Tarea # 1

Profesores Italo Cipriano e Isabel Flores Saavedra
SISTEMAS DINAMICOS

25 de abril de 2019

Ejercicio 1. Pruebe que $SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : det(A) = 1\}$ es una variedad difierenciable.

Ejercicio 2. Justifique si el conjunto de soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1, \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

es una variedad diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3. Calcule la frecuencia con que 2^n tiene a r (para $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) como su segundo dígito en su representación en base 10.

Ejercicio 4. Considere la función $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$

$$F(x)_n = x_{n-1} + x_{n+1} \pmod 2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demuestre que $\left(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, F\right)$ es un sistema dinámico caótico.

Sugerencia: Demuestre que $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, F)$ es topológicamente conjugado con el shift unidireccional en 4-símbolos $(\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$, donde $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para encontrar la conjugación puede ser útil definir $h : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to (\{0,1\} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}_0}$ mediante

$$h(x)_n = \left((F^n(x))_0, (F^n(x))_1\right), \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego demuestre que h es biyección y conjugación.

Ejercicio 5. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia donde $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente distribuida módulo 1 si para cada elección de k intervalos $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k] \subset [0, 1)$ se satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{m=1}^{k} \chi_{[a_m,b_m]}(x_j^i) = \prod_{m=1}^{k} (b_m - a_m).$$

Pruebe que una secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como antes es uniformemente distribuida módulo 1 si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i\langle x_j, l\rangle} = 0,$$

para todo $l = (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$, donde $\langle x_j, l\rangle := x_j^1 l_1 + \cdots + x_j^k l_k$.

Ejercicio 6. Defina para α irracional el homeomorfismo $f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ tal que $(x, y) \mapsto (e^{i\alpha}x, xy)$. Pruebe que para todo par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset S^1\times S^1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Concluya que existe un punto con orbita densa (i.e., el sistema es topológicamente transitivo).

Ejercicio 7. Pruebe usando la segunda definición de grado (i.e., $deg(f) = F(x+1)-F(x)$, para F un levantamiento y algún $x \in \mathbb{R}$) que si $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es expansora de grado $d \geq 2$, entonces el número de puntos periódicos de periodo n es $d^n - 1$.

Ejercicio 8. ¿Existe una función lineal a pedazos, continua y sobreyectiva $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, y tal que para todos los enteros positivos n se tenga que

$$2{,}0001^{(n-10)} < \#\{x \in [0, 1] : f^n(x) = x\} < 2{,}9999^{(n+10)}?$$

Ejercicio 9. Encuentre el número de puntos periódicos de periodo 2 para el automorfismo hiperbólico lineal $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ asociado a la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Dada una matriz A de $n \times n$ a entradas en $\{0, 1\}$. Describa un sistema de n rectángulos $\square_1, \ldots, \square_n$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $f : \square := \cup_{i=1}^n \square_i \to \mathbb{R}^2$ tal que la restricciíon de f al conjunto de puntos que permanece dentro de $\square$ para todas las iteraciones de f es topológicamente conjugado al shift de tipo finito σ_A.

Tarea individual. Entregar en formato físico (impresa o escrita a mano) y enviar por e-mail (a icipriano@mat.uc.cl) en formato digital como respaldo (.pdf [escaneo, o foto] de muy baja resolución y leible de las respuestas). Fecha de entrega: antes o hasta el 26 de Junio 2019. Entregar la versión física durante cualquier clase y enviar la versión digital de respaldo durante el mismo día.