено навіть один з резисторів першої або другої групи, зміна опорів перевищить 0,2 Ом. Подальше видалення резисторів може тільки збільшувати опір кола. Тому шукана максимальна кількість — 28 резисторів.

Задача 4

Треугольник, вырезанный из однородного оргстекла, при первом взвешивании подвесили за две вершины (рис.1а), а при втором взвешивании – за три вершины (рис.1б). В первом случае левый динамометр показал силу 9 Н, а правый – 12 Н. Чему равны показания каждого из трех динамометров при втором взвешивании?

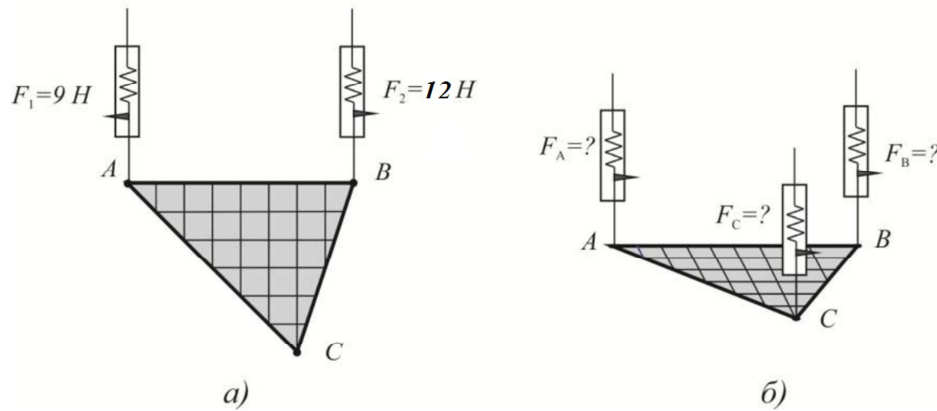


Рис. 1.

Решение.

1) По результатам первого взвешивания находим вес треугольника, он равен – $P = mg = F_1 + F_2 = 21 \text{ Н}$.

2) Если все три динамометра прикреплены к вершинам треугольника, то их показания будут одинаковы (доказательство смотри ниже) и равны $F_A = F_B = F_C = \frac{1}{3} \cdot (F_1 + F_2) = 7 \text{ Н}$.

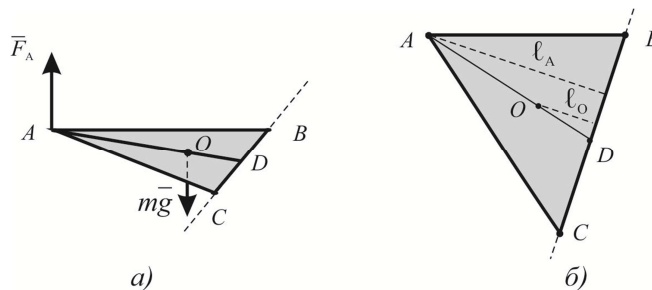


Рис. 2.

Доказательство. Рассмотрим треугольник массы m , подвешенный за три вершины (рис. 2, а). Чтобы найти показания динамометра, прикрепленного к вершине А (силу F_A) проведем мысленно через две другие вершины ось BC . Относительно этой оси треугольник вращают две силы: сила F_A , приложенная к вершине А, и сила тяжести mg , приложенная к центру масс треугольника. Как известно, центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, а сами медианы делятся этой точкой на части в отношении 1: 2. Поэтому $AO = 3OD$ и $\ell_A = 3\ell_O$ (рис. 2, б). Учитывая этот факт из второго условия равновесия (условия моментов)

$$F_A \ell_A = mg \ell_O,$$

получаем $F_A = mg \cdot \ell_O / \ell_A = \frac{mg}{3}$, чтд.

Ответ: во втором взвешивании показания всех динамометров одинаковы и составляют 1/3 веса треугольника, т.е. 7 Н.

8 клас теортур № 5. На початку березня 2017 р. німецький кінооператор опублікував на YouTube ролик, на якому гвинтокрил злітає з майже нерухомим гвинтом. За 3 дні ролик переглянули більше мільйона разів. Після цього автор пояснив, що знімав відео на мобільний телефон з частотою 30 кадрів на секунду. Оцініть, якою насправді могла бути частота обертів гвинта. Визначте, у скільки разів швидкість підйому гвинтокрила менша за швидкість руху кінчиків гвинта. Врахуйте, що швидкості будь-яких частин гвинтокрила не перевищують швидкості звуку (340 м/с). Для відповіді на питання можна скористатися вимірювальною лінійкою і кадрами підйому гвинтокрила. Кадри наведені з інтервалом у 2 с. При перегляді відео гвинт за 6 с дійсно ледь повертається (приблизно на кут 30°).



Розв’язання. За умовою зйомка велася з частотою 30 кадрів на секунду. Гвинт має 5 лопатей, які утворюють між собою кути по $360^\circ/5=72^\circ$. Для того, щоб гвинт здавався нерухомим, необхідно, щоб за час $1/30$ с гвинт повернувся на кут 72° , або $2 \cdot 72^\circ$, або $3 \cdot 72^\circ \dots$ У загальному випадку $n \cdot 72^\circ$, де n – натуральне число. Це відповідає $n/5$ обертів за $1/30$ с, або $6n$ обертів за секунду. Тобто, найменша ($n = 1$) частота обертання гвинта – це 6 обертів за секунду або 360 за хвилину. Наступне можливе значення ($n = 2$) – це 12 обертів за секунду або 720 за хвилину. Визначимо для яких n швидкість кінчика гвинта не перевищує швидкості звуку. Для цього необхідно оцінити довжину лопаті. Її можна порівняти з висотою кабіни гвинтокрила, вздовж якої видно декілька прямокутних ілюмінаторів. Отже, цей гвинтокрил не з самих маленьких для однієї-двох осіб. Його висоту від дна до кріплення гвинта можна оцінити у 3-4 метри. На збільшеному кадрі №1 ми бачимо, що довжина лопаті щонайменше у 2 рази перевищує висоту (див. рис. 1). Візьмемо довжину лопаті $R = 7$ м. Тоді швидкість кінчика лопаті
$$v = \frac{6n \cdot 2\pi R}{1 \text{ с}} \approx 264n \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$
 Як

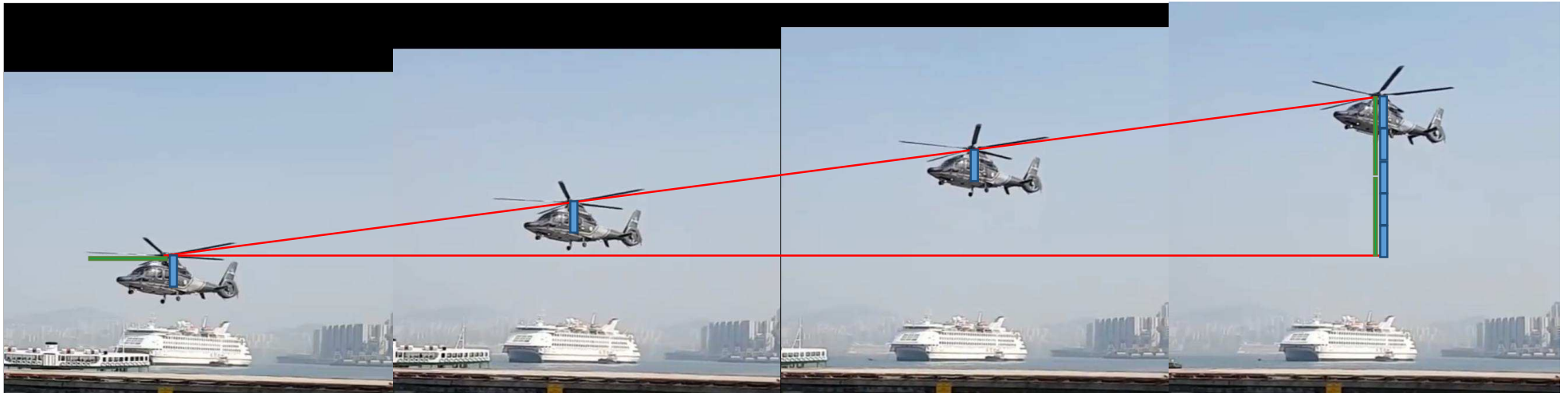
бачимо, підходить тільки $n = 1$. Швидкість кінчика лопаті $v \approx 264 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вже для $n = 2$ швидкість кінчика лопаті більш ніж у 1,5 рази перевищить швидкість звуку, що призведе до небажаних ефектів.



Рис. 1

Оцінимо тепер швидкість підйому. Згідно з наведеними кадрами (див. рис. 2), гвинтокрил рівномірно піднімається вгору і за $t=6$ с проходить приблизно 5 своїх висот. Але краще і точніше порівняти висоту підйому гвинтокрила безпосередньо з довжиною його лопаті. Як видно з рис. 2 (вузькі прямокутники), за 6 с підйому у висоту підйому вміщується приблизно дві лопаті: $h = 2R$. Отже, швидкість гвинтокрила $u = \frac{h}{t} = \frac{2R}{t}$, а швидкість кінчика лопаті $v = \frac{6 \cdot 2\pi R}{1 \text{ с}}$. Їх відношення $\frac{v}{u} = 36\pi \approx 113$.

Зазначимо, що відповіді на поставлені питання (частота обертів гвинта 360 об/хв і відношення швидкостей $\frac{v}{u} = 36\pi \approx 113$) не залежать від того, з якою точністю ми оцінили висоту кабіни. Оцінка знадобилась тільки для того, щоб обмежити кількість відповідей.



При бажанні, отримані результати можна трохи уточнити, якщо врахувати додатковий кут 30° за 6 с, тобто $1^\circ/6$ за $1/30$ с. Тоді в залежності від напрямку обертання гвинта можливі два кути повороту за $1/30$ с. Це $(72-1/6)^\circ$ і $(72+1/6)^\circ$. Відносна похибка, якої ми припустилися, взявши кут 72° , всього 0,23%. Це значно менше, ніж інші наші похибки, пов'язані з вимірюваннями і особливостями зйомки.