

Задача №1

Розв'язання.

Розглянемо спочатку умову рівноваги стрижня 1: очевидно, сума моментів трьох сил пружності пружин має дорівнювати нулю. Плечі цих сил відносяться як 1 : 2 : 3 (зазначимо, що в загальному випадку вони не дорівнюють $l, 2l, 3l$). Позначимо ці плечі сил $d, 2d, 3d$; позначимо також довжину найкоротшої пружини (найближчої до осі O) через x , а жорсткість пружин через k . Тоді з подібності трикутників, утворених сусідніми стрижнями та пружинами між ними, випливає, що довжина решти пружин буде відповідно $2x$ і $3x$. Очевидно, що найкоротша пружина стиснута ($x < l$), а найдовша пружина розтягнена ($3x > l$).

Умову рівноваги можна записати у вигляді:

$$k(x - l) \cdot d + k(2x - l) \cdot 2d + k(3x - l) \cdot 3d = 0.$$

Звідси знаходимо $x = \frac{3}{7}l$.

Стрижні утворюють кут α , то з рівнобедреного трикутника зі сторонами l, l і $\frac{3}{7}l$ отримуємо співвідношення

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{14},$$

звідки

$$\alpha = 24,75^\circ.$$

Кут між стрижнями 3 і 4 буде такий самий.

З умови рівноваги стрижня 2 або стрижня 3 легко побачити, що кут між стрижнями 2 і 3 теж дорівнює α .

Отже, кут між стрижнями 1 і 4 дорівнює

$$3\alpha,$$

тобто

$$74,2^\circ.$$

Зазначимо, що значення x можна було знайти і з інших міркувань:

воно відповідає мінімуму сумарної потенціальної енергії деформованих пружин.

Для трьох пружин це

$$W = \frac{k(x-l)^2}{2} + \frac{k(2x-l)^2}{2} + \frac{k(3x-l)^2}{2} = \frac{k}{2} (14x^2 - 12lx + 3l^2).$$

Вираз у дужках можна записати у вигляді $14\left(x - \frac{3}{7}l\right)^2 + \frac{3}{7}l^2$, тобто виділити повний квадрат.

Цей вираз має мінімальне значення, коли

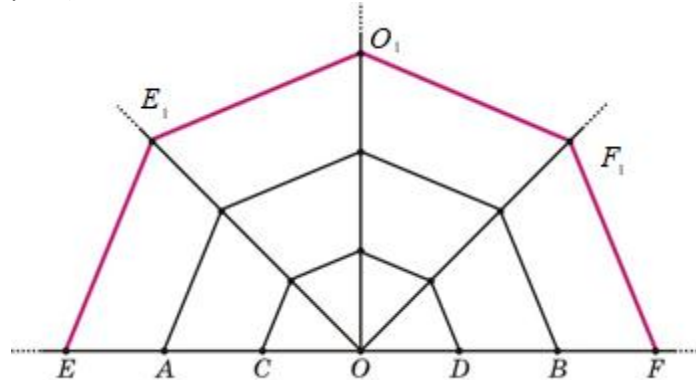
$$x = \frac{3}{7}l.$$

Мінімальне значення енергії також можна знайти як абсцису вершини параболи

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{7}l.$$

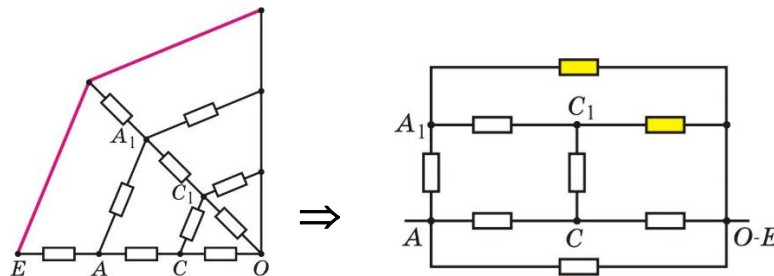
Розв'язання.

Спробуємо оцінити верхню та нижню межі можливих значень R . Перш за все помітимо, що всі вузли кола на одній вертикалі з вузлом O з міркувань симетрії мають однакові потенціали, тому їх можна об'єднати, видаливши проміжні «нитки» кола. Цей об'єднаний вузол ділитиме коло на дві симетричні частини, опір кожної з яких $R/2$. Далі виділимо «червоне півколо» $EE_1, E_1O_1, O_1F_1, F_1F$ між вузлами E, F (див. рисунок).



1. Якщо зменшити опір «ниток» $EE_1, E_1O_1, O_1F_1, F_1F$ до нуля, то загальний опір половини кола теж зменшиться від $R/2$ до $R_{\min}/2$. Зазначимо, що в цьому випадку фактично випадає вся закорочена зовнішня частина кола, а потенціал вузла E збігається з потенціалом вузла O .

Зобразимо схему лівої половини кола та відповідну еквівалентну схему. E_1



На еквівалентній схемі жовтим зафарбовані резистори з опором $r/2$, усі інші резистори мають опір r .

Нехай потенціал точки O дорівнює нулю, точки ж A, A_1, C_1, C мають відповідно потенціали $U, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Тоді легко виразити силу струму в будь-якому резисторі через ці потенціали.

Для кожного з вузлів A_1, C_1, C : алгебраїчна сума сил струмів має дорівнювати нулю. Це приводить до системи рівнянь

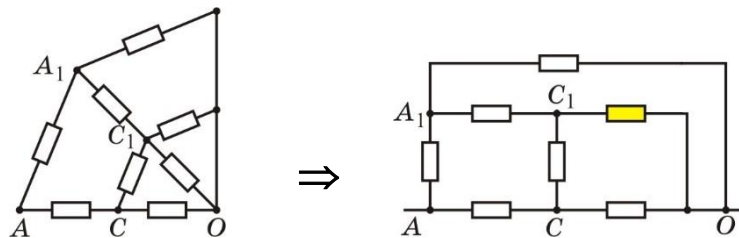
$$\begin{cases} \frac{U - \varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} - \frac{2\varphi_1}{r} = 0, \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r} - \frac{2\varphi_2}{r} = 0, \\ \frac{U - \varphi_3}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r} - \frac{\varphi_3}{r} = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо

$$\varphi_1 = \frac{12}{41}U, \varphi_2 = \frac{7}{41}U, \varphi_3 = \frac{16}{41}U.$$

Загальна сила струму, що протікає між вузлами A та $O - E$, становить $I = \frac{95U}{41r}$. Отже, $R_{\min} = \frac{2U}{I} = \frac{82}{95}r \approx 8,63$ Ом. Зрозуміло, що справжнє значення R є більшим.

2. Якщо збільшити опір «ниток» $EE_1, E_1O_1, O_1F_1, F_1F$ та всіх відповідних зовнішніх ниток у багато разів (формально — до нескінченності), то загальний опір половини кола теж збільшиться від $R/2$ до $R_{\max}/2$. У цьому випадку зовнішня частина кола фактично теж випадає. Зобразимо схему лівої половини кола та відповідну еквівалентну схему.



Зберігаючи зазначені вище позначення потенціалів точок та враховуючи, що алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю, отримуємо систему

$$\begin{cases} \frac{U - \varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} - \frac{\varphi_1}{r} = 0, \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r} - \frac{2\varphi_2}{r} = 0, \\ \frac{U - \varphi_3}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r} - \frac{\varphi_3}{r} = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{2}{5}U, \varphi_2 = \frac{1}{5}U.$$

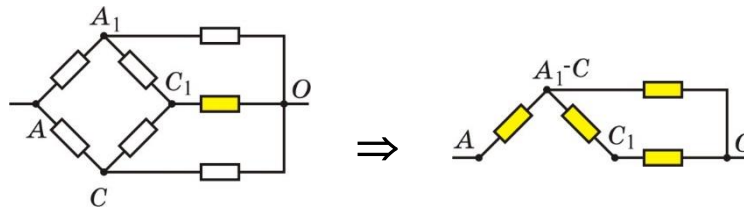
Загальна сила струму, що протікає між вузлами A та O , становить $I = \frac{6U}{5r}$. Отже, $R_{\max} = \frac{5}{3}r \approx 16,67 \text{ Ом}$.

Підсумуємо отримані результати:

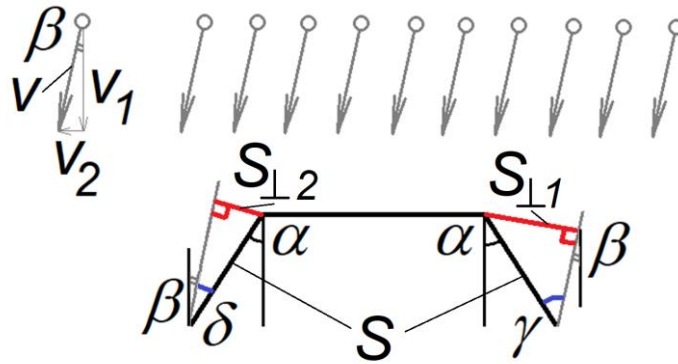
$$R = 12,65 \pm 4,02 \text{ (Ом)}.$$

Безумовно, можна отримати й більш точну оцінку, але це потребує досить громіздких розрахунків і в даному випадку не потрібно. Порівняння показує, що відповідь Ігоря (опір між 7 і 17 Ом) є єдиною правильною, хоч і поступається за точністю отриманим вище результатам.

Додаток. Покажемо, що за певної спостережливості значення $R_{\max}$ можна отримати й дещо простіше. А саме: співвідношення $\varphi_1 = \varphi_3$ не є випадковим збігом, це наслідок певної симетрії кола. Щоб переконатися в цьому можна інакше зобразити еквівалентну схему:



Розв'язання.



Перейдемо до системи відліку, пов'язаної з автомобілем. У цій системі краплі набувають горизонтальної компоненти швидкості v_2 і, відповідно, падають під кутом

$$\beta = \arctg \frac{v_2}{v_1}$$

до нормалі (див. рис.) зі швидкістю

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

На переднє скло потрапляють усі краплі, що проходять через поверхню $S_{\perp 1} = S \sin \gamma$, перпендикулярну до швидкості крапель, на заднє – краплі, що проходять через поверхню $S_{\perp 2} = S \sin \delta$ (див. рис.). Також можна проектувати відносну швидкість крапель на напрямок перпендикулярний до площини скла: $v_{\perp} = v \sin \gamma$ – для переднього скла; $v_{\perp} = v \sin \delta$ для заднього скла. Наступні розрахунки однакові для обох випадків.

Густина потоку крапель – nv , тому за одиницю часу на переднє скло впаде $N_1 = nvS \sin \gamma$ крапель, а на заднє – відповідно $N_{12} = nvS \sin \delta$.

Остання формула справедлива лише за умови $\beta < \alpha$ (див. рис.). В протилежному випадку краплі не потраплятимуть на заднє скло, і $N_2 = 0$.

З рисунку видно, що $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \alpha - \beta$. Таким чином,

$$N_1 = nvS \sin(\alpha + \beta) = nvS(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = nS(v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha);$$

$$N_2 = \begin{cases} nS(v_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha); & v_1 \sin \alpha \geq v_2 \cos \alpha; \\ 0; & v_1 \sin \alpha < v_2 \cos \alpha. \end{cases}$$

При $v_2 = 0$ маємо $N_1 = N_2 = nv_1 S \sin \alpha$, тобто на переднє й заднє скло падає однакова кількість крапель, як і має бути, виходячи з симетричної форми автомобіля (рис. 1).

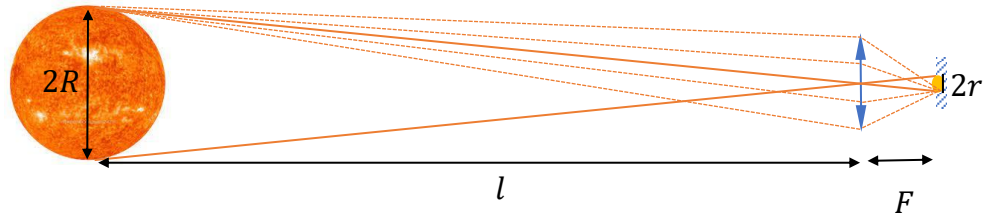
При $v_2 \gg v_1$: $N_2 = 0$, $N_1 = nv_2 S \cos \alpha$: автомобіль їде настільки швидко, що сприймає краплі дощу як нерухомі предмети.

При $\alpha = 0$: $N_2 = 0$, $N_1 = nv_2 S \cos \alpha$. Якби автомобіль не рухався, краплі взагалі не потрапляли б на скло.

При $\alpha = 90^\circ$: $N_1 = N_2 = nv_1 S$. Обидва скла розташовані горизонтально, тому рух автомобіля не впливає на кількість крапель, які на них падають.

Розв'язання.

А) Оскільки Сонце дуже далеко, його зображення буде знаходитись практично у фокальній



площині лінзи на відстані F від її оптичного центру. З подібності трикутників, бічні сторони яких утворені променями від діаметрально протилежних точок сонячного диску, що проходять через оптичний центр, маємо:

$$\frac{2R}{l} = \frac{2r}{F}.$$

Звідси легко знайти радіус зображення Сонця r . Потік сонячної енергії, який проходить крізь лінзу площею $\pi d^2/4$, концентрується на площі πr^2 . Для того, щоб він збільшився у 100 разів, у таку ж кількість разів мають відрізнятись площі, тобто:

$$\frac{\pi d^2/4}{\pi r^2} = 100.$$

Звідси відношення діаметру лінзи d до радіусу r яскравої плями сонячного зображення

$$\frac{d}{r} = \frac{dl}{FR} = 20.$$

Отже

$$\frac{F}{d} = \frac{l}{20R} \approx 10,7 \approx 11.$$

Б) Якщо геометричні розміри лінзи зменшити у 10 разів, у стільки ж разів зменшаться її діаметр і її фокусна відстань, отже отримане мінімальне значення відношення $\frac{F}{d}$ залишиться без змін. Те, що фокусна відстань F зменшиться у 10 разів можна довести з подібності трикутників для променя, який падає на лінзу паралельно до її оптичної осі поблизу її края, а потім проходить через фокус. Заломлюючий кут лінзи на її лівому краю при пропорційному зменшенні розмірів залишиться без змін, отже і промінь світла така зменшена лінза відхилить на такий самий кут. Оскільки відстань від точки заломлення до головної оптичної осі зменшиться у 10 разів, то такий промінь перетне оптичну вісь у 10 разів ближче до центру лінзи. Отже, фокусна відстань зменшиться у 10 разів (відповідно, оптична сила у 10 разів збільшиться), а з нею у 10 разів радіус зменшиться радіус яскравої плями сонячного зображення, але не концентрація сонячних променів.

В) Якщо у досліді з дзеркалами відстань до корабля збільшити у 10 разів, то за рахунок того, що промені від діаметрально протилежних частин сонячного диску приходять під кутом (див. рис.), відбиті промені під таким кутом розходяться, і сонячна пляма збільшуватиметься у розмірах, а з нею концентрація енергії на мішені ставатиме меншою. 70 дзеркал вже не вистачить, щоб запалили просмолений фанерний макет корабля.