

Міністерство освіти і науки України
Національний центр «Мала академія наук України»
LIX Всеукраїнська учнівська олімпіада з фізики, м. Львів, 2025
Теоретичний тур, 10-й клас
Умови та розв'язки

1. «Доплер-трамвай»

Два однакові швидкісні трамваї їдуть назустріч один одному і час від часу подають сигнали на однаковій частоті ν_0 . Водії кожного з трамваїв вимірюють частоту прийнятих ними сигналів від іншого трамвая мобільними телефонами.

Коли трамваї зближувалися, водій першого трамвая фіксував частоту $\nu_1 = 2323.2$ Гц сигналу від другого. Коли ж трамваї вже роз'їхалися, частота звуку сигналу від другого трамвая суттєво впала з ν_1 до $\nu'_1 = 1694.0$ Гц. Водій другого трамвая в цей самий час побачив, що частота сигналів від першого трамвая склала $\nu'_2 = 1687.5$ Гц. Вважати, що в обох випадках відстань між трамваями була набагато більшою за відстань між коліями.

А. Знайдіть частоту сигналів ν_0

Б. Знайдіть швидкості трамваїв, вважаючи, що швидкість звуку у повітрі дорівнює 330 м/с.

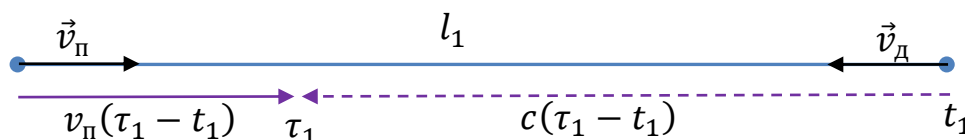
В. Дайте відповіді на питання А і Б, врахувавши, що весь час в напрямку руху першого трамвая дув вітер зі швидкістю 4 м/с.

Підказка: Коли відстань між джерелом сигналів і приймачем зменшується, приймач реєструє коротший проміжок часу між сигналами, а коли збільшується – більший. Так само змінюється і період звукових хвиль.

Розв'язання.

А. Розглянемо джерело сигналів і приймач, які рухаються назустріч один одному зі швидкостями v_d і v_n . Нехай відстань між ними в момент часу t_1 відправлення сигналу дорівнює l_1 . В момент часу τ_1 приймач отримує сигнал.

Тоді відстань l_1 приймач і сигнал подолали разом за час $\tau_1 - t_1$ (див. Рис.), тобто



$$l_1 = (v_n + c)(\tau_1 - t_1).$$

Для другого сигналу, який був відправлений джерелом у момент часу t_2 , можна записати аналогічне рівняння

$$l_2 = (v_n + c)(\tau_2 - t_2).$$

За час $\Delta t = t_2 - t_1$ між відправленням першого і другого сигналів відстань між приймачем і джерелом скоротилася на $(v_n + v_d)(t_2 - t_1)$. Віднімаємо від $l_1 - l_2$ і отримуємо:

$$(v_n + c)(\Delta t - \Delta \tau) = (v_n + v_d)\Delta t.$$

З цього рівняння виражаємо інтервал часу $\Delta \tau$ між отриманням двох сигналів приймачем через інтервал часу між їх надсиланням джерелом Δt .

$$\Delta \tau = \frac{c - v_d}{c + v_n} \Delta t.$$

Якщо під Δt і $\Delta \tau$ розуміти періоди звукової хвилі, то зв'язок частот, обернених до періоду величин, матиме вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{c + v_n}{c - v_d}.$$

Зміну частоти внаслідок взаємного руху називають ефектом Доплера.

У нашому випадку ефект Доплера для всіх трьох випадків:

$$v_1 = v_0 \frac{1 + v_1/c}{1 - v_2/c}, \quad v'_1 = v_0 \frac{1 - v_1/c}{1 + v_2/c}, \quad v'_2 = v_0 \frac{1 - v_2/c}{1 + v_1/c}.$$

З першого і третього рівнянь відразу знаходимо $v_0 = \sqrt{v_1 v'_2} = 1980$ Гц.

Б. З першого і другого рівнянь з урахуванням v_0 знаходимо швидкості трамваїв: $v_1 = 22$ м/с, $v_2 = 30$ м/с.

В. Знайдені у п. Б. швидкості є насправді швидкостями відносно систему відліку «повітря», яка рухається вздовж напрямку руху першого трамваю з $v = 4$ м/с. Тоді відносно землі перший трамвай мав рухатись зі швидкістю $u_1 = v_1 + v = 26$ м/с, а другий йому назустріч зі швидкістю $u_2 = v_2 - v = 26$ м/с. Отже, виходить, що трамваї рухались з однаковими швидкостями.

Відповідь на питання А залишиться без змін $v_0 = \sqrt{v_1 v'_2} = 1980$ Гц.

Критерії оцінювання

10.1 «Доплер-трамвай»

1. Запис рівнянь, що пов'язують частоту джерела та частоту, яку реєструє приймач, для трьох випадків – 1 бал
2. Визначена частота сигналу джерела v_0 у випадку нерухомого повітря 1 бал
3. Визначена швидкість першого трамваю – **1,5 бал**, другого трамваю – **1,5 бал** у випадку нерухомого повітря.
4. У випадку наявності вітру визначена частота сигналу джерела v_0 – **0,5 бал**, визначені швидкості першого та другого трамваю – **0,5 бал**.

2. «Клубок нервів резисторів»

Учениця знайшла клубок резисторів, з якого стирчать три контакти. Позначимо їх А, В, С. Щоб дослідити цей клубок вона увімкнула джерело невідомої постійної напруги між контактами АВ та амперметр між контактами АС. Амперметр показав струм I_1 . Не відключаючи джерело, учениця увімкнула цей самий амперметр між контактами ВС, і він показав такий самий струм I_1 . Нарешті, вона увімкнула цей амперметр послідовно з джерелом між контактами АВ. Тепер амперметр показав інший струм I_2 .

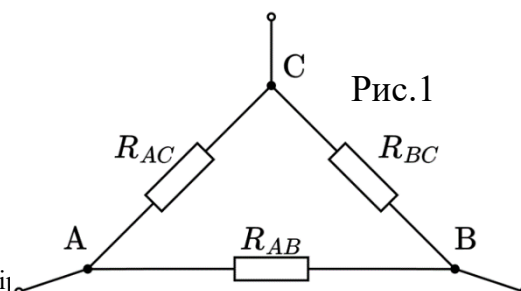
Уважаючи амперметр та джерело ідеальними, знайдіть **силу струму**, який протікатиме через амперметр, якщо його увімкнути послідовно з джерелом між контактами ВС.

Підказка. Можна змодельовати клубок резисторів схемою з мінімально можливою їх кількістю.

Розв'язання.

Для будь-якої комбінації резисторів, що має два виходи (позначимо їх Х та Y), можна порахувати загальний опір між виходами ХУ – $R_{ХУ}$. Тоді в усіх експериментах, де використовуються тільки ці два виходи ХУ, комбінація резисторів буде вести себе як один резистор з опором $R_{ХУ}$.¹

Аналогічні міркування можна провести і для будь-якої комбінації (клубка) резисторів, що має три виходи – А, В, С. Але тепер підключитись можна трьома різними способами (АВ, ВС, АС), тому замінити все на один резистор не вийде, але вийде замінити на еквівалентні три резистори. Їх можна, наприклад, з'єднати у вигляді трикутника або зірки. Як добре відомо, існує зв'язок між трикутником та зіркою, тому можна обрати будь-яку



¹Це можна довести, наприклад, за допомогою законів Кірхгофа. Рівняння Кі розв'язку цих рівнянь, лінійність залишиться і кінцевий результат теж виявиться лінійним. Більше того, вийде, що загальна напруга між точками ХУ, пропорційна повному струму з коефіцієнтом $R_{ХУ}$. Це і означає, що комбінація резисторів еквівалентна одному резистору з опором $R_{ХУ}$.

конфігурацію, в цій задачі з'єднання у вигляді трикутника буде зручнішим.

Тобто клубок, який знайшла учениця в загальному випадку можна замінити на трикутник резисторів, як зображено на рисунку 1 – з трьох невідомих резисторів R_{AB} , R_{BC} , R_{AC} .

Тепер розглянемо випадки підключень джерела та амперметра які дослідила учениця.

На рисунку 2 зображений перший випадок – джерело до контактів АВ, та амперметр до контактів АС. Оскільки амперметр ідеальний – його опір дорівнює нулю, тому через резистор R_{AC} струм текти не буде. Тоді легко побачити, що струм через амперметр дорівнює струму через резистор R_{BC} , та дорівнює

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{BC}},$$

де U_0 – невідома напруга ідеального джерела.

Аналогічно буде для випадку, коли амперметр підключений до контактів ВС:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{AC}}.$$

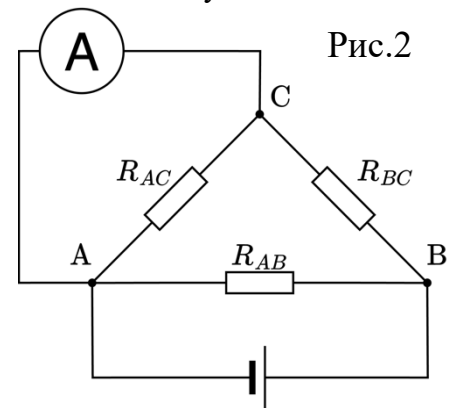


Рис.2

Звідси випливає, що опори між точками АС та ВС – однакові, позначимо їх як R :

$$R_{AC} = R_{BC} = R = \frac{U_0}{I_1}. \quad (1)$$

Тепер розглянемо третій випадок – коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок АВ (див. рисунок справа). Із законів послідовного та паралельного з'єднань легко знайти струм через амперметр. Виходить

$$I_2 = \frac{U_0(2R + R_{AB})}{2RR_{AB}}.$$

На майбутнє виразимо з цього рівняння R_{AB} :

$$R_{AB} = \frac{U_0 2R}{2RI_2 - U_0},$$

підставляючи $R = \frac{U_0}{I_1}$, отримаємо

$$R_{AB} = \frac{2U_0}{2I_2 - I_1}. \quad (2)$$

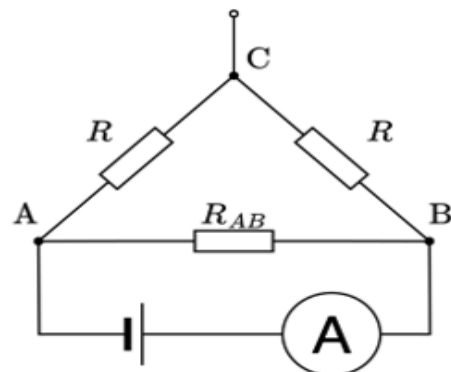


Рис.3

Разом рівняння (1) та (2) виражають всі три опори через напругу U_0 та струми I_1 , I_2 .

Тепер розглянемо останній випадок, в якому нам треба порахувати струм – коли амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів ВС (див.

рисунок 4). Використовуючи закони послідовного та паралельного з'єднання отримаємо формулу для струму через опори резисторів та напругу джерела: $I = \frac{U_0(2R+R_{AB})}{R(R+R_{AB})}$.

Підставимо в цю формулу, рівняння (1) та (2), отримаємо $I =$

$$\frac{U_0 \left(2 \frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1} \right)}{\frac{U_0}{I_1} \left(\frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1} \right)} = I_1 \frac{2(2I_2 - I_1) + 2I_1}{2I_2 - I_1 + 2I_1} = \frac{4I_1 I_2}{2I_2 + I_1}.$$

Відповідь: амперметр покаже струм $I = \frac{4I_1 I_2}{2I_2 + I_1}$, якщо його послідовно з джерелом підключити до контактів ВС.

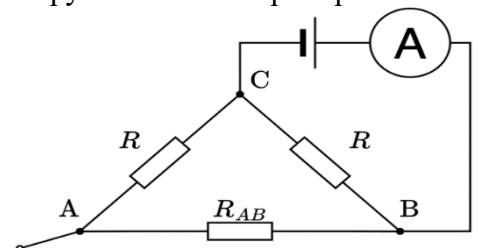


Рис.4

Спосіб 2

Клубок резисторів можна також замінити на зірку з резисторів. Позначимо їх r_A , r_B , r_C , відповідно до контактів до яких кожен резистор підключений. З перших двох вимірів ми знаємо, що коли джерело підключене до контактів АВ, амперметр підключений до контактів АС та ВС дає однакові покази. Це означає, що вся схема симетрична відносно контактів А та В, отже і опори біля цих контактів мають бути однаковими $r_A = r_B = r$. З простих правил послідовного та паралельного з'єднання можна виразити струм I_1 через опори r , r_C та невідому напругу джерела U_0 :

$$I_1 = \frac{U_0}{2r_C + r}.$$

Аналогічно, розглянувши третій вимір – випадок коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок АВ, вийде:

$$I_2 = \frac{U_0}{2r}.$$

З цього рівняння ми можемо виразити опір r :

$$r = \frac{U_0}{2I_2},$$

підставивши це у рівняння на I_1 , можна виразити також опір r_C :

$$r_C = \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}.$$

Тепер, виразивши невідомі опори через напругу та струми, перейдемо до останнього випадку: амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів ВС. В цьому випадку струм виходить

$$I = \frac{U_0}{r + r_C},$$

або підставляючи r та r_C :

$$I = \frac{U_0}{\frac{U_0}{2I_2} + \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}} = \frac{1}{\frac{1}{4I_2} + \frac{1}{2I_1}} = \frac{4I_1I_2}{I_1 + 2I_2}.$$

Тобто, як і очікувалось, відповідь не залежить від того, як розглядати клубок: як еквівалентний трикутнику чи зірці.

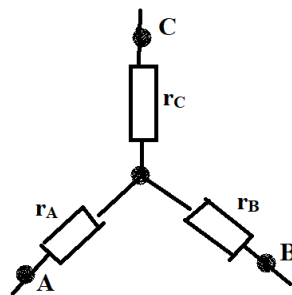


Рис.5

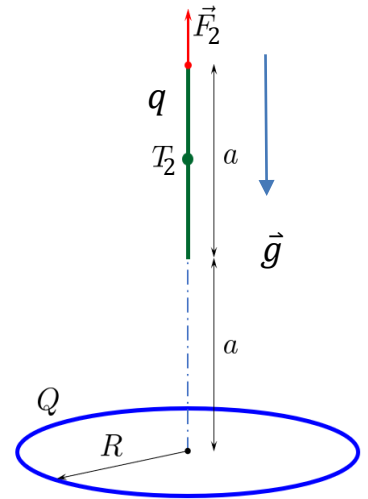
Критерії оцінювання

10.2. «Клубок нервів резисторів»

- | | |
|--|-----|
| 1.Запропона модель із трьох резисторів (схема трикутник, зірочка) | 1.5 |
| 2.Зроблено коректні рисунки з поясненнями. | 1.0 |
| 3. Правильно використано закон Ома для послідовного та паралельного з'єднань. Вірний хід задачі. | 2.0 |
| 4. Пояснено перетворення та зроблено викладки | 0.5 |
| 5. Отримано вірний результат | 1.0 |

3. «Гумова електростатика»

Гумове кільце радіуса R , рівномірно заряджене зарядом Q , зафіксоване в горизонтальній площині. Діелектричний важкий стрижень довжини a , рівномірно заряджений по довжині зарядом q протилежного знаку, знаходиться на осі кільця на великій відстані від нього. Щоб утримувати стрижень в рівновазі, до його верхнього кінця прикладають силу F_1 , а сила натягу в його середині дорівнює T_1 . У другому експерименті стрижень пересунули так, що його нижній кінець опинився на висоті a від кільця. При цьому необхідна для утримання сила, прикладена до верхнього кінця стрижня, становила F_2 , а сила натягу в середині стрижня дорівнювала T_2 (див. рис.). У третьому експерименті стрижень ще додатково піднімають на відстань a вгору, а гумове кільце розтягають удвічі. **Якою силою** можна тепер утримувати стрижень в рівновазі? Поляризацією матеріалу стрижня та його деформацією знехтуйте.



Розв'язання.

В першій ситуації сила, якою ми утримуємо стрижень, дорівнює силі тяжіння, що діє на стрижень, $F_1 = mg$. Розглянемо тепер умову рівноваги нижньої половинки стрижня: на неї діє вдвічі менша сила тяжіння, сила відштовхування F_e від верхньої половинки стрижня, направлена вниз, і сила натягу, направлена вгору. Отже, $T_1 = \frac{F_1}{2} + F_e$. В другій ситуації сила натягу в середній точці відрізняється від T_1 на величину сили притягання F_r нижньої половини стрижня до кільця, $T_2 = T_1 + F_r$. Для аналізу третьої ситуації скористаємось методом подібності. Хоча ми і не можемо написати у явному вигляді вираз для сили взаємодії кільця зі стрижнем (це можна зробити лише інтегруванням по довжині стрижня!), але ми все ж можемо порівняти цю силу у другій та третій конфігурації. Коли ми збільшили відстань від стрижня до кільця і радіус кільця удвічі, вся система *майже* залишилася подібно збільшеною удвічі: незмінною залишилася лише довжина стрижня. Але можна уявити, що його наростили до вдвічі більшої довжини (і заряду!), так що сам він є половиною такого вдвічі збільшеного стрижня. При збільшенні всіх розмірів системи вдвічі сила взаємодії зменшиться в чотири рази. Окрім того, заряд вдвічі збільшеного стрижня вдвічі більший, тому сила взаємодії з ним буде лише у два рази меншою, а значить сила притягання між кільцем і самим стрижнем буде $F_r/2$. Це означає, що сила натягу в середині стрижня з другої ситуації дозволяє знайти повну силу, що діє на весь стрижень в третій. Тобто шукана сила становить

$$F_3 = F_1 + \frac{F_r}{2} = F_1 + \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Критерії оцінювання

10.3. «Гумова електростатика»

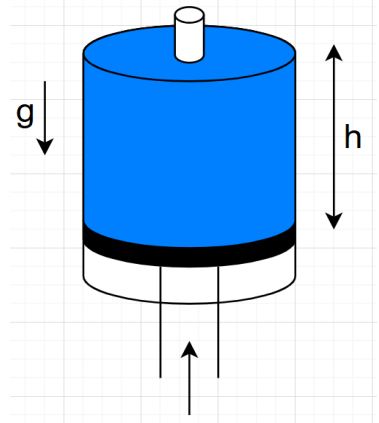
- | | |
|--|----------|
| 1. Встановлення зв'язку F_1 з силою тяжіння | 0.5 бала |
| 2. Встановлення зв'язку T_1 з силами тяжіння та кулонівського відштовхування | 1.0 бал |
| 3. Встановлення зв'язку T_2 та F_2 з силами тяжіння та кулонівськими | 1.5 бала |
| 4. Застосування міркувань подібності | 2.5 бала |
| 5. Отримання кінцевого результату | 0.5 бала |

РАЗОМ

6,0 балів

4. «Прискорений шприц»

Шприц з маленьким «носику» повністю заповнили водою і утримують у вертикальному положенні з отвором від «носику» вгору, підтримуючи поршень шприца так, щоб вода не витікала. Висота води в шприці дорівнює h , «нозик» при цьому незаповнений, площа поперечного перерізу шприца дорівнює S_1 , площа перерізу «носику» S_2 (S_2 можна вважати набагато меншою за S_1). На поршень почала діяти сила F , спрямована вертикально вгору і більша за силу, потрібну для утримання його в нерухомому стані. Через деякий короткий час під її дією поршень починає рухатися з невеликим прискоренням. **Знайдіть величину цього прискорення, вважаючи його сталим.**



Поверхневими явищами, в'язкістю води та тертям між поршнем та стінками шприца знехтувати.

Розв'язання.

Застосуємо закон зміни енергії для води в шприці при зміщенні поршня на невелику відстань Δx .

$$A_{\text{зовн}} = \Delta W_{\text{мех}},$$

де $A_{\text{зовн}} = F\Delta x$, а $\Delta W_{\text{мех}}$ – зміна механічної енергії води, яка складається із зміни потенціальної енергії води при підйомі води, та зміни кінетичної енергії внаслідок появи прискорення.

Закон зміни енергії вже для випадку, коли поршень підіймається в гору із певною швидкістю v_1 (при висоті стовпа рідини в шприці h').

$$F\Delta x = \Delta x S_1 \rho h' g + \frac{\Delta x S_1 \rho v_2^2}{2} + \frac{(h' - \Delta x) S_1 \rho (v_1 + a\Delta t)^2}{2} - \frac{h' S_1 \rho v_1^2}{2}.$$

Перший доданок це зміна потенціальної енергії в полі сили тяжіння, другий доданок – кінетична енергія води в носіку при витисканні в нього води зі шприца. Третій та четвертий доданки це різниця енергій всієї води у тубусі при зміщенні поршня на Δx . Будемо лишати лише доданки із першою ступінню малості. Тоді використаємо, що $\Delta x \approx v_1 \Delta t$.

$$F v_1 \Delta t = v_1 \Delta t S_1 \rho h' g + \frac{v_1 \Delta t S_1 \rho v_2^2}{2} + h' S_1 \rho v_1 a \Delta t - \frac{v_1 \Delta t S_1 \rho v_1^2}{2}.$$

Останній доданок в правій частині значно менший за другий ($v_1^2 \ll v_2^2$). Ним можна знехтувати. Скоротимо на $v_1 \Delta t$.

$$F = S_1 \rho h' g + \frac{S_1 \rho v_2^2}{2} + h' S_1 \rho a.$$

Використовуючи рівняння нерозривності $S_1 v_1 = S_2 v_2$, отримаємо

$$v_1^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2} \left(\frac{F}{\rho S_1} - h' (g + a) \right). \quad (1)$$

Швидкість при рівноприскореному русі і прискорення пов'язані кінематичним співвідношенням

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a(H - h'). \quad (2)$$

Тут H – це висота стовпчика води, при якій можна стверджувати, що прискорення a вже встановилось. А швидкість v_0 – початкова швидкість в рівноприскореному русі:

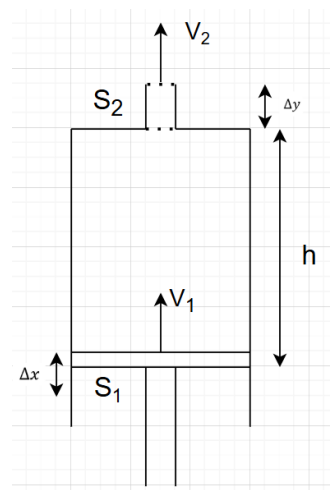
$$v_0^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2} \left(\frac{F}{\rho S_1} - h' g \right).$$

Рівняння (1) та (2) містять змінну невідому величину h' . Кожне з рівнянь можна представити у вигляді

$$v_1^2 = A_1 - B_1 \cdot h' \text{ та } v_1^2 = A_2 - B_2 \cdot h'$$

Порівнюючи коефіцієнти B_1 та B_2 отримуємо

$$2a = \frac{2S_2^2}{S_1^2} (g + a).$$



А значить, $a = \frac{g}{\frac{s_1^2}{s_2^2} - 1} \approx g \frac{s_2^2}{s_1^2}$.

Примітка: Варто відмітити, що перехідний процес між прискоренням з першої частини задачі, яке було рівне $\frac{F}{m} - g$, до прискорення $g \frac{s_2^2}{s_1^2}$ відбувається певний короткий час, за який швидкість доростає до V_0 . Але нам розгляд самого перехідного процесу в даній задачі не потрібен.

Зверніть також увагу на те, що пряме застосування рівняння Бернуллі в цій задачі було б недоцільним, адже Бернуллі використовується лише для стаціонарних потоків і не враховує, для прикладу, зміну енергії води в середині між двома крайніми перерізами внаслідок наявності прискорення. В даній задачі це грає ключову роль.

Критерії оцінювання

10. 4. Прискорений шприц»

1. Отримання рівняння руху (виразу для зв'язку сили і прискорення)	3,0
2. Кінематичний зв'язок швидкості руху і прискорення	1,0
3. Порівняння виразів для швидкості руху рідини, що отримані в 1 та 2 пунктах	1,5
4. Отримання кінцевого результату	0,5
Сума	6.0

5. «Титан»

370 років тому, 25 березня 1655 року, нідерландський вчений Християн Гюйгенс відкрив супутник Сатурна Титан. Титан – єдиний супутник планет Сонячної системи, що має щільну атмосферу. Більш того, атмосферний тиск на його поверхні перевищує земний майже в 1,5 рази і дорівнює $P = 146,7$ кПа.



А. У скільки разів маса атмосфери Титану менша за масу Титану без атмосфери?

Гравітаційна стала $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, прискорення вільного падіння на поверхні Титану $1,352 \text{ м/с}^2$.

20 років тому, 14 січня 2005 р. космічний зонд Гюйгенс Європейського космічного агентства здійснив м'яку посадку на поверхню Титану. На Рис. фрагмент відеоінтерпретації перших секунд після посадки зонду і падіння парашуту, розрахований на основі отриманих даних.

Б. Враховуючи, що сила опору повітря залежить від швидкості руху зонду, густини атмосфери і площі поперечного перерізу (безрозмірний коефіцієнт пропорційності у відповідному співвідношенні вважати рівним порядку одиниці), **оцініть швидкість зонду** перед зіткненням з поверхнею. Діаметр зонду $d = 1,3$ м, маса $m = 320$ кг. Атмосфера Титану (як і Землі) складається переважно з азоту N_2 , але має температуру -180°C . Універсальна газова стала

$R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Азот вважати ідеальним газом.

В. Титан зі швидкістю $5,6 \text{ км/с}$ за 16 діб робить оберт навколо Сатурна в тому ж напрямку, в якому Сатурн зі швидкістю $9,7 \text{ км/с}$ за 29 років обертається навколо Сонця. Вважаючи, що орбіта Титану лежить в площині орбіти Сатурну, зобразіть у системі відліку Сонця **фрагмент траєкторії** Титану і визначте **мінімальний та максимальний радіуси її кривизни**.

Розв'язання.

А. Маса атмосфери знайдемо з $m_a g = P_a \cdot 4\pi R^2$, масу Титану без атмосфери з виразу для прискорення вільного падіння на поверхні $g = \frac{Gm}{R^2}$. Звідси

$$\frac{m}{m_a} = \frac{g^2}{4\pi G P} \approx 14900.$$

Б. З розмірних міркувань сила опору повітря $F = k\rho S v^2$, де k – безрозмірний коефіцієнт, S – площа парашуту, діаметр якого згідно з рисунком удвічі більший за діаметр d самого зонду, а, отже, вважатимемо, що радіус парашуту дорівнює d .

Під час довгого падіння швидкість тіла встановлюється такою, що сила опору повітря компенсує силу тяжіння. Отже з $k\rho S v^2 = mg$ знаходимо

$$v \approx \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}.$$

З рівняння стану ідеального газу знайдемо густину атмосфери поблизу поверхні. Навіть не знаючи цього рівняння, з аналізу розмірностей можна отримати

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}.$$

Остаточного маємо

$$v \approx \sqrt{\frac{mgRT}{\pi d^2 \mu P}} \approx 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість зонду перед посадкою згідно даних з зонду була 4,4 м/с.

В. В обох системах відліку і «Сатурн», і «Сонце» в однаковому положенні на Титан діють однакові сили гравітації і викликають однакове прискорення $\frac{v_{\text{відн}}^2}{r_{\text{кр}}}$. Але внаслідок різної відносної швидкості $v_{\text{відн}}$ радіуси кривизни траєкторій будуть різними. За умовою Титан рухається відносно Сатурна зі швидкістю $v = 5,6$ км/с, і його траєкторію у цій системі відліку можна вважати колом, радіус якого і є радіусом кривизни $r = \frac{v}{\omega} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi}$ траєкторії в системі відліку «Сатурн». У системі відліку «Сонце» з рівності прискорень маємо $r_{\text{кр}} = r \frac{v_{\text{відн}}^2}{v^2}$.

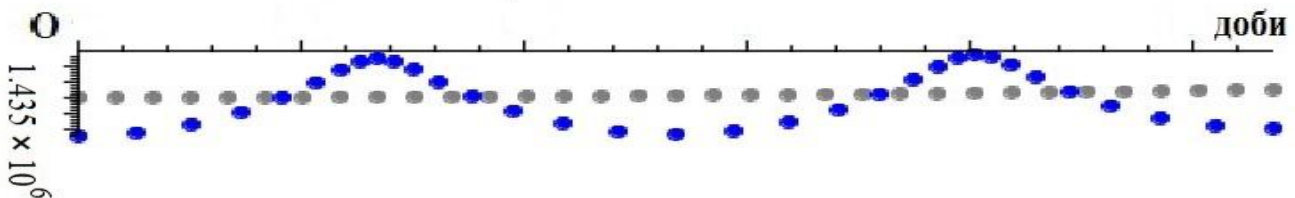
Тоді для найближчої і найвіддаленішої від Сонця точок

$$r_{\min} = r \frac{(V - v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi} \left(\frac{V}{v} - 1 \right)^2 = 660 \text{ тис. км.}$$

$$r_{\max} = r \frac{(V + v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi} \left(\frac{V}{v} + 1 \right)^2 = 9,2 \text{ млн км.}$$

Насправді все дещо складніше, тому сприйматимемо це як деяке наближення. Зазначимо, що у системі відліку Сатурна траєкторія Титану дійсно може вважатися колом, оскільки сила, з якою Титан притягується до Сатурна більша за середню силу його притягання до Сонця приблизно в

$$\frac{GM_{\text{сат}}}{r^2} / \frac{GM_{\text{сон}}}{R^2} = \frac{v^2}{r} / \frac{V^2}{R} = \frac{v}{V} \frac{T_{\text{сат}}}{T_{\text{тит}}} \approx 380 \text{ разів.}$$



На рисунку зображені положення Сатурну й Титану відносно Сонця (відстані у тис. км, Сонце зліва) з інтервалом в одну земну добу. Бачимо, що траєкторія Титану вигинається в бік Сатурну у крайніх по відношенню до Сонця положеннях. Тому відносно Сонця обов'язково буде зміна опуклості на вгнутість траєкторії. У цих точках радіус кривизни траєкторії прямує до нескінченності, а рівнодійна сил тяжіння Титану до Сонця й Сатурну в цей момент спрямована вздовж дотичної до траєкторії і тому не викривляє її.

Тому остаточно: $r_{\min} = 660 \text{ тис. км, } r_{\max} \rightarrow \infty$.

Критерії оцінювання

10.5 «Титан»

Пункт А: 1 БАЛ – правило округлення + співвідношення мас.

Пункт Б: 2.5 БАЛИ –

1 бал – правильний запис залежності сили опору від площі й швидкості;

1 бал – вказано, що швидкість залишається сталою;

0,5 бала – запис густини з рівняння стану.

Пункт В: 2.5 БАЛИ –

1 бал – правильно визначено максимальний й мінімальний радіуси;

1 бал – враховано, що впливом притягання Титана до Сонця можна знехтувати й тоді перераховано значення максимального радіуса;

0,5 бала – зображення траєкторії руху

Задачі запропонували: 1. Орлянський О.Ю., 2. Рідкокаша І.П. 3. Майзеліс З.О., 4. Олійник А.О., 5. Орлянський О.Ю.