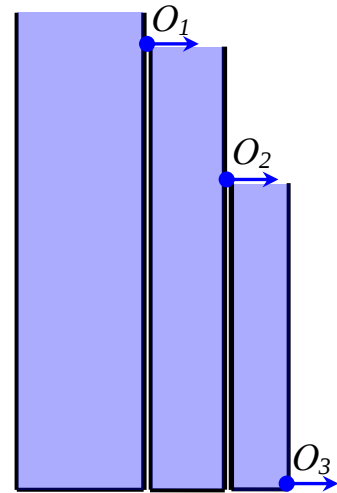


1. «Водоспад»

Три посудини, висоти яких дорівнюють 56 см, 52 см і 36 см, а площі відповідно рівні 36 см^2 , 9 см^2 і 4 см^2 , розташовані на столі так, як показано на рисунку. У всі посудини доверху налили воду, а потім у стінках посудин відкрили однакові маленькі отвори O_1 , O_2 і O_3 . При цьому струмінь води з першої посудини переливається в другу, а струмінь води з другої посудини переливається у третю. З отвору O_3 вода витікає на підлогу. **Знайдіть рівні води у другій і третій посудинах**, коли у першій посудині рівень зменшиться на 1 см. Внутрішнім тертям у воді знехтуйте.

Вказівка: відомо, що з маленького отвору, який знаходиться на глибині h у відкритій посудині з рідиною за відсутності тертя вона витікає зі швидкістю $v = \sqrt{2gh}$, де $g=10 \text{ Н/кг}$.



Розв'язання.

За умовою задачі, початкова висота води у першій посудині рівна $H_{01} = 56 \text{ см}$, у другій посудині — $H_{02} = 52 \text{ см}$, у третій посудині — $H_{03} = 36 \text{ см}$.

Відповідно, початкова висота води в першій посудині на рівні отвору O_1 $h_{01} = H_{01} - H_{02} = 4 \text{ см}$, у другій посудині на рівні отвору O_2 $h_{02} = H_{02} - H_{03} = 16 \text{ см}$, у третій посудині на рівні отвору O_3 $h_{03} = H_{03} = 36 \text{ см}$.

Початкові швидкості витікання води через відповідні отвори рівні $v_{01} = \sqrt{2gh_{01}} = 0,2\sqrt{2g}$,

$v_{02} = \sqrt{2gh_{02}} = 0,4\sqrt{2g}$, $v_{03} = \sqrt{2gh_{03}} = 0,6\sqrt{2g}$.

Відношення швидкостей витікання води з відповідних отворів в початковий момент часу $v_{01}:v_{02}:v_{03} = 1:2:3$.

Враховуючи те, що в другу посудину втікає вода зі швидкістю v_{01} , а витікає зі швидкістю $v_{02} = 2v_{01}$, результуюча швидкість витікання води з другої посудини $v_2 = v_{02} - v_{01} = v_{01} = v$

Аналогічно результуюча швидкість витікання води з третьої посудини $v_3 = v_{03} - v_{02} = v_{01} = v$

Отже, **результуючі швидкості витікання води у всіх посудинах однакова**. Відповідно за доволі малий інтервал часу Δt **зміна об'ємів води $\Delta V = vS_o\Delta t$ у всіх посудинах однакова**.

Тоді $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2$, звідки $\Delta h_2 = \frac{S_1\Delta h_1}{S_2} = 4\Delta h_1$ (1)

Аналогічно $S_1\Delta h_1 = S_3\Delta h_3$, звідки $\Delta h_3 = \frac{S_1\Delta h_1}{S_3} = 9\Delta h_1$ (2)

Із (1) і (2) випливає, що відношення змін висот $\Delta h_1:\Delta h_2:\Delta h_3 = 1:4:9$ є рівним відношенню початкових висот $h_{01}:h_{02}:h_{03} = 4:16:36$ стовпчиків води над рівнями отворів.

Це означає, що при витіканні води співвідношення між змінами висот будуть зберігатися весь час витікання і становлять $1:4:9$. Тому, коли у першій посудині висота зменшиться на 1 см, то у другій посудині зменшиться на 4 см, а у третій посудині — на 9 см.

Відповідно $H_2 = 52 \text{ см} - 4 \text{ см} = 48 \text{ см}$, $H_3 = 36 \text{ см} - 9 \text{ см} = 27 \text{ см}$.

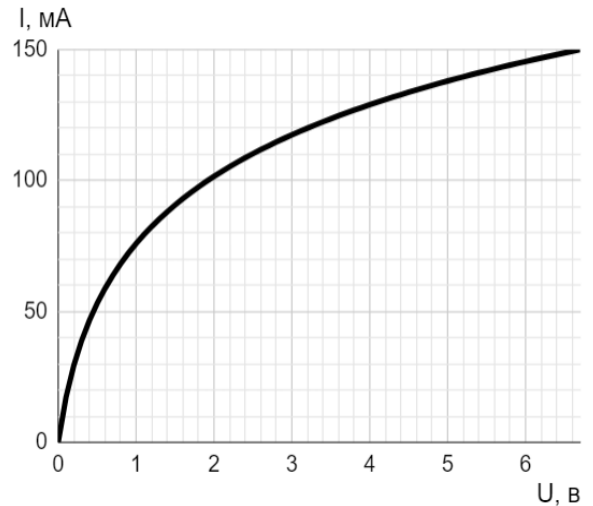
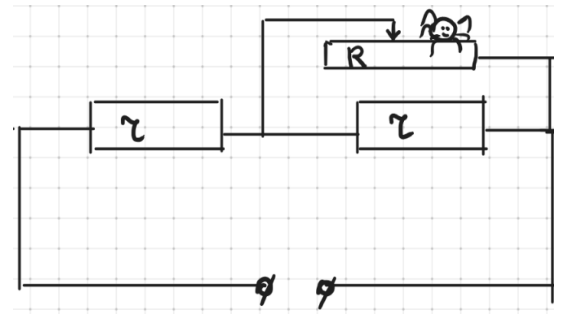
2. «Лабораторна комашка».

Невеличка комаха-мерзлячка повадилася відпочивати у фізичній лабораторії, гріючись на нагрітому електричним струмом реостаті (див. рисунок). Електрична напруга у колі $U_0 = 10$ В, опір $r = 10$ Ом. За тривалий час відпочинку, комаха штовхаючи лапками ковзний контакт, знайшла і зафіксувала таке його розташування, за якого та частина реостата, на якій вона відпочивала, видавала максимальну теплову потужність серед усіх інших можливих положень ковзного контакту.

А) **Розрахуйте** опір частини реостата, при якому на цій частині виділятиметься максимальна теплова потужність. Знайдіть цю максимальну потужність.

Б) Одного разу, повернувшись в лабораторію, комаха побачила поряд із своєю «півкою» лампочку! Її під'єднали замість резистора який був паралельним до реостата, а контакт реостата був на тому ж місці, де комаха його зафіксувала. Тепер комасі стало дуже «спекотно» від тепла від двох «печей»: реостата та лампи. **Розрахуйте сумарну теплову потужність** від них. Лампочка не є лінійним елементом, її вольт-амперна характеристика показана на малюнку.

Примітка. Потужність електричного струму: $P = U \cdot I$.



Розв'язання (спосіб 1).

А) Знайдемо теплову потужність, яка виділяється на реостаті, застосовуючи закон Джоуля-Ленца, Ома та формули паралельного та послідовного з'єднань.

$$I_0 = \frac{U_0}{r + \frac{rR}{r+R}}; \quad U_p = \frac{U_0}{r + \frac{rR}{r+R}} * \frac{rR}{r+R}$$

$$P_p = \frac{U_p^2}{R} = \frac{U_0^2 R}{(r + 2R)^2} = \frac{U_0^2}{\frac{r^2}{R} + 4r + 4R}$$

Зрозуміло, що ця потужність буде максимальною, коли знаменник цього дробу буде мінімальним (легко побачити, що знаменник має мінімальне значення).

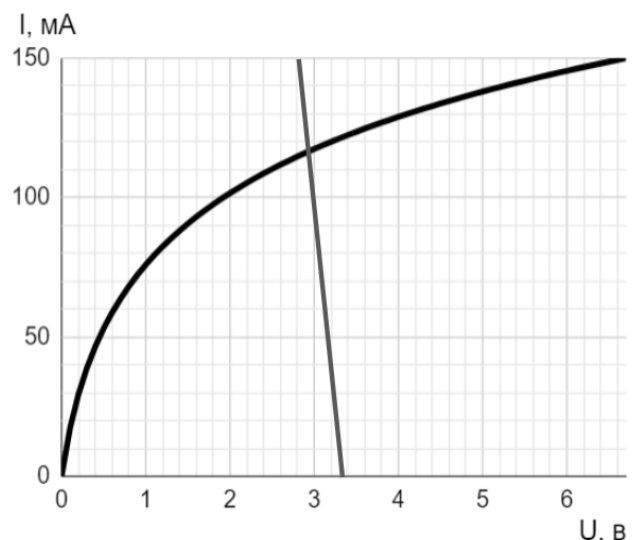
Проаналізуємо вираз у знаменнику, виділив у ньому повний квадрат:

$$Y = \frac{r^2}{R} + 4r + 4R = \left(\frac{r}{\sqrt{R}} - 2\sqrt{R}\right)^2 + 4r + 4R.$$

Мінімальне значення цієї функції досягається коли вираз в дужках дорівнює нулю, тобто при $R = r/2 = 5$ Ом. Максимальна теплова потужність на реостаті при цьому буде дорівнювати: $P_p = \frac{U_0^2}{8r} = 1,25$ Вт.

Б) Позначимо напругу і силу струму на лампочці як U_L і I_L . З минулого питання знаємо що $R = r/2$. Застосовуючи закон Ома та формули паралельного та послідовного з'єднань маємо: $U_0 = U_L + I_L r + U_L r/R$. Звідки отримаємо залежність між силою струму та напругою на лампочці: $I_L = (U_0 - 3U_L)/r$.

Побудуємо цю пряму на графіку вольт-амперної характеристики лампи. На перетині графіків знайдемо напругу та силу струму на лампочці: $U_L = 2,95$ В і $I_L =$



115мА. При цьому сумарна потужність дорівнює: $P_I = U_L \cdot I_L + U_L^2 / R = 2.1 \text{ Вт}$.

Розв'язання (спосіб 2).

А) Знайдемо теплову потужність, яка виділяється на частині реостата. Позначимо опір частини реостата R . Тоді опір кола, зображеного на рисунку:

$$R_{3\Lambda} = r + \frac{R \cdot r}{R + r} = r + R_x, \text{ де позначимо } R_x = \frac{R \cdot r}{R + r} \quad (1).$$

Тоді напруга на реостаті: $U_P = \frac{U_0}{r + R_x} \cdot R_x$

Перепишемо останній вираз, поділивши чисельник і знаменник на R_x : $U_P = \frac{U_0}{\frac{r}{R_x} + 1} \quad (2)$

Підставимо (1) в (2): $U_P = \frac{U_0}{\frac{R+r}{R} + 1} = \frac{U_0}{\frac{r}{R} + 1 + 1} = \frac{U_0}{\frac{r}{R} + 2} \quad (3)$

Знайдемо потужність, яка виділяється на частині реостата: $P = \frac{U_P^2}{R} \quad (4)$

Підставивши (3) в (4), отримаємо: $P = \frac{U_0^2}{\left(2 + \frac{r}{R}\right)^2 R}$.

Перепишемо останній вираз, розкривши дужки: $P \left(4 + 4\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right) R = U_0^2$

Домноживши обидві частини на R^2 , та розкривши квадрат, отримаємо: $4PR^2 + 4PRr + Pr^2 = U_0^2 R$

Перегрупувавши доданки, отримаємо квадратне рівняння відносно R :

$$(4P)R^2 - (U_0^2 - 4Pr)R + Pr^2 = 0 \quad (5)$$

Якщо теплова потужність, яка виділяється на частині реостата максимальна P , то дане квадратне рівняння для максимального значення потужності повинно мати два однакові корені, тому знайдемо дискримінант цього рівняння і прирівняємо його до нуля:

$$D = (U_0^2 - 4Pr)^2 - 16 \cdot P^2 r^2 = 0$$

Розв'язавши утворене рівняння, знайдемо шукану максимальну потужність:

$$U_0^4 - 8U_0^2 Pr + 16 \cdot P^2 r^2 - 16 \cdot P^2 r^2 = 0, \text{ звідки } P = \frac{U_0^2}{8 \cdot r} = 1,25 \text{ Вт} \quad (6)$$

З рівняння (5) знаходимо і шуканий опір частини реостата, за умови, що дискримінант рівняння дорівнює нулю:

$$R = \frac{U_0^2 - 4Pr}{8 \cdot P} \quad (6)$$

Підставивши у (6) формулу максимальної потужності, знайдемо: $R = \frac{r}{2} = 5 \text{ Ом}$.

Б) Врахуємо, що знайдений у попередньому пункті опір частини реостата: $R = \frac{r}{2}$. Позначимо

напругу та силу струму на лампочці U_L , та I_L відповідно. За законом послідовного з'єднання для

$$\text{напруг: } U_0 = U_r + U_L \quad (7)$$

Напруга на резисторі: $U_r = I \cdot r = (I_L + I_R) \cdot r$ (8),
де I_R – сила струму, що тече через реостат.
Оскільки напруги на лампочці та реостаті
будуть рівні ($U_L = U_R$), за законом Ома знайдемо
 I_R :

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{r/2} = \frac{2U_L}{r} \quad (9)$$

Підставимо (9) у (8) та у (7), отримаємо:

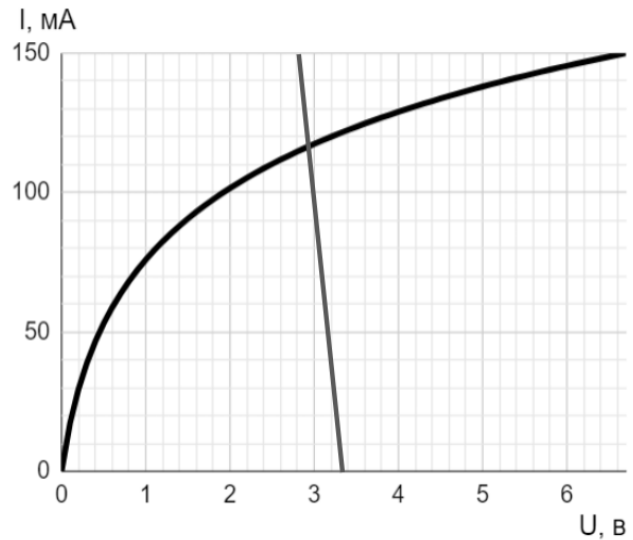
$$U_0 = \left(I_L + \frac{2U_L}{r} \right) \cdot r + U_L$$

Розкривши в останньому виразі дужки,
виразимо силу струму на лампочці:

$$I_L = \frac{U_0 - 3U_L}{r} = \frac{U_0}{r} - \frac{3}{r}U_L \quad (10)$$

Отже, значення сили струму та напруги на лампочці мають задовільняти одночасно лінійне рівняння (10) та належати кривій, зображеній на рисунку. Тому, побудувавши пряму, яку описує функція (10), знайдемо координати точки перетину цієї прямої та кривої графіка (див рис.): $U_L = 2,9$ В і $I_L = 115$ мА. При цьому сумарна потужність, яка виділяється на лампочці $P_L = I_L \cdot U_L$ та реостаті $P_R = U_L^2/R$ дорівнює:

$$P_{\text{сум}} = I_L U_L + \frac{U_L^2}{R} \approx 2,1 \text{ Вт}$$



3. «Намішав води з водою»

При температурі $0,01^\circ\text{C}$ та низькому тиску 612 Па вода може одночасно існувати в усіх трьох агрегатних станах – лід, рідина і пара. Такі умови називають потрійною точкою води. Нехай вам вдалось в калориметрі отримати однакову масову частину води в цих трьох станах: маса льоду $m_L = \frac{1}{3}m$, маса рідини $m_p = \frac{1}{3}m$ та маса пари $m_n = \frac{1}{3}m$, де m – загальна маса води. Така ситуація буде нестабільна і при невеликій зміні об'єму вода перейде в два агрегатні стани. Знайдіть, які будуть масові частини різних агрегатних станів, якщо, не змінюючи тиск та температуру, вода повністю перейде: А) в рідину та пару; Б) в лід та рідину; В) в лід та пару.

Вважайте, що біля потрійної точки питома теплота плавлення льоду $\lambda = 300 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, а питома теплота пароутворення – $L = 2,5 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

Розв'язання

А) Рідина та пара. Для того, щоб весь лід розплавився, потрібна така кількість теплоти $Q = m_L \lambda$. Оскільки система знаходиться в калориметрі, то загальна енергія води зберігається, і єдиний спосіб отримати таку кількість теплоти – з конденсації частини пари $Q = m_{\text{конд}} L = m_L \lambda$. Отже, має сконденсуватись стільки пари:

$$m_{\text{конд}} = \frac{\lambda}{L} m_L = \frac{\lambda}{L} \frac{1}{3} m = \frac{300 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}}{3 \cdot 2500 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}} m = 0,04m.$$

Тобто, отримаємо $m_n - m_{\text{конд}} \approx 0,29m$ пари і $m_L + m_p + m_{\text{конд}} = 0,71m$ рідини.

Б) Лід та рідина. Для того, щоб отримати тільки лід і рідину, треба щоб вся пара сконденсувалась у рідину. При цьому виділиться така кількість теплоти $Q = m_n L$. Ця теплота може піти тільки на плавлення льоду, але максимум енергії, яку може поглинути лід, рівна $Q = m_L \lambda$, що

менше ніж треба, оскільки питома теплота плавлення менша за питому теплоту пароутворення. Тобто, без зміни температури чи тиску така ситуація неможлива.

В) Лід та пара. Для того, щоб отримати тільки лід і пару треба, щоб частина рідини кристалізувалась у лід, а частина рідини випарувалася, в такій пропорції, щоб зберігався тепловий баланс системи. Тобто

$$Q_{\text{крисст}} = m_{\text{крисст}}\lambda = Q_{\text{випар}} = m_{\text{випар}}L,$$

причому

$$m_{\text{крисст}} + m_{\text{випар}} = m_p = \frac{1}{3}m.$$

З цих двох рівнянь отримаємо:

$$\begin{aligned} m_{\text{випар}} &= \frac{\lambda}{L} m_{\text{крисст}}, \\ m_{\text{крисст}} + \frac{\lambda}{L} m_{\text{крисст}} &= \frac{1}{3}m, \\ m_{\text{крисст}} &= \frac{m}{3\left(1 + \frac{\lambda}{L}\right)} \approx 0,298m, \quad m_{\text{випар}} = m_p - m_{\text{крисст}} = 0,035m. \end{aligned}$$

Тоді повна маса льоду буде $m_{\text{л}} + m_{\text{крисст}} = 0,333m + 0,298m \approx 0,63m$, а пари $m_{\text{п}} + m_{\text{випар}} = 0,333m + 0,035m = 0,37m$.

Відповідь:

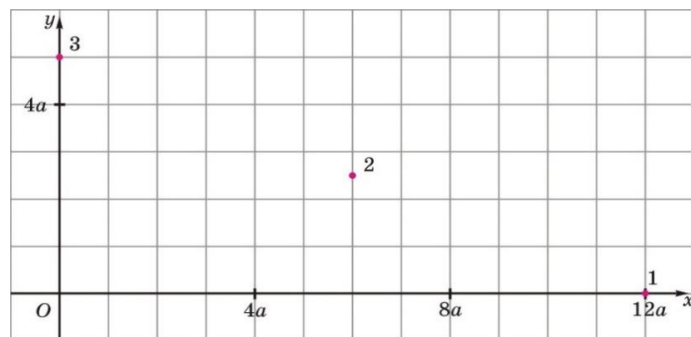
А) $0,71m$ рідини та $0,29m$ пари;

Б) така ситуація неможлива;

В) $0,63m$ льоду та $0,37m$ пари.

4. «На варті галактики».

Космічний патруль відстежує рух зорельоту галактичних прибульців, спостерігаючи яскраве світло від ілюмінаторів (молодший прибулець дуже розсіяний і періодично забуває про світломаскування). Зореліт рухається відносно патруля прямолінійно та рівномірно з великою швидкістю. Штурман патруля за традицією наносить видиме положення зорельоту на стародавній планшет (див. рисунок). Початок координат на планшеті відповідає положенню патруля, а точки 1, 2, 3 — видимому положенню зорельоту в моменти часу відповідно: $t_1 = 08$ год 10 хв 00 с, невідомий момент t_2 і $t_3 = 08$ год 19 хв 00 с. Відомо, що світло в космосі поширюється зі швидкістю 300 000 км/с.



А) **Визначте швидкість** руху зорельоту відносно патруля, якщо бічна сторона кожного квадратика на планшеті відповідає відстані $a = 18$ млн км.

Б) **Напишіть формулу** залежності $r(t)$, де r — модуль відстані між зорельотом і патрулем, t — час за годинником патруля.

В) **Визначте момент** t_2 нанесення на планшет точки 2.

Розв'язання.

А) Перше, що може спадати на думку — визначити модуль s переміщення зорельоту за час $\Delta t = t_3 - t_1 = 9$ хв. Як легко побачити, цей модуль дорівнює довжині гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами $12a$ і $5a$, тобто з теореми Піфагора маємо $s = 13a$. Звідси $v = \frac{s}{\Delta t} = 430\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Але така відповідь абсолютно нереальна, бо отримане значення значно перевищує швидкість світла у вакуумі $c = 300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Тому слід повернутися до аналізу умови задачі.

Такий аналіз показує, що слід урахувати: зореліт дійсно перебував у точках 1, 2, 3, але в інші моменти. Адже світло ще мало дійти до патруля. На це витрачався час: відповідно $\tau_1 = \frac{r_1}{c} = \frac{12a}{c} = 720$ с з точки 1 і $\tau_3 = \frac{r_3}{c} = \frac{5a}{c} = 300$ с з точки 3. Отже, насправді на проходження ділянки 1–3 витрачено на 420 с (7 хв) більше часу, а швидкість руху виходить $v \approx 244\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$, що вже менше від швидкості світла.

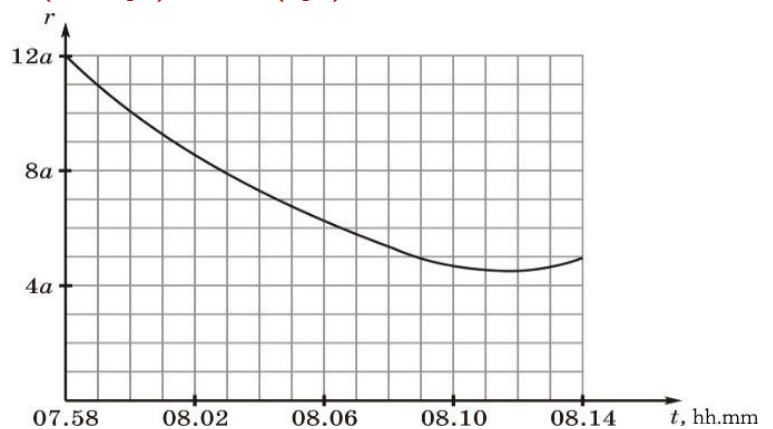
Б) З урахуванням поправок на час поширення світла ми отримуємо висновок: насправді зореліт перебував у точці 1 о 07 год 58 хв 00 с (позначимо цей час t_0), а в точці 3 — в момент 08 год 14 хв 00 с. Можемо знайти залежність $r(t)$ для проміжку часу між 07 год 58 хв і 08 год 14 хв. Отже, відповідне переміщення тривало $T = 16$ хв. Кожної хвилини координата зорельоту x зменшувалася на $\frac{12a}{T}$, а координата y збільшувалася на $\frac{5a}{T}$. Отже, залежності координат від часу за годинником патруля мають вигляд:

$$x = 12a - \frac{12a}{T}(t - t_0) = 12a \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right), \quad y = 5a \frac{t-t_0}{T}.$$

Залежність $r(t)$: $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{144 \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)^2 + 25 \left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}.$

Для наочності можна побудувати графік такої залежності (це не входить у вимоги до учасників/учасниць олімпіади!).

Схематичний графік (див. рисунок) можна побудувати за наведеною формулою або розбити траєкторію руху зорельоту на рівні частини та виміряти відповідні значення $r(t)$ на планшеті з урахуванням масштабу.



В) Оскільки рух зорельоту прямолінійний рівномірний, а точка 2 лежить посередині відрізка 1–3, зореліт перебував у точці 2 на $T/2$ (тобто на 8 хв) пізніше, ніж у точці 1. Це момент 08 год 06 хв 00 с. Світло пододало відстань $6,5a$ від цієї точки до початку координат за 390 с, тобто 6,5 хв. Отже, патруль мав побачити зореліт у точці 2 (а штурман — нанести точку 2 на планшет) у момент:

$t_2 = 08$ год 06 хв + $6,5$ хв, тобто $t_2 = 08$ год 12 хв 30 с.