Examen Recuperativo - MA2601

Cristóbal Bertoglio - Italo Cipriano - Gino Montecinos
- Héctor Olivero - Axel Osses

16 de julio de 2017

Pregunta 1

1. **[3 pts]** Resuelva la ecuación con condición inicial

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y},\ y(0) = 1,$$

y determine el intervalo en que la solución es válida.

Solución:

Es una ecuación de variable separable, por lo tanto deducimos que

$$\int (1+3x^2)dx = \int (3y^2-6y)dy,$$

y por consiguiente

$$x + x^2 + C = y^3 - 3y^2,$$

donde C es una constante de integración **1.5 pto**. Reemplazando con la condicón inicial obtenemos $C = -2$, con lo que obtenemos la curva integral $y^3 - 3y^2 - x^3 - x + 2 = 0$ **0.5 pts**. Notamos que $3y^2 - 6y = 0$ para $y = 0, 2$. Para $y = 0$, $x^3 - x + 2 = 0$ tiene raíz real $x = 1$ **0.3 pts**, y para $y = 2$, $2^3 - 3 * 2^2 - x^3 - x + 2 = 0$ tiene raíz real $x = -1$ **0.3 pts**, de lo que se deduce que la solución es válida para $|x| < 1$ **0.4 pts**.

2. **[3 pts]** Considere la ecuación

$$y''' = f(x)$$

donde f es una función continua. Encuentre una solución particular y_p por variación de parámetros.

Solución:

El polinomio característico de la ecuación homogénea es $p(\lambda) = \lambda^3$, y su única raíz es 0, **0.5 pts** por lo que un conjunto fundamental es $y_1(x) = 1$ **0.4 pts**, $y_2(x) = x$ **0.4 pts**, $y_3(x) = x^2/2$ **0.4 pts**. Usando la fórmula de variación de parámetros una solución particular está dada por **0.5 pts**

$$\begin{aligned} y_p(x) = y_1(x) \int_0^x \frac{W(y_2(t), y_3(t))}{W(y_1(t), y_2(t), y_3(t))} f(t)dt - y_2(x) \int_0^x \frac{W(y_1(t), y_3(t))}{W(y_1(t), y_2(t), y_3(t))} f(t)dt \\ + y_3(x) \int_0^x \frac{W(y_2(t), y_3(t))}{W(y_1(t), y_2(t), y_3(t))} f(t)dt, \end{aligned}$$

donde

$$W(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

0.2 pts

$$W(y_2(t), y_3(t)) = det \begin{pmatrix} x & x^2/2 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2/2,$$

0.2 pts

$$W(y_1(t), y_3(t)) = det\begin{pmatrix} 1 & x^2/2 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x,$$

0.2 pts

$$W(y_1(t), y_2(t)) = det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Finalmente,

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(t)dt - x\int_0^x tf(t)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^x f(t)dt$$

0.2 pts.

Pregunta 2

1. **[3.0 pts]** Encuentre la función $f(t)$ tal que $y(t) = t$ es solución de

$$y(t) = t^2 + \int_0^t f(t-\tau)y(\tau)d\tau \ , \forall t \geq 0 \ .$$

Hint: Use transformada de Laplace y convolución.

Solución: Note que

$$y(t) = t^2 + \int_0^t f(t-\tau)y(\tau)d\tau = t^2 + (f * y)(t) \ .$$

Luego aplicando transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + F(s)Y(s) \ ,$$

donde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Resolviendo para $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s) = \frac{2}{s^3}\frac{1}{(1-F(s))} \ .$$

Por otro lado, nos interesa el caso $y(t) = t$, cuya transformada de Laplace, es $Y(s) = \frac{1}{s^2}$. Esto permite tener la igualdad

$$\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}\frac{1}{(1-F(s))} \ .$$

Así resolviendo para $F(s)$ tenemos

$$F(s) = 1 - \frac{2}{s} \ ,$$

tomando transformadas inversa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = \delta(t) - 2t \ .$$

Puntaje :

- 1.0 Aplicar la transformada de Laplace y sus propiedades.
- 1.0 Usar la forma de la transformada $Y(s)$ para encontrar la transformada de $F(s)$.
- 1.0 Encontrar la transformada inversa de $F(s)$, es decir, $f(t)$.

2. **[3.0 pts.]** Considere el sistema

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} x.$$

a) **[1 pto]** Resuelva el sistema para $\alpha = 1/2$ e indique el tipo de equilibrio.

b) **[1 pto]** Resuelva el sistema para $\alpha = 2$ e indique el tipo de equilibrio.

c) **[1 pto]** Resuelva el sistema en función de α y determine el valor de $\alpha \in (0{,}5, 2)$ donde el tipo equilibro cambia.

Solución:

a) El polinomio característico es $p(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & -1 \\ -1/2 & -1-x \end{pmatrix} = x^2 + 2x + 1 - 1/2$ que tiene raices $-1 \pm \sqrt{1/2}$ **0.25 pts**. Los vectores propios son $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ **0.25 pts**. La solución general está dada por

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{t(-1-\sqrt{1/2})} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{t(-1+\sqrt{1/2})},$$

donde c_1, c_2 son constantes **0.25 pts**. Deducimos que el origen es un nodo **0.25 pts**.

b) El polinomio característico es $p(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & -1 \\ -2 & -1-x \end{pmatrix} = x^2 + 2x + 1 - 2$ que tiene raices $-1 \pm \sqrt{2}$ **0.25 pts**. Los vectores propios son $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **0.25 pts**. La solución general está dada por

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{t(-1-\sqrt{2})} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{t(-1+\sqrt{2})},$$

donde c_1, c_2 son constantes **0.25 pts**. Deducimos que el origen es un punto silla **0.25 pts**.

c) El polinomio característico es $p(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & -1 \\ -\alpha & -1-x \end{pmatrix} = x^2 + 2x + 1 - \alpha$ que tiene raices $-1 \pm \sqrt{\alpha}$ **0.5 pts**. En la parte a) los dos valores propios son negativos, en la parte b) tienen signos distintos, luego si escogemos $\alpha = 1$ uno valor propio es 0, que es la transición de una raiz de negativa a positiva **0.5 pts**.

Pregunta 3

1. **[3 pts]** Considere el sistema de ecuaciones

$$x' = ax\,(1 - y/2)$$
$$y' = by\,(-1 + x/3)$$

donde a, b son constantes positivas. Dibuje las trayectorias de las soluciones en el diagrama de fases para:

a) **[0.5 pts]** $a = b = 1$.
b) **[0.5 pts]** $a = 3$ y $b = 1$.
c) **[0.5 pts]** $a = 1/3$ y $b = 1$.
d) **[0.5 pts]** $a = 1$ y $b = 3$.
e) **[0.5 pts]** $a = 1$ y $b = 1/3$.
f) **[0.5 pts]** Deduzca como la forma de las trayectorias de las soluciones depende de a y b.

Solución:

Intrucciones:

- Alumno puede responder de modo general al inicio y luego particularizar cada parte o, alternativamente, hacer cada parte de manera independiente.
- Se presenta acá la pauta que responde el problema general al inicio y luego particulariza cada parte.
- La asignación de puntaje del modo alternativo de respuesta debe ser uniforme para cada parte.
- No es necesario dibujar las trayectorias si se responde con toda la infomación que se usaría para dibujar las trayectorias (modo de respuesta de esta pauta).

- Si se dibujan correctamente las trayectorias de las soluciones y la información para obtener gráficos está poco ordenada, entonces colocar todo el puntaje.
- Si se comenten errores en dibujar las trayectorias, pero los cálculos para dibujar los gráficos estan correctos, entonces asignar 0.4 puntos en vez de 0.5 puntos en la parte correspondiente.

Inicio de la pauta.

Los puntos de equilibrio son las soluciones de $x\,(1-y/2) = y\,(-1+x/3) = 0$, estas son $(0,0)$ y $(3,2)$ **0.5 pts**.
El sistema linealizado en el punto crítico (X,Y) es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} ax\,(1-y/2) & \frac{\partial}{\partial y} ax\,(1-y/2) \\ \frac{\partial}{\partial x} by\,(-1+x/3) & \frac{\partial}{\partial y} by\,(-1+x/3) \end{pmatrix}\right|_{(X,Y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,(1-Y/2) & -aX/2 \\ bY/3 & b\,(-1+X/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

0.5 pts. Evaluando la matriz Jacobiana en $(0,0)$ obtenemos

$$J_{(0,0)}^{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \ \mathbf{0.25\ pts}$$

y evaluando la matriz Jacobiana en $(3,2)$ obtenemos

$$J_{(3,2)}^{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & -3a/2 \\ 2b/3 & 0 \end{pmatrix} \ \mathbf{0.25\ pts}.$$

Si se menciona que $J_{(0,0)}^{(a,b)}$ tiene valores propios $a, -b$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente **+0.25 pts**, y si se menciona $J_{(3,2)}^{(a,b)}$ tiene valores propios $\pm\sqrt{-ab}$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2\sqrt{-ab}/(3a) \end{pmatrix}$, respectivamente **+0.25 pts** (0.5 puntos bonus).

a) **0.2 pts** El sistema linealizado en $(X,Y) = (0,0)$ es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $1, -1$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. $(0,0)$ es un punto silla (nodo inestable) del sistema linealizado y del no-lineal.
En $(X,Y) = (3,2)$ el sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $\pm i$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2i/3 \end{pmatrix}$, respectivamente. $(3,2)$ es un centro (equilibrio estable) del sistema linealizado e indeterminado del no-lineal.

b) **0.2 pts** El sistema linealizado en $(X,Y) = (0,0)$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $3, -1$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. $(0,0)$ es un punto silla (nodo inestable) del sistema linealizado y del no-lineal.
En $(X,Y) = (3,2)$ el sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $\pm i\sqrt{3}$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2i\sqrt{3}/9 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(3,2)$ es un centro (equilibrio estable) del sistema linealizado e indeterminado del no-lineal.

c) **0.2 pts** El sistema linealizado en $(X,Y) = (0,0)$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $1/3, -1$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(0,0)$ es un punto silla (nodo inestable) del sistema linealizado y del no-lineal.
En $(X,Y) = (3,2)$ el sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $\pm i\sqrt{3}/3$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2i\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(3,2)$ es un centro (equilibrio estable) del sistema linealizado e indeterminado del no-lineal.

d) **0.2 pts** El sistema linealizado en $(X,Y) = (0,0)$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $1, -3$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(0,0)$ es un punto silla (nodo inestable) del sistema linealizado y del no-lineal.
En $(X,Y) = (3,2)$ el sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $\pm i\sqrt{3}$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2i\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(3,2)$ es un centro (equilibrio estable) del sistema linealizado e indeterminado del no-lineal.

e) **0.2 pts** El sistema linealizado en $(X,Y) = (0,0)$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $1, -1/3$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(0,0)$ es un punto silla (nodo inestable) del sistema linealizado y del no-lineal.
En $(X,Y) = (3,2)$ el sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 2/9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana tiene valores propios $\pm i\sqrt{3}/3$ y vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2i\sqrt{3}/9 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$(3,2)$ es un centro (equilibrio estable) del sistema linealizado e indeterminado del no-lineal.

f) **0.5 pts** Si $ab \approx 0$ y $x(0), y(0) > 0$, entonces $x(t), y(t)$ se demorara mucho tiempo en volver a $x(0), y(0)$. Si ab es grande y $x(0), y(0) > 0$, entonces $x(t), y(t)$ se demorará poco tiempo en volver a $x(0), y(0)$. Si la razón $b : a$ es grande, entonces $y(t)$ varia mucho en t, y si la razón $b : a$ es chica entonces $y(t)$ varia poco en t.

2. **[3 pts]** Una ecuación que generaliza la del péndulo no-amortiguado es

$$u'' + g(u) = 0, \tag{1}$$

donde $g(0) = 0, g(u) > 0$ para $0 < u < k$, y $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$ donde $k > 0$ es una constante positiva.

a) **[1 pto]** Escriba la ecuación (1) como un sistema de dos ecuaciones.

b) **[1 pto]** Utilice la siguiente función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(t)dt, -k < x < k$$

para probar que el equilibrio $(0, 0)$ es estable.

c) **[1 pto]** Argumente porque la ecuación (1) generaliza a ecuación de péndulo no-amortiguado y porque $V(x, y)$ generaliza su energía total.

Solución:

a) Haciendo $x = u, y = \frac{du}{dt}$ **0.5 pts** la ecuación (1) se puede escribir como un sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g(x) \end{aligned}$$

0.5 pts.

b) Para $0 < x < k$ se tiene que $\int_0^x g(t)dt > 0$ ya que g es positiva para $0 < x < k$ **0.2 pts**. Para $-k < x < 0$ se tiene que $\int_0^x g(t)dt > 0$ ya que g es negativa para $-k < x < 0$, por lo tanto $\int_0^x g(t)dt = -\int_x^0 g(t)dt > 0$ **0.2 pts**. Ya que $V(0, 0) = 0$, se sigue que V es definida positiva para $-k < x < k, -\infty < y < \infty$ **0.2 pts**. Se tiene que **0.1 pts**

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = g(x)y + y(-g(x)) = 0.$$

Se concluye que $\dot{V}$ es semi-definido negativo ya que $\dot{V}$ no es definido positivo **0.1 pts**. Usando Teorema de Lyapunov se concluye que $(0, 0)$ es un equilibrio estable **0.2 pts**.

c) La ecuación del péndulo no-amortiguado corresponde a la ecuación (1) reemplazando con la función $g(u) = \frac{g}{l}\sin u$ que satisface $g(0) = 0, g(u) > 0$ para $0 < u < k$, y $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$ para $k = \pi$, lo que demuestra que la ecuación (1) generaliza a ecuación de péndulo no-amortiguado **0.5 pts**. La energía total del péndulo no amortiguado con $\frac{g}{l} = 1$ está dada por $E = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$ que corresponde a $V(x, y)$ reemplazando con $g(u) = \sin u$, lo que demuestra que $V(x, y)$ generaliza la energía total **0.5 pts**.

Tiempo: 3.5 horas.