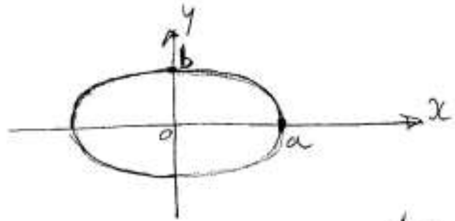
1

3.1



Equação da elipse no sistema cartesiano:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

A área da elipse pode ser calculada como:

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Fazendo mudança de variável:

$$x=a\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$$

Quando $x=0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta=0 \Rightarrow \theta=0$

Quando $x=a \Rightarrow \text{sen}\,\theta=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$

$$A=4\int_0^{\pi/2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\;a\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\;a\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^4\cos^4\theta}\,d\theta$$

$$=4\frac{b}{a}a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\frac{b}{a}a^2\frac{\pi}{4}$$

$$=\pi a b$$

$$\underline{A=\pi a b}$$

3.2

Moon: $\left.\begin{array}{l} r_a = 405\,500 \text{ km} \\ r_p = 363\,300 \text{ km} \end{array}\right\} \Rightarrow a_L = \frac{r_a + r_p}{2} = 384\,400 \text{ km}$

satellite: $\left.\begin{array}{l} h_a = 710 \text{ km} \\ h_p = 225 \text{ km} \end{array}\right\} \Rightarrow a_s = \dfrac{h_a + \frac{12756}{2} + h_p + \frac{12756}{2}}{2}$

$a_s = 6845{,}5 \text{ km}$

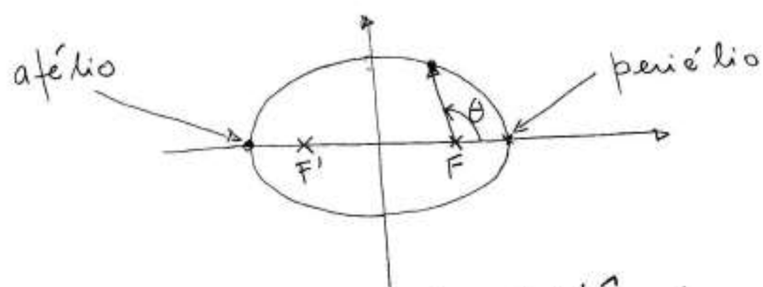
$$\frac{T_m^2}{T_s^2} = \frac{a_m^3}{a_s^3} \Rightarrow T_s = T_m \sqrt{\frac{a_s^3}{a_m^3}}$$

$$T_s = 27{,}322 \sqrt{\left(\frac{6845{,}5}{384\,400}\right)^3} = 0{,}0649 \text{ days} \approx 1{,}6 \text{ hours}$$

3.3

A trajetória de uma partícula em movimento num campo de força central, como é o caso Sol/Terra, é dada pela equação:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$



Sendo: "a" a média da distância entre o Sol e o centro da Terra em movimento ($a = 149{,}6 \times 10^9$ m);

2

"e" é a excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol ($e = 0{,}0167$).

1. Quando a Terra está no periélio $\theta = 0$

$$r_p = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} \Rightarrow r_p = a(1-e)$$

2. Quando a Terra está no afélio $\theta = 180^\circ$

$$r_a = \frac{a(1-e)(1+e)}{1-e} \Rightarrow r_a = a(1+e)$$

Recorrendo ao princípio de conservação do momento angular:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p \Rightarrow \vec{r}_a \times m\vec{v}_a = \vec{r}_p \times m\vec{v}_p$$

No periélio e no afélio os vetores posição e velocidade são ortogonais, então:

$$r_a m v_a = r_p m v_p \Rightarrow r_a v_a = v_p r_p$$

A 2ª lei de Kepler impõe que a velocidade da Terra no afélio e no periélio é mínima e máxima, respetivamente.

$$r_a v_{min} = r_p v_{max} \Rightarrow \frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)}$$

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1+0{,}0167}{1-0{,}0167} = \underline{\underline{1{,}034}}$$

3.4

$$F = mg \; ; \; F = \frac{G m M}{r^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

Na superfície da Terra: $g_{\oplus} = \dfrac{G M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$

Na superfície da Lua: $g_{☾} = \dfrac{G M_{☾}}{R_{☾}^2}$

$$g_{☾} = \frac{M_{☾}}{M_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{R_{☾}} \right)^2 g_{\oplus}$$

$$= \frac{1}{81{,}3} \left(\frac{6378}{1738} \right)^2 9{,}81 \Rightarrow g_{☾} = 1{,}63 \text{ m s}^{-2}$$

3.5

$$\left. \begin{array}{l} r_p = 0{,}6 \text{ UA} \\ 1 \text{ UA} = 149{,}6 \times 10^9 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow r_p = 8{,}976 \times 10^{10} \text{ m}$$

A excentricidade orbital do cometa é: $e = 0{,}967$

A equação da trajetória do cometa em movimento no campo central Sol/cometa é a seguinte:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

1. Quando o cometa está no periélio $\theta = 0^\circ \Rightarrow r_p = a(1-e)$
2. Quando o cometa está no afélio $\theta = 180^\circ \Rightarrow r_a = a(1+e)$

$$8{,}976 \times 10^6 = a(1 - 0{,}967) \Rightarrow a = 2{,}72 \times 10^{12} \text{ m}$$

a é a distância média entre o Sol e o cometa em movimento.

3

a) $r_a = a(1+e) \Rightarrow r_a = 2{,}72 \times 10^{12}(1+0{,}967)$

$r_a = 5{,}35 \times 10^{12}\ m \Rightarrow r_a = 35{,}8\ UA$

b) $\dfrac{v_{max}}{v_{min}} = \dfrac{r_a}{r_p} = \dfrac{5{,}35 \times 10^{12}}{8{,}976 \times 10^{10}} = 59{,}6$

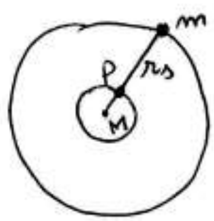
3.6

$$\frac{T_{s_1}^2}{R_\oplus^3} = \frac{T_{s_2}^2}{r^3} \Rightarrow \frac{(100 \times 60)^2}{R_\oplus^3} = \frac{(24 \times 60 \times 60)^2}{r^3}$$

$$r^3 = \left(\frac{24 \times 3600}{6\,000}\right)^2 R_\oplus^3 \Rightarrow \frac{r^3}{R_\oplus^3} = \left(\frac{24 \times 3600}{6000}\right)^2$$

$$\frac{r}{R_\oplus} = \left(\frac{24 \times 3600}{6000}\right)^{2/3} \Rightarrow \frac{r}{R_\oplus} \simeq 5{,}92$$

3.8



$$m\frac{v_s^2}{r_s} = \frac{G m M}{r_s^2}$$

$$v_s^2 = \frac{GM}{r_s} \quad (\text{eq. } 1)$$

$$v_s = \frac{2\pi r_s}{T_s} \quad (\text{eq. } 2)$$

Substituindo a equação 2 na equação 1:

$$\frac{4\pi^2 r_s^2}{T_s^2} = \frac{GM}{r_s} \Rightarrow r_s = \sqrt[3]{\frac{G M T_s^2}{4\pi^2}}$$

a) A linha reta que une o centro do satélite ao centro da Terra deve intercetar a superfície desta na linha do equador ou seja à latitude $\lambda = 0$.

b) O dia sideral terrestre deve igual o período do satélite

$$T_S = 23h\ 56min\ 4{,}09s = 86164{,}09\,s$$

Sendo a massa da Terra $M = 5{,}974 \times 10^{24}$ kg

resulta:

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{G M T_s^2}{4\pi^2}} \Rightarrow r_s = \sqrt[3]{\frac{G \times 5{,}974 \times 10^{24} \times 86164{,}09^2}{4\pi^2}}$$

$r_s = 42.165{,}7$ km. Expressando em relação à distância Terra-Lua:

$$\frac{r_s}{r_{T☾}} = 0{,}1097 \quad \text{ou} \quad r_s \simeq \frac{r_{T☾}}{9{,}1}$$

3.9

A trajetória da Terra em torno do Sol é praticamente circular ($e = 0{,}0167$).

$$F = m\frac{v^2}{r} \quad e \quad F = \frac{G m M}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

Como $v = \dfrac{2\pi r}{T_T}$ então: $\dfrac{4\pi^2 r^2}{T_T^2} = \dfrac{GM}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \frac{r^3\, 4\pi^2}{G\, T_T^2} \quad \text{sendo:}$$

M é a massa do Sol; r é a distância Terra-Sol; T_T é o período orbital da Terra e G é a constante de gravitação.

4

a) $M = \dfrac{4 \times \pi^2 \times (149{,}6 \times 10^9)^3}{G \times (365{,}256 \times 24 \times 3600)^2}$

$M \simeq 2 \times 10^{30}$ kg

A trajetória da Lua em torno da Terra é igualmente circular ($e = 0{,}0549$).

$$m_T = \frac{d^3\, 4\pi^2}{G\; T_L^2}$$

Sendo: m_T a massa da Terra
d a distância média Terra-Lua
T_L o período orbital da Lua

$$m_T = \frac{(384\,400 \times 10^3)^3 \times 4\pi^2}{G \times (27{,}32 \times 24 \times 3600)^2} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Então a massa do Sol relativamente à massa da Terra é:

$$\frac{M}{m_T} = \frac{2 \times 10^{30}}{6 \times 10^{24}} \simeq 3{,}33 \times 10^5$$

b) $T_{IO} = 1{,}769$ dias $= 152\,841{,}6$ s

$r_{JI} = 421\,800$ km

$$M_J = \frac{r_{JI}^3\, 4\pi^2}{G\; T_I^2} = \frac{(421\,800 \times 10^3)^3 \times 4 \times \pi^2}{G \times 152\,841{,}6^2} = 1{,}9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

$$\frac{M_J}{m_T} = \frac{1{,}9 \times 10^{27}}{6{,}0 \times 10^{24}} \simeq 317$$

3.10

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_a + m_b)} R^3$$

$$\left(T_{(anos)} \times 365{,}256 \times 24 \times 3600 \right)^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_a + m_b)} \left(R_{(AU)} \times 149{,}6 \times 10^9 \right)^3$$

$$m_a + m_b = \frac{4\pi^2 R^3_{(AU)} \times (149{,}6 \times 10^9)^3}{G (365{,}256 \times 24 \times 3600)^2 \, T^2_{(anos)}}$$

$$\frac{m_a + m_b}{m_\odot} = \underbrace{\frac{4\pi^2 R^3_{(AU)} \times (149{,}6 \times 10^9)^3}{1{,}989 \times 10^{30} \times G (365{,}256 \times 24 \times 3600)^2}}_{\simeq 1} \cdot \frac{R^3_{(AU)}}{T^2_{(anos)}}$$

$$\frac{m_a + m_b}{m_\odot} = \frac{R^3}{T^2}$$

R expresso em AU ;

T expresso em anos.

3.11

$$\vec{F} = - \frac{G M m \vec{R}}{R^{(3+\alpha)}} \Rightarrow \vec{F} = - \frac{G M m R \vec{u}_r}{R^{(3+\alpha)}} \Rightarrow$$

$$F = \frac{G M m}{R^{(2+\alpha)}}$$

Além disso: $F = m \frac{v^2}{R}$ (órbita circular)

Então: $\frac{v^2}{R} = \frac{G M}{R^{(2+\alpha)}} \Rightarrow v^2 = \frac{G M}{R^{(1+\alpha)}}$ (eq.1)

5

Mas $v = \frac{2\pi R}{T}$ (órbita circular) (eq.2)

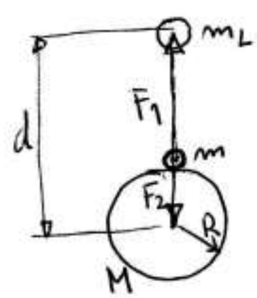
substituindo a eq.2 na eq.1 :

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R^{(1+a)}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{R^{(3+a)}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^{(3+a)}$$, sendo T o período orbital do satélite.

3.12

1. Lua no zénite



$m_L = 7{,}349 \times 10^{22}$ kg

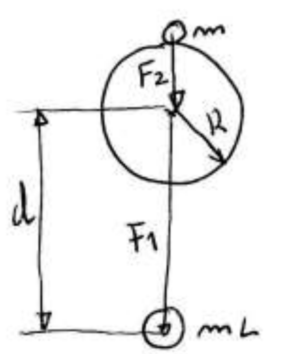
$d = 384\,400$ km

$R = 6378$ km

$$F = F_2 - F_1 = \frac{GmM}{R^2} - \frac{Gm\,m_L}{(d-R)^2}$$

$$g_1 = \frac{GM}{R^2} - \frac{G\,m_L}{(d-R)^2}$$

2. Lua no nadir



$$F = F_2 + F_1 = \frac{GmM}{R^2} + \frac{Gm\,m_L}{(d+R)^2}$$

$$g_2 = \frac{GM}{R^2} + \frac{G\,m_L}{(d+R)^2}$$

3. $\Delta g = g_2 - g_1$

$$= \frac{GM}{R^2} + \frac{Gm_L}{(d+R)^2} - \frac{GM}{R^2} + \frac{Gm_L}{(d-R)^2}$$

$$= Gm_L\left(\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2}\right)$$

$$\Delta g = G \times 7{,}349 \times 10^{22}\left[\frac{1}{(390778\times10^3)^2} + \frac{1}{(378022\times10^3)^2}\right]$$

$$\Delta g = 6{,}64 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{6{,}64\times10^{-5}}{9{,}81} \simeq 7\times10^{-6}$$

3.14

a) $r_p = 1{,}00 \times 10^6$ Km

$v_p = 500{,}0$ Km s^{-1}

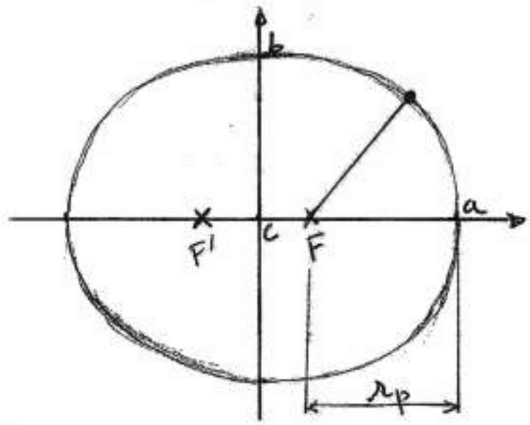
$v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p^2} R_c}$ sendo R_c o raio de curvatura da órbita no periélio

$$v_p^2 = \frac{GM}{r_p^2} R_c \Rightarrow R_c = \frac{r_p^2 v_p^2}{GM}$$

M = massa do Sol = 2×10^{30} kg

$R_c = 1{,}88 \times 10^6$ Km

b) 6



$$R_c = \frac{b^2}{a} \quad (eq.1)$$

$$(CF)^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow (a - r_p)^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow r_p^2 - 2a r_p = -b^2 \quad (eq.2)$$

Substituindo a eq.2 na eq.1:

$$r_p^2 - 2a r_p = -a R_c \Rightarrow r_p^2 = 2a r_p - a R_c$$

$$r_p^2 = a(2r_p - R_c) \Rightarrow a = \frac{r_p^2}{2r_p - R_c}$$

$$a = 8{,}33 \times 10^6 \text{ km}$$

c) A forma newtoniana da 3ª lei de Kepler é:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3 \quad (eq.1)$$

mas $M > m$ → massa do cometa (m)
→ massa do Sol (M)

Então: $$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (eq.2)$$

mas $$v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p^2} R_c} \Rightarrow v_p^2 r_p^2 = GMR_c \Rightarrow$$

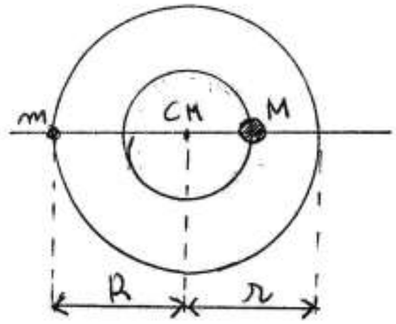
$$\Rightarrow \frac{1}{GM} = \frac{R_c}{v_p^2 r_p^2} \quad (eq.3)$$

substituindo a (eq. 3) na (eq. 2):

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 R_c}{v_p^2 R_p^2} \Rightarrow T \simeq \underline{4,8 \text{ dias}}$$

3.15

Para simplificar vamos considerar órbitas circulares.



$$mR = Mr \quad e \quad a = R + r \quad (eq.1)$$

$$R = \frac{M}{m} r \Rightarrow R = \frac{M}{m}(a-R) \Rightarrow R + \frac{M}{m}R = \frac{M}{m}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R\left(1+\frac{M}{m}\right) = \frac{M}{m}a \Rightarrow R = \frac{Ma}{m+M} \quad (eq.2)$$

Por outro lado:

$$F = G\frac{Mm}{a^2} \quad ; \quad F = m\frac{v^2}{R} \quad ; \quad v = \frac{2\pi R}{T}$$

Então:

$$\frac{GMm}{a^2} = \frac{m}{R}\,\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \frac{GM}{a^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (eq.3)$$

Substituindo a (eq.2) na (eq.3):

$$\frac{GM}{a^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Ma}{m+M} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}\,a^3 \quad (eq.4)$$

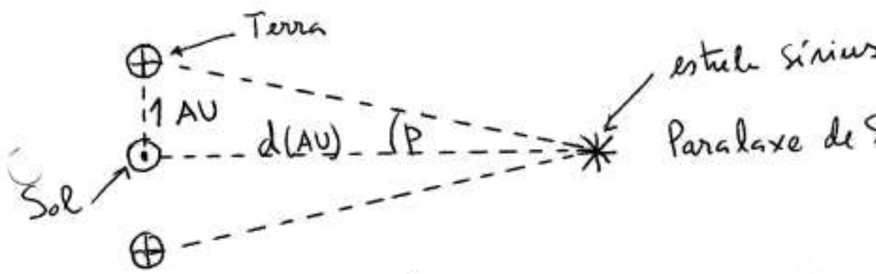
7

Substituindo a eq. 1 na eq. 4:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}(r+R)^3$$

3-17

1. Determinação da distância Terra-Sirius



Paralaxe de Sirius (p) = 0,378 arc seg

$$tg\, p = \frac{1(AU)}{d(AU)} \quad \text{como } d(AU) \gg 1(AU) \Rightarrow p(rad) = \frac{1(AU)}{d(AU)}$$

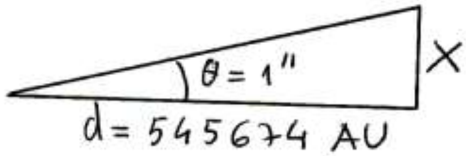
$$1\ rad = 206\,264{,}8'' \Rightarrow p('') = 206\,264{,}8\ p(rad)$$

$$d(AU) = \frac{1(AU)}{p(rad)} = \frac{206\,264{,}8}{p('')}$$

Então: $d(AU) = \frac{206\,264{,}8}{0{,}378} = 545\,674$ AU

2. Determinação da velocidade orbital média do sistema Sirius.

A Fig. 3-2 permite verificar que entre os anos 1902,1 e 1903,1 o sistema descreveu um arco de 1'' aproximadamente.



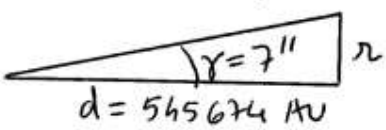
$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ \times 60 \times 60} = 4{,}85 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

$$X = d\theta \Rightarrow X = 545674 \times 4{,}85 \times 10^{-6}$$
$$= 2{,}65 \text{ AU} = 3{,}96 \times 10^{11} \text{ m}$$

A velocidade média orbital é:

$$v = \frac{3{,}96 \times 10^{11}}{365{,}256 \times 24 \times 3600} = 12541 \text{ m/s}$$

3. Determinação do raio da órbita, considerando circular



$$\gamma(\text{rad}) = \frac{2\pi \times 7''}{360 \times 3600} = 3{,}4 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$r = \gamma d \Rightarrow r = 3{,}4 \times 10^{-5} \times 545674 = 18{,}55 \text{ AU} = 2{,}77 \times 10^{12} \text{ m}$$

4. Cálculo da massa do sistema Sírius (considerando órbita circular)

$$M = \frac{r v^2}{G} = \frac{2{,}77 \times 10^{12} \times 12541^2}{6{,}673 \times 10^{-11}} = 6{,}53 \times 10^{30}$$

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{6{,}53 \times 10^{30}}{1{,}99 \times 10^{30}} \simeq 3{,}3$$