4.1 4.1

a) $\ddot{x} = a$ $\quad \dot{x} = at + C_1$ mas $\dot{x}(t=0) = V_{x_0}$ pelo que $V_{x_0} = C_1$ e $\dot{x} = at + V_{x_0} = V_x$

Integrando mais uma vez temos:

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_{x_0}t + C_2$ mas $x(t=0) = x_0$ pelo que $x_0 = C_2$ e $x = \frac{1}{2}at^2 + V_{0x}t + x_0$

b) de $V_x = at + V_{x_0}$ vem $t = \dfrac{V_x - V_{x_0}}{a}$ e substituindo na equação

de posição vem: $x = \frac{1}{2}a\left(\dfrac{V_x - V_{x_0}}{a}\right)^2 + V_{x_0}\dfrac{V_x - V_{x_0}}{a} + x_0$ ou

$$2a(x - x_0) = (V_x - V_{x_0})^2 + 2V_{x_0}(V_x - V_{x_0}) = V_x^2 - \cancel{2V_xV_{x_0}} + V_{x_0}^2 + \cancel{2V_{x_0}V_x} - 2V_{x_0}^2 = V_x^2 - V_{x_0}^2$$

pelo que $V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a(x - x_0)$

4.3 4.3

a) Considerando o desenvolvimento em série de sen θ e de cos θ vem:

$\text{sen}\,\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} - \ldots$ e se $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} - \ldots$ e se $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1$

b) $$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\cos\theta - \sin\theta}{\Delta\theta} =$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\cancel{\sin\theta} + \Delta\theta\cos\theta - \cancel{\sin\theta}}{\Delta\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\cos(\theta+\Delta\theta) - \cos\theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta - \cos\theta}{\Delta\theta} =$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\cos\theta - \Delta\theta\sin\theta - \cos\theta}{\Delta\theta} = -\sin\theta$$

Tempo de subida $= \dfrac{30000\,ft}{1000\,\frac{ft}{min}} = 30\,min = 1800\,s$ 30 000 ft → 30 000 · 3,048

Tempo de descida T_d; $\ddot{y} = -g$ $\dot{y} = -gt$ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + C$ $y(t=0) = 30\,000\,ft = C$; $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 30\,000$

$y(t = T_d) = 0$ $-\frac{1}{2}gT_d^2 + 30\,000 = 0$; $T_d = \sqrt{\dfrac{30000 \cdot 2}{g}} = 43,2\,s$ $g = 9,8\,m s^{-2} = 32,15\,ft\,s^{-2}$

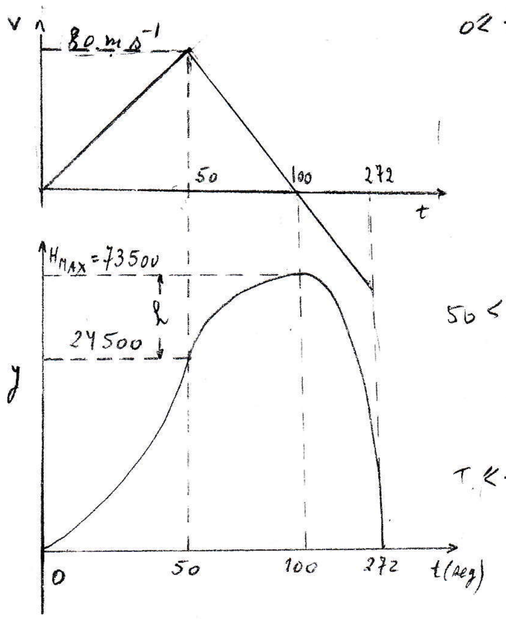
Tempo total $= 1800 + 43,2 = 1843,2\,s$

b) $\dot{y} = -gt = -32,15 \cdot 43,2 = -1388,9\,ft\,s^{-1}$

4,7 4.7

O tempo de descida é superior ao de subida. Se imaginarmos o ar como um fluido muito viscoso, que opõe uma grande resistência ao movimento da bola, então na descida a bola, que parte de uma velocidade inicial nula, demoraria um tempo longo a percorrer o caminho de descida.

4.9 4.9



$0 < t < 50$ $a = 2g = \ddot{y}$

$\dot{y} = 2gt$

$t = 50$ $\dot{y}(t=50) = 2 \cdot 9,8 \cdot 50 = 980\,m\,s^{-1}$

$y = \frac{1}{2}2gt^2 = gt^2 = 9,8 \cdot 50^2 = 24\,500\,m$

$50 < t < T_M$ $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ $h = \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{980^2}{2 \cdot 9,8} = 49\,000\,m$ (*)

$H_{max} = 24\,500 + 49\,000 = 73\,500\,m$

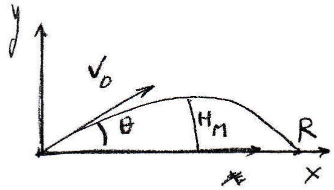
$T_M < t < T_f$ $\ddot{y} = -g$ $\dot{y} = -gt$ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 73\,500$

$y(t = T_f) = 0 = -\frac{1}{2}g(T_f - T_M)^2 + 73\,500$; $(T_f - T_M)^2 = \dfrac{2 \cdot 73\,500}{9,8}$; $T_f = T_M + \sqrt{\dfrac{2 \cdot 73\,500}{9,8}}$ $T_f =$

(*) $\ddot{y} = -g$ $\dot{y} = -gt + 980$ $\dot{y}(T_M - 50) = 0 = -g(T_M - 50) + 980$; $T_M - 50 = \dfrac{980}{9,8} = 100$ $T_M = 150\,s$

b) $H_{max} = 73\,500\,m = 45,67\,mi \simeq 45\,mi$

c) $T_{total} = 272\,s$



$\ddot{y} = -g \quad \dot{y} = -gt + C \quad \dot{y}(t=0) = V_{0_y} \Rightarrow C = V_{0_y} = V_0 \operatorname{sen}\theta$

$\dot{y} = -gt + V_0 \operatorname{sen}\theta \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \operatorname{sen}\theta)t + C_1 \quad$ mas $y(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

a altura máxima dá-se quando a velocidade se anula, e então

$\dot{y} = 0 = -gt + V_0 \operatorname{sen}\theta$ donde $t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$ que substituindo na equação

da distância dá $y_{MAX} = -\frac{1}{2}g\frac{(V_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{g^2} + (V_0 \operatorname{sen}\theta)\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = -\frac{1}{2}\frac{(V_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{g} + \frac{(V_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{g} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{(V_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{g} = \boxed{\frac{V_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\theta}$$

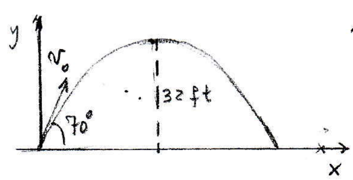
$\ddot{x} = 0$ (não há aceleração segundo x) e vem: $\dot{x} = C = V_0 \cos\theta$ e $x = (V_0 \cos\theta)t$

Mas o tempo que demora a subir já foi calculado: $t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$ e

este tempo é igual ao tempo que demora a descer. Então em $2t$ a

distância percorrida é: $R = x\left(t = \frac{2V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) = V_0 \cos\theta \frac{2V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \boxed{\frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta}$

4.13 4.13



No problema anterior vimos que: $y_{MAX} = \frac{V_0^2}{2g}\operatorname{sen}\theta$ e então

$V_0 = \sqrt{\frac{2g\,y_{MAX}}{\operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32{,}15 \cdot 32}{\operatorname{sen}70°}} = \boxed{46{,}8\ ft\,s^{-1}}$ $g = 9{,}8\ m\,s^{-2} = 32{,}15\ ft\,s^{-2}$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \operatorname{sen}\theta)t \\ x = (V_0 \cos\theta)t \end{cases}$$

Em geral se uma curva é representada por $\vec{r}(t)$, em que t é um parametro, então

a curvatura é dada por: $K(t) = \frac{\sqrt{(r'\cdot r')(r''\cdot r'') - (r'\cdot r'')^2}}{(r'\cdot r')^{3/2}}$ e o raio de curvatura é: $\rho = \frac{1}{K}$

Neste caso $\vec{r}(t) = (V_0 \cos\theta)t\,\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \operatorname{sen}\theta)t\right)\hat{j}$

$\vec{r}'(t) = V_0 \cos\theta\,\hat{i} + (-gt + V_0 \operatorname{sen}\theta)\hat{j}$

$r''(t) = -g\,\hat{j}$ e vem: $K(t) = \frac{\sqrt{\left[(V_0\cos\theta)^2 + (-gt + V_0\operatorname{sen}\theta)^2\right]g^2 - g^2(-gt + V_0\operatorname{sen}\theta)^2}}{\left[(V_0\cos\theta)^2 + (-gt + V_0\operatorname{sen}\theta)^2\right]^{3/2}}$

$r'\cdot r' = (V_0 \cos\theta)^2 + (-gt + V_0 \operatorname{sen}\theta)^2$

$r''\cdot r'' = g^2$

$r'\cdot r'' = -g(-gt + V_0 \operatorname{sen}\theta)$

$$K(t) = \frac{\sqrt{\left(V_0^2\cos^2\theta + g^2t^2 - 2V_0 \operatorname{sen}\theta\, g t + V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)g^2 - g^2\left(V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2V_0 \operatorname{sen}\theta\, g t + g^2 t^2\right)}}{\left[V_0^2\cos^2\theta + V_0^2\operatorname{sen}^2\theta - 2V_0\operatorname{sen}\theta\, g t + g^2 t^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{g\sqrt{V_0^2 + \cancel{g^2t^2} - 2V_0 \cancel{\operatorname{sen}\theta\, g t} - V_0^2\operatorname{sen}^2\theta + 2V_0 \cancel{\operatorname{sen}\theta\, g t} - \cancel{g^2t^2}}}{\left[V_0^2 - 2V_0\operatorname{sen}\theta\, g t + g^2t^2\right]^{3/2}} =$$

$\boxed{\text{Ex 4.13 contin}}$

$$= g\,\frac{\sqrt{V_0^2\cos^2\theta}}{\left[V_0^2 - 2V_0\operatorname{sen}\theta\, g t + g^2t^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{g V_0\cos\theta}{\left[V_0^2 - 2V_0\operatorname{sen}\theta\, \cancel{g}\frac{V_0\operatorname{sen}\theta}{\cancel{g}} + g^2\frac{V_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{g^2}\right]^{3/2}} = (*)$$

$t = \dfrac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$ que é o tempo que leva a atingir o máximo de altura

$$(*) = \frac{g V_0\cos\theta}{\left[V_0^2 - 2V_0^2\operatorname{sen}^2\theta + V_0^2\operatorname{sen}^2\theta\right]^{3/2}} = \frac{g V_0 \cos\theta}{\left[V_0^2\cos^2\theta\right]^{3/2}} = \frac{g V_0\cos\theta}{(V_0\cos\theta)^3} = \frac{g}{V_0^2\cos^2\theta}$$

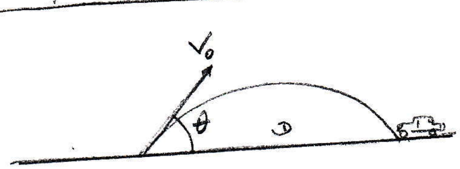
$V_0^2 - V_0^2\operatorname{sen}^2\theta$

$V_0^2\cos^2\theta$

$K(t) = \dfrac{32{,}15}{46{,}8^2 \cdot \cos^2 70} = 0{,}125\ ft$ pelo que a raio de curvatura é $R = \dfrac{1}{K} = 8\ ft$

$\boxed{4.15}$ $\boxed{4.15}$

No referencial móvel que se desloca à velocidade V!



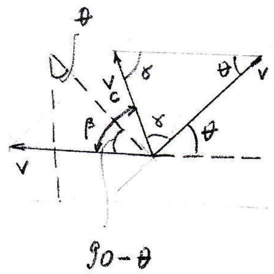
Do problema 4.11 viu-se que

$D = \dfrac{V_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta$ e a distância é máxima para $\theta = 45°$ e então $D = \dfrac{V_0^2}{g}$ com $V_0 = V$

e D tem de ser menor que 22,5 m para não haver colisão. Vem:

$\dfrac{V_0^2}{g} \leq 22{,}5\,m$ e como $V_0 = V$ $\quad V \leq \sqrt{22{,}5 \cdot g} = 14{,}8\ m/s = 53{,}4\ Km/h$

Nota: no referencial fixo a pedra é projectada mas avança. O automóvel também avança. A colisão dá-se se, no instante em que a pedra embate no solo o automóvel está nesse local.



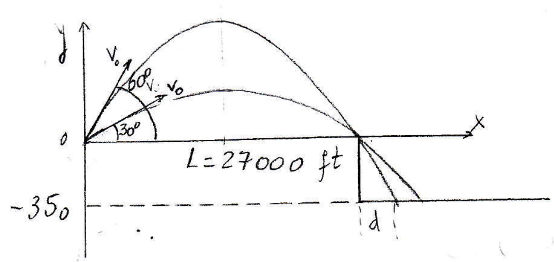
$$\beta = 180-(\gamma+\theta) = 180-\left(90-\frac{\theta}{2}+\theta\right) = 90-\frac{\theta}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(180-\theta) = 90-\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{V}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{V_c}{\text{sen}\,\theta}\ ;\ V_c = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\left(90-\frac{\theta}{2}\right)}V = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}V$$

o ângulo de projecção é $\beta = 90-\frac{\theta}{2}$

4.17 **4.17**

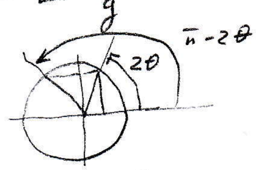


No problema $\boxed{4.11}$ viu-se que:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0\,\text{sen}\,\theta)t \\ x = (V_0\cos\theta)t \end{cases}$$

Além disso viu-se também que a distância máxima é dada por $L = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,2\theta$

ou seja $\text{sen}\,2\theta = \frac{Lg}{V_0^2}$ ou seja $\text{sen}\,2\theta = \frac{27000\cdot 32{,}15}{1000^2} = 0{,}868$



Há pois 2 valores possíveis; $2\theta = \text{arcsen}\,0{,}868 = 60°$ donde $\theta = 30°$ ou
$180-2\theta = \text{arcsen}\,0{,}868 = 60°$ donde $\theta = 60°$. Como se vê na figura é $\theta = 60°$ que dá o menor valor de d. A trajectória tem de passar pelas coordenadas $x = L+d$ e $y = -370$ e então vem:

$$-370 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{L+d}{V_0\cos\theta}\right)^2 + V_0\,\text{sen}\,\theta\,\frac{L+d}{V_0\cos\theta}\ ;\ \frac{1}{2}g\frac{1}{V_0^2\cos^2\theta}(L+d)^2 - \text{tg}\,\theta\cdot(L+d) - 350 = 0$$

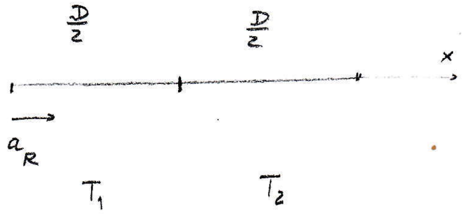
Substituindo valores (notar que $g = 32{,}15\ ft\,s^{-2}$) e calculando as raízes da equação obtemos $L+d = 27137{,}5\ ft$ e como $L = 27000\ ft$ dá

$d = 137{,}5\ ft$.

A solução do livro é 202 ft que está errada!

$\boxed{4.19}$ $\boxed{4.19}$

Cálculo do tempo total no caso do foguete:



$$x = \frac{1}{2} a_R t^2$$

$$\frac{D}{2} = \frac{1}{2} a_R T_1^2 \qquad T_1 = \sqrt{\frac{D}{a_R}}$$

$$\dot{x} = a_R \cdot t \qquad \dot{x}(t=T_1) = a_R \cdot \sqrt{\frac{D}{a_R}} = \sqrt{a_R D}$$

$$T_2 = \frac{D/2}{\sqrt{a_R D}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{a_R}}$$

Tempo total para percorrer D: $T_R = T_1 + T_2 = \sqrt{\frac{D}{a_R}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{a_R}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{D}{a_R}}$

Cálculo do tempo total no caso do jacto:

$$x = \frac{1}{2} a_J t^2 \; ; \; D = \frac{1}{2} a_J T_J^2 \; ; \; T_J = \sqrt{\frac{2D}{a_J}}$$

Mas $T_1 + T_2 = T_R = T_J$ e vem $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{D}{a_R}} = \sqrt{\frac{2D}{a_J}}$; $\frac{9}{4}\frac{\cancel{D}}{a_R} = \frac{2D}{a_J}$; $a_J = \frac{8}{9} a_R$

$$\frac{a_J}{a_R} = \frac{8}{9}$$