Examen Recuperativo - MA2601

Cristóbal Bertoglio - Italo Cipriano - Gino Montecinos
- Héctor Olivero - Axel Osses

14 de julio de 2017

Pregunta 1

1. **[3 pts]** Resuelva la ecuación con condición inicial

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y},\ y(0) = 1,$$

y determine el intervalo en que la solución es válida.

2. **[3 pts]** Considere la ecuación

$$y''' = f(x)$$

donde f es una función continua. Encuentre una solución particular y_p por variación de parámetros.

Pregunta 2

1. **[3.0 pts]** Encuentre la función $f(t)$ tal que $y(t) = t$ es solución de

$$y(t) = t^2 + \int_0^t f(t-\tau)y(\tau)d\tau\ , \forall t \geq 0\ .$$

Hint: Use transformada de Laplace y convolución.

2. **[3.0 pts.]** Considere el sistema

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} x.$$

a) **[1 pto]** Resuelva el sistema para $\alpha = 0{,}5$ e indique el tipo de equilibrio.

b) **[1 pto]** Resuelva el sistema para $\alpha = 2$ e indique el tipo de equilibrio.

c) **[1 pto]** Resuelva el sistema en función de α y determine el valor de $\alpha \in (0{,}5, 2)$ donde el tipo equilibro cambia.

Pregunta 3

1. **[3 pts]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= ax(1-y/2) \\ y' &= by(-1+x/3) \end{aligned}$$

donde a, b son constantes positivas. Dibuje las trayectorias de las soluciones en el diagrama de fases para

a) **[0.5 pts]** $a = b = 1$.

b) **[0.5 pts]** $a = 3, b = 1$.

c) **[0.5 pts]** $a = 1/3, b = 1$.

d) **[0.5 pts]** $a = 1, b = 3$.

e) **[0.5 pts]** $a = 1, b = 1/3$.

f) **[0.5 pts]** Deduzca como la forma de las trayectorias de las soluciones depende de a y b.

2. **[3 pts]** Una ecuación que generaliza la del péndulo no-amortiguado es

$$u'' + g(u) = 0, \tag{1}$$

donde $g(0) = 0, g(u) > 0$ para $0 < u < k$, y $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$ donde $k > 0$ es una constante positiva.

a) **[1 pto]** Escriba la ecuación (1) como un sistema de dos ecuaciones.

b) **[1 pto]** Utilice la siguiente función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(t)dt, -k < x < k$$

para probar que el equilibrio $(0, 0)$ es estable.

c) **[1 pto]** Argumente porque la ecuación (1) generaliza a ecuación de péndulo no-amortiguado y porque $V(x, y)$ generaliza su energía total.

Tiempo: 3.5 horas.