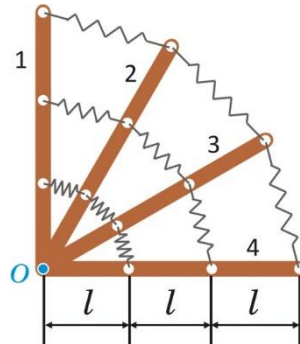


Однакові стрижні 1–4, що лежать на горизонтальній поверхні, можуть обертатися навколо вертикальної осі O . Довжина стрижнів $3l$. Стрижні з'єднують, як показано на рисунку, дев'ятьма однаковими пружинами, а після цього відпускають. Довжина кожної пружини в недеформованому стані дорівнює l . Визначте сумарну довжину всіх пружин у положенні рівноваги. Тертя в системі дуже мале. Вважайте, що пружини можуть змінювати свою довжину, але не можуть вигинатися.



Розв'язання

На малюнку зображено систему у початковому стані коли її утримують зовнішні сили. Коли її відпускають вона переходить у рівноважне положення(кути між стрижнями можуть змінитися).

Розглянемо спочатку умову рівноваги стрижня 1 або 4: очевидно, сума моментів трьох сил пружності, що діють на нього відносно осі O має дорівнювати нулю. Плечі цих сил відносяться як $1 : 2 : 3$ (зазначимо, що в загальному випадку вони не дорівнюють $l, 2l, 3l$). Позначимо ці плечі сил $d, 2d, 3d$; позначимо також довжину найкоротшої пружини (найближчої до осі) у положенні рівноваги через x , а жорсткість пружин через k . Тоді з подібності трикутників, утворених сусідніми стрижнями та пружинами між ними, випливає, що довжина решти пружин $2x$ і $3x$. Очевидно, що найкоротша пружина стиснута ($x < l$), а найдовша пружина розтягнена ($3x > l$). Умову рівноваги можна записати у вигляді: $k(x - l) \cdot d + k(2x - l) \cdot 2d + k(3x - l) \cdot 3d = 0$. Звідси знаходимо $x = \frac{3}{7}l$.

Позначимо також довжину найкоротшої пружини (найближчої до осі) між стрижнями 2 та 3 у положенні рівноваги через x_1 , а відповідні плечі як d_1 . З умови рівноваги стрижня 2 або стрижня 3 легко побачити, що довжини пружин між стрижнями 2 і 3 такі самі, як і між стрижнями 1 і 2:

$$-k(x - l) \cdot d - k(2x - l) \cdot 2d - k(3x - l) \cdot 3d + k(x_1 - l) \cdot d_1 + k(2x_1 - l) \cdot 2d_1 + k(3x_1 - l) \cdot 3d_1 = 0$$

$$\text{Звідси знаходимо } x_1 = \frac{3}{7}l$$

$$\text{Отже, сумарна довжина всіх пружин у стані рівноваги дорівнює } 3 \cdot (x + 2x + 3x) = 18 \cdot \frac{3}{7}l = \frac{54}{7}l.$$

Зазначимо, що значення x та x_1 можна було знайти і з інших міркувань: це значення відповідає мінімуму сумарної потенціальної енергії деформованих пружин. Для всіх пружин в системі, враховуючи симетрію це

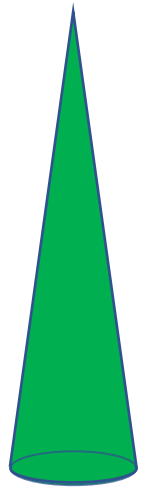
$$W = 2 \cdot \left(\frac{k(x - l)^2}{2} + \frac{k(2x - l)^2}{2} + \frac{k(3x - l)^2}{2} \right) + \frac{k(x_1 - l)^2}{2} + \frac{k(2x_1 - l)^2}{2} + \frac{k(3x_1 - l)^2}{2} =$$

$$= k(14x^2 - 12lx + 3l^2) + \frac{k}{2}(14x_1^2 - 12lx_1 + 3l^2).$$

Вирази у дужках можна записати у вигляді $14\left(x - \frac{3}{7}l\right)^2 + \frac{3}{7}l^2$ та $14\left(x_1 - \frac{3}{7}l\right)^2 + \frac{3}{7}l^2$, тобто виділити повні квадрати. Цей вираз дійсно має мінімальне значення, коли $x = x_1 = \frac{3}{7}l$.

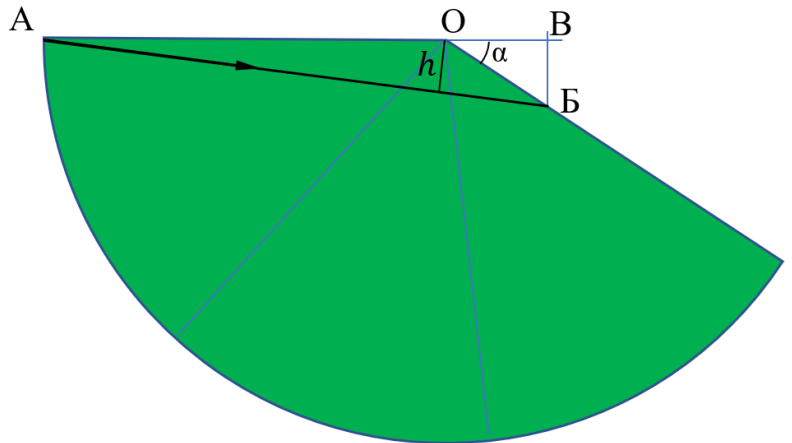
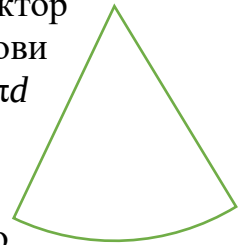
8 клас Задача 2

«Шоу дронів» Передноворічні свята запланували відзначити шоу дронів з утвореною лазерними променями конічною ялинкою. Поверхня «ялинки» має вигляд конуса діаметром основи $d = 50$ м і довжиною твірної (від найнижчої точки поверхні ялинки до вершини) $l = 180$ м. За сценарієм дрони, рівномірно розміщені вздовж основи «ялинки», мають стартувати з землі і зробивши рівно три оберти у конусі світла «ялинки» у фіналі зависнути на $2/3$ її висоти. Особлива умова: рух дронів має бути таким, щоб увесь маневр зайняв мінімально можливий час. Визначте, за який найменший час вони зроблять маневр, якщо рухатимуться зі швидкістю 9 м/с.



Штучний інтелект, що керує дронами, розраховує таку траєкторію для одного дрона і завантажує всім іншим дронам. Вам, як експерту, слід визначити максимальну кількість дронів, яку можна безпечно використати для цього шоу. Зона безпечної відстані між центрами сусідніх дронів не менше одного метра.

Розв'язання. Якщо розгорнути конус ялинки ми отримаємо сектор кола, радіус якого l , а довжина дуги є довжиною кола основи «ялинки» - πd . Повне коло радіуса l має 360° , тому дузі πd відповідає кут $360^\circ \times \pi d / 2\pi l = 50^\circ$ при вершині. Для трьох обертів маємо кут 150° . Розгортка конусу зображена на рисунку, де точка старту дрона позначена буквою А, а точка фінішу точкою Б. Найкоротша відстань між ними – це відрізок АБ. Відстань АО дорівнює $l = 180$ м, а відстань АБ, яку має подолати дрон, знайдемо з прямокутного трикутника АВБ. Кут $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, тому катет ВБ дорівнює 30 м, оскільки лежить навпроти кута 30° малого трикутника з гіпотенузою $OB = \frac{1}{3} l = 60$ м. За теоремою Піфагора або через тригонометричні функції знаходимо і другий катет трикутника ОВБ: $OB = 30\sqrt{3}$ м.



Незвичним у русі дронів є те, що задовільняючи умові найменшого часу, дрони мають піднятися вище остаточної мети маневру, наблизившись до вершини на деяку відстань h (висота, проведена з точки О до лінії АБ у трикутнику АОБ), яка менша за остаточної відстань ОВ (див. Рис.). Саме це є «вузьким місцем», яке й визначатиме максимальну кількість дронів. З подібності трикутників

знаходимо, що $\frac{h}{AO} = \frac{VB}{AB}$,

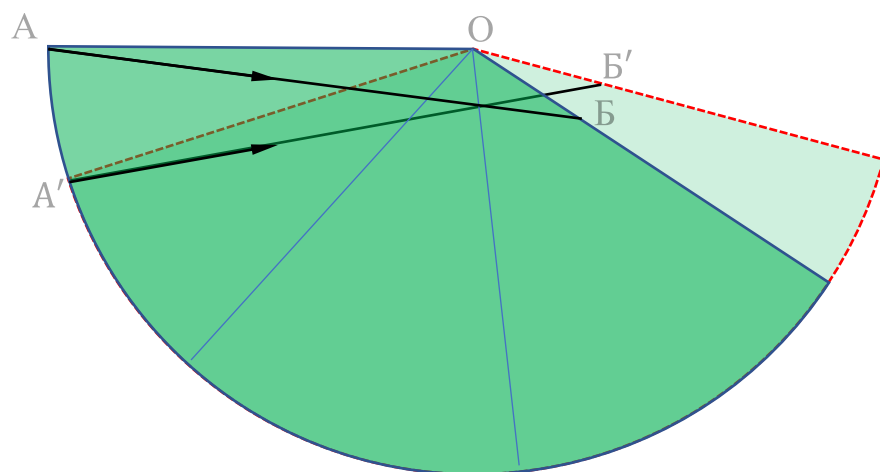
Звідки $h = \frac{AO \cdot VB}{AB} = \frac{180 \cdot 30}{AB}$ м. Шлях АБ, який пролетить дрон

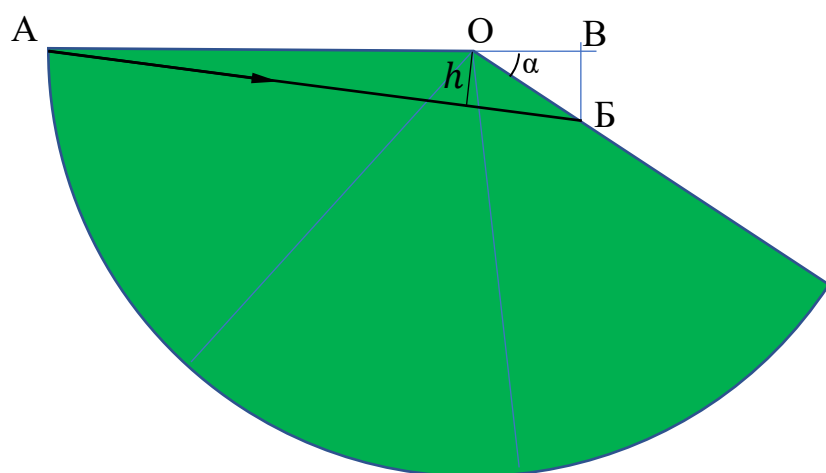
$$AB = \sqrt{(AO + OB)^2 + (BB)^2} = \sqrt{(180 + 30\sqrt{3})^2 + (30)^2} = 60\sqrt{10 + 3\sqrt{3}} \approx 234 \text{ м.}$$

Тоді час маневру

$$t = \frac{AB}{v} \approx \frac{234}{9} \text{ с} = 26 \text{ с.}$$

Відстань найвищого й найкомпактнішого положення дронів $h \approx \frac{180 \cdot 30}{234} \text{ м} \approx 23 \text{ м}$. З подібності конусів знаходимо, що довжина кола, на якому мають розташовуватись дрони $s = \pi \frac{50 \cdot 23}{180} \text{ м} \approx 20 \text{ м}$. Оскільки вздовж цього кола мають рухатись дрони, відстань між якими не може перевищувати 1 м, максимальна кількість дронів буде або 20, або 19. Наш випадок потребує більш точного розрахунку, тому ще раз обчислимо довжину кола без проміжних округлень $s = \frac{25\pi}{\sqrt{10+3\sqrt{3}}} \text{ м} \approx 20,1476 \text{ м}$. Дещо більше 20 м. Припустимо, що дрони утворюють правильний 20-ти кутник зі стороною 1 м. Тепер слід розрахувати відстань від центру до вершини такого 20-ти кутника зі стороною 1 м і порівняти з радіусом кола 3,207 м, довжина якого s ми тільки що розрахували. Ця відстань 3,196 м менша ніж 3,207 м. Отже, **20 дронів** вписуються навіть з невеликим запасом. Якби ми не проаналізували рух дронів, а просто б узяли кінцеве коло на 2/3 висоти конуса, яке втричі менше кола основи, його діаметр був би 50/3 м, а довжина дорівнювала б 52,6 м. Замовлення 52 дронів привело б до більших фінансових витрат, а їх запуск привів би до зіткнення.





8 клас Задача №3

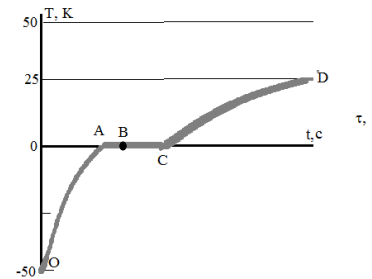
Посудину з льодом при температурі -50°C занесли в приміщення, де температура повітря підтримується постійною і дорівнює 50°C . Через 30 хвилин $1/3$ льоду розтанула.

1. Знайдіть час, що пройде з цього моменту до моменту, коли посудина із вмістом нагріється до температури 25°C .
2. Побудуйте схематичний графік залежності температури в посудині від часу.

Вважаєте, що в будь-який момент часу виконується формула $P = k(T_{\text{нав}} - T_{\text{тіла}})$, де P - кількість теплоти, переданої тілу від навколишнього середовища в одиницю часу, $T_{\text{нав}}$ - температура навколишнього середовища, $T_{\text{тіла}}$ - температура самого тіла. k - розмірний коефіцієнт, який не залежить від часу або вмісту посудини. Теплоємністю посудини можна знехтувати. Питома теплоємність льоду дорівнює $c_{\text{л}} = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}$, води - $c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^{\circ}\text{C}}$. Питома теплота плавлення льоду дорівнює $330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Розв'язання.

Нагрівання посудини йде за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем. При цьому кількість теплоти, що передається в одиницю часу залежить від різниці поточної температури посудини і температури навколишнього середовища. Тому вона постійно змінюється в процесі нагрівання і залишається незмінною при правленні льоду. Тому схематично графік зміни температури в часі представлено на рис.



Дану задачу можна вирішити декількома способами.

Перший спосіб.

1. По-перше, помічаємо, що нагрівання льоду відбувається так, що початкова різниця температур посудини і навколишнього середовища $(T_{\text{нав}} - T_{\text{поч}}) = (50 - (-50)) = 100^{\circ}\text{C}$ в **два рази** більша за кінцеву $(T_{\text{нав}} - T_{\text{плав}}) = (50 - 0) = 50^{\circ}\text{C}$. По-друге, при нагрівання води початкова різниця температур посудини з водою і навколишнього середовища $(T_{\text{нав}} - T_{\text{поч}}) = (50 - 0) = 50^{\circ}\text{C}$ в **два рази** більша за кінцеву $(T_{\text{нав}} - T_{\text{кін}}) = (50 - 25) = 25^{\circ}\text{C}$.

Для нагрівання в кожний момент часу справедливе рівняння теплового балансу:

$$mc_{\text{л}}\Delta T' = k(T_{\text{навк}} - T)\Delta t'. \quad mc_{\text{в}}\Delta T = k(T_{\text{навк}} - T)\Delta t.$$

2. Якщо результат нагрівання льоду і води в відносних величинах однаковий, то це можливе лише у випадку, коли $\frac{k\Delta t'}{mc_{\text{л}}} = \frac{k\Delta t}{mc_{\text{в}}}$ і сумарно за весь час нагрівання $\frac{\Delta t'}{2} = \frac{\Delta t}{1}$.
3. Також відмічаємо, що теплоємності води та льоду відрізняються також в два рази: $c_{\text{в}} = 2c_{\text{л}}$.
4. Тоді сумарний час нагріву льоду в два рази менший за час нагрівання води для вказаних в умовах задачі температур. $(t_{\text{OA}} \cdot 2 = t_{\text{CD}})$ В інших випадках така подібність може не спостерігатися.
5. Розглянемо процес танення льоду. Тут вже не потрібно розділяти час на окремі проміжки, адже у кожен момент часу різниця температур однакова. Маса льоду у другому випадку (після початку нового відліку часу) в два рази більша, а отже і часу на це піде в два рази більше. Або $t_{\text{AB}} \cdot 2 = t_{\text{BC}}$.
6. Тобто часу на нагрів води пішло вдвічі більше ніж на нагрів льоду. Більше того, на танення $2/3$ льоду пішло теж вдвічі більше часу. Звідси стає зрозуміло, що час першого етапу $t_{\text{OA}} + t_{\text{AB}} = 30$ хв, а час другого $t_{\text{BC}} + t_{\text{CD}} = 2(t_{\text{AB}} + t_{\text{OA}}) = 2 \cdot 30 = 60$ хв = 1 година.

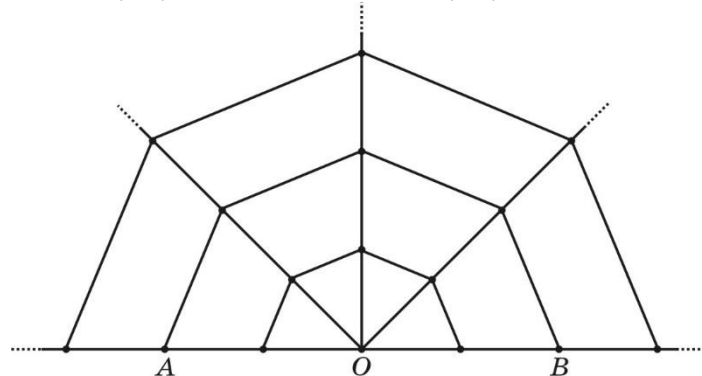
Відповідь: 1 година.

Другий спосіб. Наближений пошук тривалості кожної стадії.

1. Весь процес нагрівання посудини можна розділити на 4 стадії. 1 етап: нагрівання льоду до температури плавлення (OA) та плавлення третини льоду (AB). За умовою сумарний час 1 етапу дорівнює 30 хв. 2 етап: плавлення $2/3$ частини льоду і нагрівання води до вказаної температури. Цей час необхідно знайти.
2. Нерівномірність зміни температури спонукає спробувати наближено розрахувати тривалості стадій. Найбільш простий спосіб – взяти на стадії нагрівання середній потужність нагрівання, а саме $P_1 = k(T_{\text{нав}} - (T_{\text{поч}} + T_{\text{плав}})/2) = k(50 - \frac{-50+0}{2}) = k \cdot 75$. Тоді Час нагрівання льоду визначається $P_1 \cdot t_{\text{OA}} = mc_{\text{л}}(T_{\text{плав}} - T_{\text{поч}})$. Звідси $t_{\text{OA}} = m/k \cdot 2/3 \cdot 2100 = m/k \cdot 1400$.

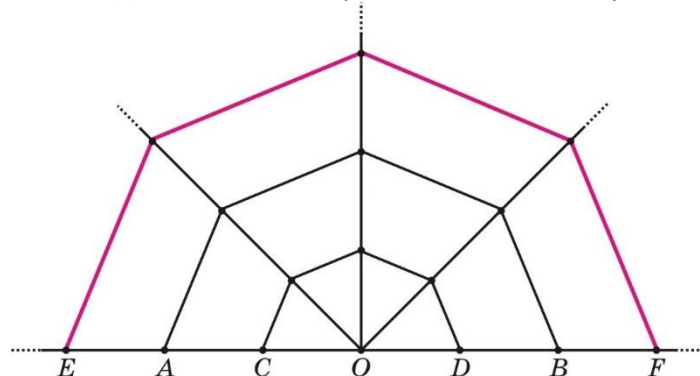
3. Час плавлення третини льоду визначається $k(T_{\text{наг}} - T_{\text{плав}}) \cdot t_{\text{AB}} = \lambda m/3$. Звідси $t_{\text{AB}} = m/k \cdot 110 \cdot 10^3/50 = m/k \cdot 2200$. Отже, для 1 етапу $t_{\text{OA}} + t_{\text{AB}} = m/k \cdot 3600 = 30 \text{ хв} = 1800 \text{ с}$.
4. Звідси: $m/k = 1/2 \text{ кг} \cdot \text{К}/\text{Дж}$. Повертаючись $t_{\text{AB}} = 1100 \text{ с} = 110/6 \text{ хв}$.
5. Час плавлення 2/3 льоду $t_{\text{BC}} = 2t_{\text{AB}} = 220/6 \text{ хв} = 110/3 \text{ хв}$.
На стадії нагрівання води теж вибираємо середню потужність нагрівання, а саме $P_2 = k(T_{\text{наг}} - (T_{\text{плав}} + T_{\text{кінц}})/2) = k(50 - \frac{0+25}{2}) = k \cdot 37,5$. Тоді час нагрівання води визначається $P_2 \cdot t_{\text{CD}} = m c_{\text{в}} (T_{\text{кінц}} - T_{\text{плав}})$. Звідси $t_{\text{CD}} = m/k \cdot 25/37,5 \cdot 4200 = 1400 \text{ с} = 140/6 \text{ хв} = 70/3 \text{ хв}$.
6. Таким чином шуканий час є $t_{\text{BC}} + t_{\text{CD}} = 110/3 + 70/3 = 60 \text{ хв}$.
Такий же розв'язок можна отримати і якщо припустити лінійну швидкість зміни температури при нагрівання. Однак, це припущення не відповідає фізиці процесу.

8 клас Задача 4. Юні дослідники знайшли павутиння досі невідомого павука. Павутиння містило дуже багато концентричних «кіл». Проте недосвідчені дослідники змогли акуратно вирізати тільки трохи більше ніж половину павутиння (див. рисунок), а також окремі «нитки». Було встановлено дивні факти: «нитки» виявилися електропровідними, при цьому електричний опір кожної з них $r = 10 \text{ Ом}$ (хоч довжина «ниток» різна). Четверо дослідників і дослідниць виміряли електричний опір R павутиння між точками A і B , кожний своїм приладом. Їхні результати: у Галини $R = 6 \pm 2 \text{ (Ом)}$, у Ігоря $R = 13 \pm 5 \text{ (Ом)}$, у Катерини $R = 19 \pm 1 \text{ (Ом)}$, у Дмитра $R = 7 \pm 1 \text{ (Ом)}$. Хто з дослідників може мати рацію?

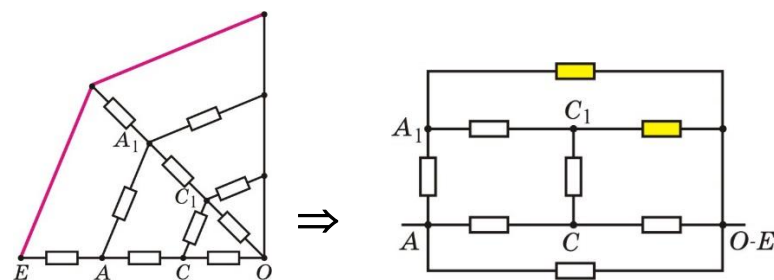


Розв'язання

Спробуємо оцінити верхню та нижню межі можливих значень R . Перш за все помітимо, що всі вузли кола на одній вертикалі з вузлом O з міркувань симетрії мають однакові потенціали, тому їх можна об'єднати, видаливши проміжні «нитки» кола. Цей об'єднаний вузол ділитиме коло на дві симетричні частини, опір кожної з яких $R/2$. Далі виділимо «червоне півколо» між вузлами E, F (див. рисунок).



1. Якщо зменшити опір червоних ниток до нуля, то загальний опір половини кола теж зменшиться від $R/2$ до $R_{\min}/2$. Зазначимо, що в цьому випадку фактично випадає вся закорочена зовнішня частина кола, а потенціал вузла E збігається з потенціалом вузла O . Зобразимо схему лівої половини кола та відповідну еквівалентну схему.



На еквівалентній схемі жовтим зафарбовані резистори з опором $r/2$, усі інші резистори мають опір r .

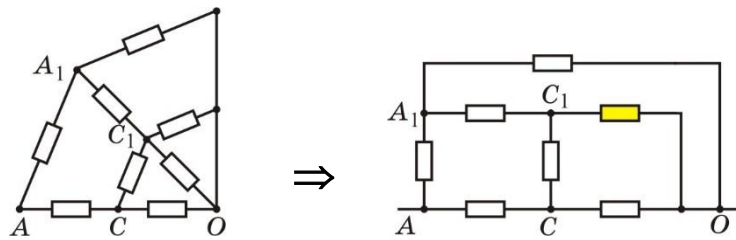
Нехай потенціал точки O дорівнює нулю, точки ж A, A_1, C_1, C мають відповідно потенціали $U, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Тоді легко виразити силу струму в будь-якому резисторі через ці потенціали. Далі застосуємо перше правило Кірхгофа (або, простіше кажучи, наслідок із закону збереження заряду) для кожного з вузлів A_1, C_1, C : алгебраїчна сума сил струмів, що втікають у даний вузол, має дорівнювати нулю. Це приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{U - \varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} - \frac{2\varphi_1}{r} = 0, \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r} - \frac{2\varphi_2}{r} = 0, \\ \frac{U - \varphi_3}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r} - \frac{\varphi_3}{r} = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо $\varphi_1 = \frac{12}{41}U$, $\varphi_2 = \frac{7}{41}U$, $\varphi_3 = \frac{16}{41}U$.

Загальна сила струму, що протікає між вузлами A та O — E , становить $I = \frac{95U}{41r}$. Отже, $R_{\min} = \frac{2U}{I} = \frac{82}{95}r \approx 8,63$ Ом. Зрозуміло, що справжнє значення R є більшим.

2. Якщо збільшити опір червоних ниток та всіх відповідних зовнішніх ниток у багато разів (формально — до нескінченності), то загальний опір половини кола теж збільшиться від $R/2$ до $R_{\max}/2$. У цьому випадку зовнішня частина кола фактично теж випадає. Зобразимо схему лівої половини кола та відповідну еквівалентну схему.



Зберігаючи зазначені вище позначення потенціалів точок та знов застосовуючи перше правило Кірхгофа, дістаємо систему

$$\begin{cases} \frac{U - \varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} - \frac{\varphi_1}{r} = 0, \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r} - \frac{2\varphi_2}{r} = 0, \\ \frac{U - \varphi_3}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r} - \frac{\varphi_3}{r} = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо $\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{2}{5}U$, $\varphi_2 = \frac{1}{5}U$.

Загальна сила струму, що протікає між вузлами A та O , становить $I = \frac{6U}{5r}$. Отже, $R_{\max} = \frac{5}{3}r \approx 16,7$ Ом.

Підсумуємо отримані результати: $R = 13 \pm 4$ (Ом). Безумовно, можна отримати й більш точну оцінку, але це потребує досить громіздких розрахунків і в даному випадку не потрібно. Порівняння показує, що результати вимірювань, що виконав Ігор (опір між 8 і 18 Ом) є єдино правильними, хоч і поступаються за точністю отриманим вище результатам.

Додаток. Покажемо, що за певної спостережливості значення $R_{\max}$ можна отримати й дещо простіше. А саме: співвідношення $\varphi_1 = \varphi_3$ не є випадковим збігом, це наслідок певної симетрії кола. Щоб переконатися в цьому можна інакше зобразити еквівалентну схему:

