

11 клас Задача 1

1. «На повідку»

З початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонтальної поверхні запустили незаряджене металеве масивне тіло, розмірами та формою якого можна знехтувати. Вслід тілу з точки запуску витягується тонкий металевий дріт, масою якого та силою натягу також можна знехтувати. Знайдіть залежність електричного потенціалу тіла $\varphi(t)$, вважаючи потенціал у точці запуску нульовим. Складова магнітного поля Землі, перпендикулярна до площини, в якій лежить траєкторія тіла, дорівнює B . Прискорення вільного падіння g . У який момент часу та за якого кута α електричний потенціал тіла набуває максимального значення?

Розв'язання.

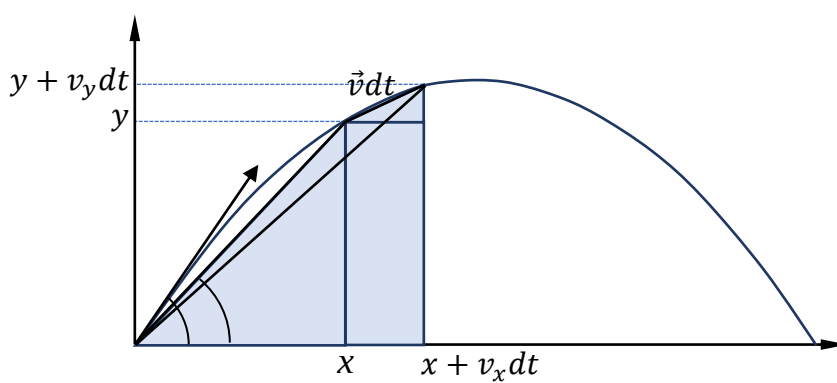
Оскільки розмірами та формою тіла можна знехтувати, то його електрична ємність дорівнює нулю, отже його заряд нульовий за будь-якого потенціалу. Тому силою Лоренца нехтуємо. З тих самих міркувань відсутня сила опору повітря. Єдина сила, що діє на тіло – сила тяжіння.

Рівняння руху тіла під дією сили тяжіння, кинутого під кутом до горизонту, визначаються другим законом Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g}$ і початковими умовами, з чого знаходимо положення тіла у будь-який момент часу у площині руху:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t, \\ y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

де x – горизонтальна, а y – вертикальна координати.

Дріт рухається, перетинаючи лінії магнітної індукції. На його кінцях наводиться різниця потенціалів. Найбільш просто її розрахувати за допомогою формули для ЕРС індукції: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}$, де B – складова магнітного поля, перпендикулярна площі, в якій рухається тіло, а dS – площа, яку «замітає» дріт за малий час dt . Цю площу можна знайти, наприклад, як площу трикутника, що опирається на відрізок vdt (дивись різницю площі зафарбованих фігур на рисунку).



Незалежно від напрямку магнітного поля модуль потенціалу у точці знаходження тіла буде:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}B(yv_x - xv_y) = \frac{1}{4}Bv_{0x}gt^2.$$

Максимального значення φ набуде за максимального значення t , тобто наприкінці польоту у момент часу $t = \frac{2v_{0y}}{g}$:

$$\varphi_{max} = \frac{Bv_{0x}v_{0y}^2}{g} = \frac{Bv_0^3}{g}\cos\alpha\sin^2\alpha = \frac{Bv_0^3}{g}(\cos\alpha - \cos^3\alpha).$$

Взявши похідну, знаходимо, що найбільше значення потенціалу буде перед самим падінням, коли

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

тобто, коли тіло кинуть під кутом $\alpha \approx 35,3^\circ$ до горизонту. $\varphi_{max} = \frac{2Bv_0^3}{3\sqrt{3}g}$.

При відповіді на питання ми нехтували силою натягу дроту, хоча і вважали дріт весь час прямим, а отже трішечки натягнутим.

Задача. У густому тумані, що складається з завислих у повітрі краплинок води радіусу r_0 з концентрацією n , на висоті H над поверхнею землі випадково утворилася крапля води більшого розміру і почала падати вниз без початкової швидкості.

1. Коли крапля зіштовхується з краплинками туману, вони можуть або пружно розсіятися на ній, або злитися з нею. Фізично обґрунтуйте, який із цих варіантів реалізується. Чи зміниться відповідь, якщо замість краплі води в тумані падатиме крапля олії?
2. Знайдіть залежність радіуса краплі від пройденого нею шляху.
3. Знайдіть прискорення краплі, якщо відомо, що воно постійне.
4. Чи зміниться температура краплини у процесі падіння? Якщо так, то наскільки?

Вважайте, що краплі туману мають нехтовно малі швидкості, початковий розмір краплі нехтовно малий у порівнянні з кінцевим, крапля в процесі падіння зберігає кулясту форму. Всі фізичні характеристики води відомі. Опором повітря знехтувати.

Автори задачі: С.Й. Вільчинський, О.О. Соболев

Розв'язання.

1. Нехай крапля води радіусом R зіштовхується з краплинкою радіусом r_0 . Вони можуть або розсіятися одна на одній, або злитися в одну. Покажемо, що більш енергетично вигідно злитися в одну краплю. До зіткнення їх сумарна поверхнева енергія дорівнює

$$E_{\text{пов1}} = 4\pi\sigma(R^2 + r_0^2). \quad (1)$$

Якщо вони зіллються, то радіус краплини, що вийде в результаті цього, можна визначити з умови збереження об'єму води:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\pi R'^3 \Rightarrow R' = (R^3 + r_0^3)^{1/3}. \quad (2)$$

Вважаючи радіус краплі набагато більшим за радіус крапельки туману, розкладемо отриманий вираз за наближеною формулою $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, при $x \ll 1$, і отримаємо наближено

$$R' = R \left(1 + \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{1/3} \approx R + \frac{r_0^3}{3R^2}. \quad (3)$$

Порахуємо поверхневу енергію такої краплі:

$$E_{\text{пов2}} = 4\pi\sigma R'^2 \approx 4\pi\sigma \left(R^2 + \frac{2r_0^3}{3R}\right). \quad (4)$$

Оскільки $r_0 \ll R$, то $E_{\text{пов2}} - E_{\text{пов1}} = 4\pi\sigma r_0^2 \left(\frac{2r_0}{3R} - 1\right) < 0$. Отже, енергетично вигідно зливатися в одну краплю.

Довести енергетичну вигідність процесу можна і без ніяких наближень стосовно розміру крапель. Для цього достатньо довести, що $(R^3 + r_0^3)^{2/3} < R^2 + r_0^2$. Піднесемо обидві сторони рівності до куба і віднімемо від правої частини ліву:

$$\begin{aligned} (R^3 + r_0^3)^2 - (R^2 + r_0^2)^3 &= R^2 r_0^2 (2Rr_0 - 3R^2 - 3r_0^2) = \\ &= -R^2 r_0^2 [(R - r_0)^2 + 2R^2 + 2r_0^2] < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Що і вимагалось довести.

Таким чином, у процесі свого руху крапля «замітає» на своєму шляху краплинки туману, які зливаються з нею і при цьому її розмір росте (див. п. 2). Оскільки злиття – це абсолютно непружне зіткнення, то по-перше, крапля відчуває опір рухові (див. п. 3), а по-друге, в результаті таких зіткнень частина енергії перетворюється в тепло (також в тепло

перетворюється зайва поверхнева енергія, що вивільняється при злитті), а тому температура краплі зростатиме (див. п. 4).

Якщо замість краплі води в тумані падатиме крапля олії, то краплинки туману будуть пружно відбиватися від неї. Це пов'язано з тим, що вода та олія не змішуються і вода не змочує поверхню олії. Тому вони не сполучаються в одну краплю, а постійно існують як дві різні речовини з межею розділу між ними. При цьому площа поверхні цієї межі розділу також має свою поверхневу енергію (раніше, коли зливалися дві краплі води, молекули на межі розділу крапель опинялися в товщі води, а тому в поверхневу енергію внеску не давали). Таким чином, кінцева поверхнева енергія є сумою поверхневих енергій кожної з крапель, навіть якщо вони дотикаються між собою. У такому разі кожна з крапель має прийняти форму з найменшою можливою площею поверхні (при фіксованому об'ємі), тобто кулі. Висновок: для крапель олії і води енергетично вигідно після зіткнення залишитися кулястими, тобто пружно розсіятися і повернутися у вихідний стан.

(2) Нехай в деякий момент часу крапля пройшла шлях h і має радіус R . Пройшовши після цього ще малу відстань Δh , вона «заметє» об'єм $\pi R^2 \Delta h$. Усі краплинки туману в цьому об'ємі зіллються з нею, тому матимемо наступне рівняння

$$\frac{4}{3}\pi(R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4\pi R^2 \Delta R = n \cdot \pi R^2 \Delta h \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3, \quad (6)$$

де n – концентрація краплин туману в повітрі. Звідси знайдемо зв'язок між нескінченно малою зміною радіусу і пройденим шляхом

$$\Delta R = \frac{\pi r_0^3 n}{3} \Delta h. \quad (7)$$

Оскільки коефіцієнт пропорційності між ними – це стала величина, то таке ж співвідношення існує і між скінченними величинами. Нехтуючи початковим радіусом краплі, отримаємо

$$R = \frac{\pi r_0^3 n}{3} h = \frac{n V_0}{4} h, \quad (8)$$

де h – пройдений краплею шлях від початку падіння, $V_0 = 4\pi r_0^3/3$ – об'єм краплини туману.

3. Між краплею і краплинками туману відбуваються абсолютно непружні зіткнення. Краплинки туману, які були майже нерухомі, захоплюються краплею і набувають її швидкості. При цьому сама крапля відчуває опір. Опишемо цей процес за допомогою другого закону Ньютона в імпульсній формі. Єдина зовнішня сила, що діє на систему крапля+туман, – це сила тяжіння. Нехай у деякий момент часу крапля має швидкість v , масу m . Тоді за нескінченно малий проміжок часу Δt відбудеться така зміна імпульсу системи:

$$mg\Delta t = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv. \quad (9)$$

Тут Δm – це маса краплин туману, заметених краплею за час Δt . Вона дорівнює

$$\Delta m = \pi R^2 v \Delta t \cdot n \cdot \rho V_0, \quad (10)$$

де ρ – густина води. Підставимо (10) в (9) і залишимо там лише малі величини не старші першого порядку. Матимемо

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho (g\Delta t - \Delta v) = \pi R^2 v \Delta t \cdot n \cdot \rho V_0 \cdot v. \quad (11)$$

За умовою, прискорення краплі $a = \Delta v / \Delta t = \text{const}$. Поділимо рівняння (11) на Δt і врахуємо рівняння (8). Отримаємо

$$v^2 = \frac{gh}{3} \left(1 - \frac{a}{g}\right). \quad (12)$$

З іншої сторони, для рівноприскореного руху без початкової швидкості маємо співвідношення

$$v^2 = 2ah. \quad (13)$$

Прирівнюючи (12) і (13), отримаємо

$$a = \frac{g}{7}, \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{7}}. \quad (14)$$

3.1

При падінні краплини зі швидкістю V за малий проміжок часу маса краплини збільшується через зіткнення із краплинками туману на

$$dm = V dt \pi r^2 \rho_T. \quad (1)$$

Залежність маси краплі від радіуса:

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho, \quad (2)$$

де ρ – густина води.

Тоді, з (2) зміна маси пов'язана із зміною радіуса наступним чином:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (3)$$

Зміщення краплини за невеликий проміжок часу (вісь x спрямована до Землі):

$$dx = V dt = \dot{x} dt. \quad (4)$$

Об'єднуючи (1), (3) та (4) отримуємо:

$$dx = \frac{4\rho}{\rho_T} dr. \quad (5)$$

Інтегруючи (5) отримуємо:

$$x = \frac{4\rho}{\rho_T} r,$$

звідки

$$r = x \frac{\rho_T}{4\rho}. \quad (6)$$

Запишемо основне рівняння динаміки для цього випадку:

$$m\vec{g} - k\pi r^2 V \vec{V} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad (7)$$

або проектуючи на вісь x , що спрямована до Землі:

$$mg - k\pi r^2 \dot{x}^2 = \dot{x} \frac{dm}{dt} + m\ddot{x}. \quad (8)$$

Підставляючи в (8) рівняння (2), (3) та (6), отримуємо:

$$\frac{4}{3}\pi \left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right)^3 \rho g - k\pi \left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right)^2 \dot{x}^2 = \rho_T \pi \left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right)^2 \dot{x}^2 + \frac{4}{3}\pi \left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right)^3 \rho \ddot{x}.$$

Після скорочення:

$$\frac{4}{3}\left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right) \rho g - k\dot{x}^2 = \rho_T \dot{x}^2 + \frac{4}{3}\left(x \frac{\rho_T}{4\rho}\right) \rho \ddot{x} \quad (9)$$

Підставимо в (9) вираз $x = Ct^n$ з умови задачі:

$$\frac{4}{3}\left(Ct^n \frac{\rho_T}{4\rho}\right) \rho g - kC^2 n^2 t^{2(n-1)} = \rho_T C^2 n^2 t^{2(n-1)} + \frac{4}{3}\left(Ct^n \frac{\rho_T}{4\rho}\right) \rho C n(n-1) t^{n-2}.$$

Звідси очевидно, що дана формула буде вірною для будь-яких моментів часу лише якщо

$$n = 2.$$

Тоді, в результаті, отримуємо рівняння

$$\frac{\rho_T}{3} g - 4kC = 4\rho_T C + \frac{2}{3}\rho_T C,$$

звідки

$$C = g \frac{\rho_T}{12k + 14\rho_T}.$$

Для випадку відсутності сили опору ($k=0$) отримуємо закон руху краплини:

$$x = \frac{g}{14} t^2,$$

що відповідає рівноприскореному руху з прискоренням $\frac{g}{7}$, що є добре відомим результатом для подібних задач.

(4) У процесі непружних зіткнень механічна енергія не зберігається, а частина її перетворюється в тепло. Також змінюється поверхнева енергія краплинок туману. За увесь час свого падіння крапля збере всі краплинки туману, що розміщені в конусі висотою H і з радіусом основи, що дорівнює кінцевому радіусу краплі $R_k = V_0 n H / 4$. Баланс енергії виглядає наступним чином: у початковий момент часу маємо конус з крапельок туману (сумарна маса дорівнює кінцевій масі краплі), що має потенціальну енергію в полі тяжіння і поверхневу енергію кожної краплі, кінетичною енергією їх хаотичного руху нехтуємо; в кінцевий момент маємо потенціальну енергію в полі тяжіння, що дорівнює нулю, поверхневу енергію краплі як цілої та кінетичну енергію. Різниця між цими величинами і дасть кількість теплоти, що виділяється під час падіння:

$$Q = m_k g H_c + \frac{m_k}{\rho V_0} \sigma \cdot 4\pi r_0^2 - \left(\frac{m_k v_k^2}{2} + \sigma \cdot 4\pi R_k^2 \right), \quad (15)$$

де $m_k = 4\pi R_k^3 \rho / 3$ – кінцева маса краплі, $v_k = \sqrt{2gH/7}$ – її кінцева швидкість, H_c – висота центру мас конуса над поверхнею землі, σ – коефіцієнт поверхневого натягу води. Виявляється, що поверхнева енергія краплі в кінці в R_k/r_0 разів менша за поверхневу енергію всіх крапельок туману, які вона поглинула, тому нею можна знехтувати. Зрештою, кількість теплоти, що виділилася, дорівнює

$$Q = m_k \left[g \left(H_c - \frac{H}{7} \right) + \frac{3\sigma}{\rho r_0} \right]. \quad (16)$$

Нехай деяка частина η цієї енергії йде на нагрівання, тому крапля нагріється на

$$\Delta T = \frac{\eta Q}{cm_k} = \frac{\eta g}{c} \left(H_c - \frac{H}{7} \right) + \frac{3\eta\sigma}{c\rho r_0}. \quad (17)$$

Враховуючи, що відстань від основи до центру мас конуса $H_c = H/4$ (це можна отримати шляхом безпосереднього інтегрування), остаточно отримаємо

$$\Delta T = \frac{3\eta g}{2c} \left(\frac{H}{14} + \frac{2\sigma}{\rho g r_0} \right). \quad (17^*)$$

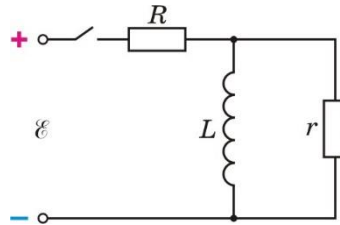
Другий доданок чисельно дорівнює висоті підняття води в капілярі, що дорівнює радіусу крапельки туману. Оскільки характерний розмір крапельки туману становить порядку 10 мкм, то ця висота підняття є величиною порядку 1,5 метра (для води $\sigma = 73$ мН/м). А тому цей внесок є дуже важливим, якщо крапля падає з висоти порядку 10-20 метрів. Але ефект такого нагрівання дуже слабкий. Зокрема, при падінні з 10 метрів і за умови, що все тепло йде на нагрівання краплі ($\eta = 1$), отримаємо $\Delta T \approx 0,008$ К.

Відповідь: (1) Енергетично вигідно, щоб краплини туману зливалися з краплею при зіткненні. Для краплі олії більш вигідне пружне розсіяння. (2) Радіус краплі зростає з пройденим шляхом за законом $R = \frac{\pi r_0^3 n}{3} h$.

(3) Прискорення краплі $a = g/7$. (4) Крапля нагріється на $\Delta T = \frac{3\eta g}{2c} \left(\frac{H}{14} + \frac{2\sigma}{\rho g r_0} \right)$.

11 клас 3 задача.

У показаному на рисунку колі котушку з індуктивністю L та джерело постійного струму з електрорушійною силою E можна вважати ідеальними. **1.** Визначте, який заряд протече через резистор опором r після замикання ключа та яка кількість теплоти виділиться в цьому резисторі. **2.** Після встановлення струму в колі всередину котушки швидко ввели осердя, внаслідок чого її індуктивність збільшилася вдвічі. Знов визначте, який заряд протече через резистор r та яка кількість теплоти виділиться в ньому.



Розв'язання

1. Струм протікає по резисторі r тільки під час перехідного процесу після замикання ключа. Після завершення цього процесу, коли сила струму в усіх ділянках кола перестане змінюватися, весь струм протікатиме через котушку (ідеальна котушка не має «омічного опору»).

Під час перехідного процесу сила струму i_L зростає від нуля до максимального значення E/R ; сила струму i_r , навпаки, зменшується від максимального значення $E/(R+r)$ до нуля. У будь-який момент сила струму в резисторі R дорівнює $i_L + i_r$.

Спосіб 1. Напруга на котушці дорівнює $L \frac{di_L}{dt}$, тому $ri_r = L \frac{di_L}{dt}$. Звідси $ri_r dt = r dq_r = L di_L$ і легко знайти повний електричний заряд, що протікає через резистор r : $q_r = \frac{L \Delta i_L}{r} = \frac{L}{r} \left(\frac{E}{R} - 0 \right) = \frac{LE}{rR}$.

Кількість теплоти, що виділяється за малий проміжок часу dt в резисторі r , становить $dQ_r = ri_r^2 dt = Li_r di_L$. Оскільки сума напруг на обох резисторах дорівнює ЕРС джерела струму, тобто $ri_r + R(i_r + i_L) = E$, маємо $i_r = \frac{E - Ri_L}{R+r}$. Отже,

$$Q_r = \int_0^{E/R} L \frac{E - Ri_L}{R+r} di_L = \frac{L}{R+r} \left(Ei_L - \frac{Ri_L^2}{2} \right) \Big|_0^{E/R} = \frac{LE^2}{2R(R+r)}.$$

Цікаво, що за малих значень r кількість теплоти як раз дорівнює максимальній енергії магнітного поля котушки (хоч на перший погляд може здатися, що в цьому випадку $Q_r \rightarrow 0$).

Спосіб 2 (для любителів диференціальних рівнянь).

Зі співвідношень $ri_r = L \frac{di_L}{dt}$ і $ri_r + R(i_r + i_L) = E$ можна виключити i_r , отримавши диференціальне рівняння для i_L :

$$L \frac{R+r}{r} \cdot \frac{di_L}{dt} + Ri_L = E.$$

Розв'язавши це лінійне диференціальне рівняння, отримаємо

$i_L = \frac{E}{R} (1 - \exp(-\alpha t))$. Тут $\alpha = \frac{Rr}{L(R+r)}$, коефіцієнт перед експонентою знайдено з умови, що початкове значення i_L дорівнює нулю.

Щоб отримати залежність $i_r(t)$, знаходимо похідну від $i_L(t)$:

$$i_r = \frac{E}{R+r} \exp(-\alpha t).$$

Тепер уже можна стандартним чином знайти значення q_r, Q_r :

$$q_r = \int_0^\infty i_r dt, Q_r = \int_0^\infty ri_r^2 dt.$$

Отримаємо, зрозуміло, такі самі значення, як і способом 1.

2. Відразу зауважимо, що поширена думка про «неможливість» дуже швидкої («миттєвої») зміни сили струму в котушці є неправильною. Насправді неможливою є «миттєва» зміна *магнітного потоку* Φ . Досить згадати, що відповідно до закону електромагнітної індукції ЕРС самоіндукції за модулем як раз дорівнює швидкості зміни магнітного потоку. Таким чином, після введення осердя незмінним залишається саме магнітний потік $\Phi = LI$; сила струму в котушці «миттєво» зменшується вдвічі, до $\frac{E}{2R}$. Далі ж усе відбуватиметься аналогічно процесам, описаним у пункті 1, тому:

$$q_{r2} = \frac{L \Delta i_{L2}}{r} = \frac{L}{r} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{2R} \right) = \frac{LE}{2rR},$$

$$Q_{r2} = \int_{E/(2R)}^{E/R} L \frac{E - Ri_L}{R+r} di_L = \frac{L}{R+r} \left(Ei_L - \frac{Ri_L^2}{2} \right) \Big|_{E/(2R)}^{E/R} = \frac{LE^2}{8R(R+r)}.$$

11 клас Задача 4

«Склад ядра». У 1930 р. український фізик-теоретик Дмитро Іваненко у спільній роботі з армянським астрофізиком Віктором Амбарцумяном довів, що ядро атому не може складатися лише з протонів та електронів, як тоді вважалося, а через два роки, відразу після відкриття нейтрону, Дмитро Іваненко запропонував протонно-нейтронну модель ядра і став автором фундаментального положення сучасної ядерної фізики. Виходячи зі старої гіпотези, що ядра усіх атомів складаються тільки з протонів та електронів,

- перевірте можливість стабільного існування вже відомої в ті часи альфа-частинки (ядра атома ${}^4_2\text{He}$).
- Доведіть, що відкритий англійським фізиком Джеймсом Чедвіком нейтрон має бути нестабільним.
- Розгляньте розпад нерухомого нейтрону на протон і електрон і визначить швидкості, які б мали ці частинки після розльоту на велику відстань. В одному з розпадів швидкості протону й електрону виявилися на 10% меншими, ніж розраховані. Висунувши гіпотезу, що під час розпаду виникає нова частинка, нейтрино, оцініть її можливу масу. Маси електрона, протона, нейтрона і альфа-частинки дорівнюють $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1,672621924 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_n = 1,674927498 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_\alpha = 6,644657336 \cdot 10^{-27}$ кг. Швидкість світла у вакуумі 299 792 458 м/с.

Розв'язання.

1) Згідно старої гіпотези альфа-частинка ${}^4_2\text{He}$ мала складатися з чотирьох протонів і двох електронів. Порівняємо сумарну масу цих шести частинок з масою альфа-частинки $m_\alpha = 6,644657336 \cdot 10^{-27}$ кг:

$$4m_p + 2m_e = 6,692309572 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Отримана маса більша за масу альфа-частинки, отже її розпад на них потребує додаткових затрат енергії згідно з формулою Ейнштейна $E = \Delta mc^2$ і її самостійний розпад заборонений.

2) Маса нейтрона $m_n = 1,674927498 \cdot 10^{-27}$ кг більша за суму мас протона і електрона

$$m_p + m_e = 1,673532862 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Отже, нейтрону енергетично вигідно розпастися на протон і електрон. Навіть у припущенні, що в продуктах розпаду нейтрона присутній також фотон, не приводить до зміни висновку щодо стабільності нейтрона, адже фотон не має маси.

3) Енергія, яка виділяється, коли нейтрон розпадається лише на протон і електрон

$$E = \Delta mc^2 = (m_n - (m_p + m_e)) c^2 = 1,253436327 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$$

йде на кінетичні енергії частинок на великій відстані, коли потенціальною енергією їх взаємодії можна знехтувати. Запишемо закони збереження імпульсу і енергії:

$$0 = m_p v_p - m_e v_e,$$

$$E = \frac{m_p v_p^2}{2} + \frac{m_e v_e^2}{2}.$$

Виражаємо і знаходимо швидкості:

$$v_p = \sqrt{\frac{2E}{m_p + m_e} \frac{m_e}{m_p}} \approx 285624 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 286 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2E}{m_p + m_e} \frac{m_p}{m_e}} \approx 5,2445 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість електрона виявилася більшою за швидкість світла у вакуумі. Отриманий результат свідчить про те, що задачу слід розв'язувати за формулами теорії відносності.

Запишемо закони збереження імпульсу і енергії:

$$0 = \frac{m_p v_p}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} - \frac{m_e v_e}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}},$$

$$m_n c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}.$$

Маємо два рівняння з двома невідомими швидкостями. Розв'язуючи систему, знаходимо

$$v_e = c \frac{\sqrt{(m_n^2 - (m_p + m_e)^2)(m_n^2 - (m_p - m_e)^2)}}{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2} \approx 2,7537 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

або 0,9185 с і аналогічно

$$v_p \approx 379 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Як бачимо, навіть швидкість нерелятивістського протона суттєво змінилася з $286 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ при застосування нерелятивістських імпульсів та енергій до $379 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

4) Розглянемо тепер розпад нейтрона на протон, електрон і антинейтрино. Припустимо, що кут розльоту протона і електрона дорівнює α . Із закону збереження імпульсу маємо:

$$\vec{p}_\nu = -\vec{p}_p - \vec{p}_e.$$

Щоб позбутися векторів, підносимо останній вираз до квадрату:

$$p_\nu^2 = p_p^2 + p_e^2 - 2p_p p_e \cos \alpha.$$

З закону збереження енергії $m_n c^2 = E_p + E_e + E_\nu$ виражаємо енергію антинейтрино

$$E_\nu = m_n c^2 - E_p - E_e.$$

Знаючи імпульс p_ν і енергію E_ν частинки, можна знайти і її швидкість, і її масу:

$$m_\nu^2 c^4 = E_\nu^2 - p_\nu^2 c^2 = (m_n c^2 - E_p - E_e)^2 - p_p^2 c^2 - p_e^2 c^2 + 2p_p p_e c^2 \cos \alpha.$$

Як бачимо, в залежності від кута розльоту протона і електрона розрахована маса антинейтрино може бути різною. Найбільше значення маси відповідає $\cos \alpha = +1$. Підставляючи зменшені на 10 % значення швидкостей протона і електрона, отримуємо обмеження на масу антинейтрино:

$$m_\nu^2 c^4 \leq 1,20 \cdot 10^{-27} \text{ Дж}^2.$$

Отже, з даних задачі можна зробити висновок, що антинейтрино має масу меншу, ніж $3,86 \cdot 10^{-31}$ кг, що менше за масу електрона. Згідно даних задачі, антинейтрино може бути й безмасовим, як гамма-квант. Деякий час так і вважалося. Зокрема, автор задачі колись студентом на кафедрі теоретичної фізики вивчав теорію безмасових нейтрино та антинейтрино. Зараз встановлено, що нейтрино (антинейтрино) мають масу набагато меншу за масу електрона. На теперішній час відомі три типи нейтрино та їх античастинки. Порушення закону збереження енергії при бета-розпадах (про антинейтрино тоді ніхто нічого не знав), навіть спонукало Нільса Бора висловити припущення, що у мікросвіті закон збереження енергії може не виконуватись.