Розв’язування тригонометричних рівнянь, що зводяться до квадратних. Однорідні тригонометричні рівняння.

***План***

1. Квадратні тригонометричні рівняння.
2. Рівняння, що зводяться до квадратних тригонометричних
3. Однорідні тригонометричні рівняння
4. Розв’язування тригонометричних рівнянь з використанням формул тригонометрії

Способи розв’язування тригонометричних рівнянь досить різноманітні і не має загального правила розв’язування рівнянь. Тому слід пам’ятати:

1) якщо рівняння містить декілька тригонометричних функцій одного й того ж аргументу, то можна всі функції виразити через одну, після чого отримаємо алгебраїчне рівняння відносно невідомої, яка позначає цю функцію, через яку виражені всі інші;

2) якщо рівняння містить тригонометричні функції від різних аргументів, то потрібно звести функції до одного аргументу;

3) ліву частину можна розкладати на множники;

4) якщо рівняння містить квадрати синусів чи косинусів від невідомого аргументу, то використовують формули пониження степеня, замінюючи  на , а  - на . Цей прийом використовують при високих парних степенях синуса і косинуса.

1. ***Квадратні тригонометричні рівняння.***

**Приклад 1.** Розв’язати рівняння .

Робимо заміну , тоді після заміни отримаємо



Дальше шукаємо дискримінант і корені рівняння:



 та 

Складемо два найпростіші рівняння:

 та  .

Перше рівняння розв’язків не має, бо . (а в нас після дорівнює стоїть число 3)

Друге рівняння має загальний розв’язок: , .

2.***Рівняння, що зводяться до квадратних тригонометричних***

**Приклад 2**. Розв’язати рівняння .

Замінимо  на :

,

.

Отримали квадратне рівняння відносно косинуса.

Робимо заміну , тоді після заміни отримаємо



Дальше шукаємо дискримінант і корені рівняння:



 та 

Складемо два найпростіші рівняння:

 і .

Перше рівняння розв’язків не має, бо .

Друге рівняння має загальний розв’язок: .

**Приклад 3.** Розв’язати рівняння .

Зробимо перетворення:

,

.

Звідси  

 

Таким чином, множина коренів даного рівняння має вигляд:

, ; , .

***3. Однорідні тригонометричні рівняння***

Рівняння виду *a*sin *x + bcos x = 0* наз. однорідне рів­няння 1-го степеня, де *а* і *b* не дорівнюють нулю.

Значення *x*, при яких cos *x* дорівнює нулю, не задовольняє даному рівнянню, бо тоді і sin *x* теж дорівнював би нулю, а cos *x* і sin *x* не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тому можна розділити обидві частини рівняння почленно на cos *x.* Маємо:

 *atg x* + *b* = *0 tg x =* - *.*

*x* = *- arctg* *+ π*n, nZ.

**Приклад 4.** Розв’язати рівняння .

Дане рівняння однорідне.

Поділимо обидві частини рівняння на .

Дістанемо ,

або ,

звідси , або , .

Рівняння виду *a* sin2*x* + *b* sin*x* cos*x* + *c* cos2*x =* 0 називається однорідним рівнянням 2-го степеня. Якщо числа *а, b, с* не дорівнюють нулю, то розділимо дане рівняння на cos2 *x* (або на sin2*x*). (У даному рівнянні cos2*x* ≠ 0, бо в супротивному випадку sin2 *x* теж дорівнював би нулю, а cos *x* і sin *x* не можуть одночасно дорівнювати нулю). Тоді

;

*a*tg2*x* + *b*tg*x* + *c* = 0.

**Приклад 5.** Розв’язати рівняння .

Замінимо  на  :

.

Поділимо обидві частини знайденого рівняння на  :



.

Замінивши  на , матимемо ,

Звідси 

 та 

 і ,

Або  і 

, .

Відповідь: , , .

**Приклад 6.** Розв’язати рівняння .

Після ділення на  отримаємо:

,

Замінивши  на , матимемо ,

звідси  і ,

або  і .

Отже,  , , .

***4.Розв’язування тригонометричних рівнянь з використанням формул тригонометрії***

А) винесення множника за дужки

**Приклад 7.**

Розв'яжіть рівняння cos2 *x -* 2 cos *x* sin x = 0.

Ділити обидві частини на cos2 *x* не можна, бо cos2 *x* = 0 є роз­в'язком даного рівняння. Це рівняння можна розв'язати:

**І спосіб** (винесення множника)

cos2 *x* – 2 cos *x* sin *x* = 0 cos *x* (cos *x* – 2 sin *x*) = 0

Звідси cos*x* = 0 або cos*x* – 2sin*x* = 0.

1) cos *x* = 0; *x* = + π*п*, *п**Z*.

2) cos*x* – 2sin*x* = 0; ; l – 2tg*x* = 0; tg*x* = **; *x* = arctg **+ π*n*, *п**Z.*

*Відповідь:*  + π*n*, *п**Z;* arctg ** + π*n, п**Z.*

**II спосіб.** Розділимо обидві частини на sin2 *x*, оскільки sin *x* ≠ 0 в даному рівнянні, бо в супротивному випадку і cos *x* = 0, що неможливо.

,

ctg2 *x -* 2ctg *x* = 0;

ctg*х*(ctg *x -* 2) *=* 0.

Звідси ctg *x* = 0, або ctg *x* = 2.

1. ctg *x* = 0; *x =* *+ πп, п**Z.*
2. ctg *x* = 2; *x* = arcctg 2 + π*n, п**Z.*

*Відповідь:* *+ πn,* arcctg 2 + π*n, п**Z.*

**Приклад 8.** Розв’язати рівняння .

Тут . Маємо:

,

,

 або .

Отже, ; , .

Б) Деякі тригонометричні рівняння шляхом тотожних перетво­рень можна привести до рівнянь з однією тригонометричною функцією, потім зробити заміну і привести рівняння до алгеб­раїчного.

***Приклад 9.*** Розв'яжіть рівняння *sin*2*х* + 4*cos* *x =* 2,75.

## Розв'язання

Замінивши *sin*2*х* на 1 - *cos2x,* матимемо:

1 – *cos2x +* 4*cos х -* 2,75 = 0,

- *cos*2*х* + 4 *cos* *х -* 1,75 = 0,

*cos*2 *х* – 4*cos* *х +* 1,75 = 0.

Нехай cos *х* = *t,* тоді *t2 -* 4*t* + 1,75 = 0.

Звідси t1 =  та t2 =  >1.

Оскільки t2 > 1, то cos *x* =  — розв'язків немає.

Оскільки t1 = , то cos *х =* , *х = ±  + 2πп, п**Z.*

*Відповідь:**±  + 2πп, п**Z.*

**Приклад 10***.* Розв'язати рівняння tg *х +* 3ctg *х* = 4.

### Розв'язання

tg *х* + 3ctg *х* = – 4,

tg *х* +  = 4.

Нехай tg *х* = t, тоді *t + * = 4,

t2 – 4t + 3 = 0,

t1 = 1 і t2 = 3.

Маємо два випадки:

1. tg *x* = 1, 2) tg *х* = 3

*х =* *+ πп, п**Z х =* arctg 3 + π*п, п****Z.***

*Відповідь: +* π*n* та arctg3 + π*п, п**Z.*

В). Багато тригонометричних рівнянь, права частина яких дорівнює 0**,** розв'язуються розкладанням їхньої лівої частини на множники.

***Приклад 11.*** Розв'яжіть рівняння 1 + cos *x - 2* cos  = 0.

# Розв'язання

Врахувавши, що 1 + cos *х* = 2 cos , матимемо:

2*cos2* *–* 2*cos**= 0,*

2cos= 0.

Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників до­рівнює нулю. Тому:

1) cos  = 0;  = +π*n, n * *Z*; *х = π + 2πп, п* * Z;*

2) cos  = 1;  = 2π*n*, *п* ** *Z; х =* 4π*n*, *п  Z.*

*Відповідь: π + 2πп,* 4π*n*, *п* ** *Z.*

***Приклад 12.*** Розв'яжіть рівняння sin *2х —* sin *х* = 0.

## Розв'язання

sin *2х -* sin *х =* 0;

Використаємо формулу віднімання двох синусів ( ):

2 sin  cos  = 0;

2 sincos = 0.

Між синусом і косинусом дія множення, тому окремо прирівнюємо до нуля синус і косинус:

1) sin  = 0;  = π*n*, *х* = 2π*n*, *п Z.*

2) cos  = 0,  = +π*n*, *х* = +, *п* ** Z.

*Відповідь: 2πп* і +*, п  Z.*

**Домашня робота**

Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту.10 клас. Бевз Г.П., Бевз В.Г..– К.: Освіта, 2018.

№479(а), 481(а), 482(б), 496(а), 501(а), 502(б), 505(а)