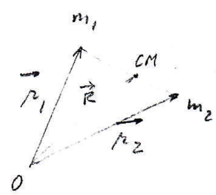
6.1 6.1



Por definição de CM: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1+m_2)\vec{R}$ em que $\vec{R}$ é o vector do C

que, após derivação dá: $m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} = (m_1+m_2)\frac{d\vec{R}}{dt}$ ou $m_1\vec{V}_1 + m_2 V_2 = (m_1+m_2)V$

$$\text{donde } \vec{V}_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_2$$

É intuitivo que o CM está situado sobre a recta que une o afixo de $\vec{r}_1$ com $\vec{r}_2$

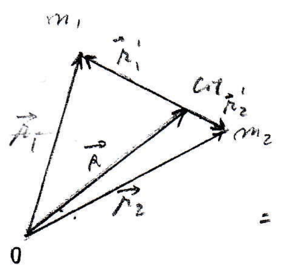
Vamos provar isso:

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2 \qquad \vec{R}-\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$\vec{R}-\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

e então vê-se que $\vec{R}-\vec{r}_1$ é colinear com $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ e então a extremidade de $\vec{R}$ está situada sobre a recta que une as extremidades de $\vec{r}_1$ e de $\vec{r}_2$.

Vamos provar também que o momento total de m_1 e de m_2 em relação a uma origem que coincida com o CM é nulo



$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1' \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2'$$

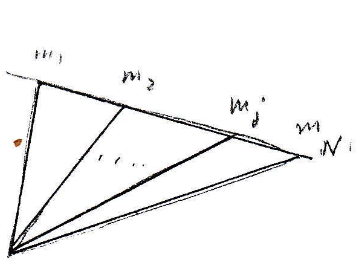
Momento total em relação ao CM $\quad m_1\frac{dr_1'}{dt} + m_2\frac{dr_2'}{dt} =$

$$= m_1\frac{d(\vec{r}_1-\vec{R})}{dt} + m_2\frac{d(\vec{r}_2-\vec{R})}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} - m_1\frac{d\vec{R}}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} - m_2\frac{d\vec{R}}{dt} =$$

$$= m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} - (m_1+m_2)\frac{d\vec{R}}{dt} = (m_1+m_2)\frac{d\vec{R}}{dt} - (m_1+m_2)\frac{d\vec{R}}{dt} = 0$$

pelo que $m_1 V_1' + m_2 V_2' = 0$ em que V_1' e V_2' são velocidades em relação ao CM.

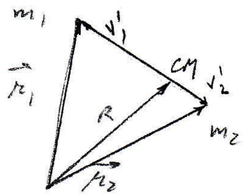
6.2 6.2



$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_j\vec{r}_j + \dots + m_N\vec{r}_N = \vec{R}\sum_{j=1}^{N} m_j$$

e após derivação vem:

$$V_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j v_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}$$



$v_1 = V_{CM} + v_1'$ $\quad v_2 = V_{CM} + v_2'$ em que v_1' e v_2' são as velocidades de m_1 e de m_2 em relação ao CM

En. cinética de m_1 : $T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

" " m_2 = $T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

" total = $T_{m_1} + T_{m_2} = T_t = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) =$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 (V_{CM} + v_1')^2 + m_2 (V_{CM} + v_2')^2 \right) = \frac{1}{2}\left(m_1 V_{CM}^2 + 2 m_1 V_{CM} v_1' + m_1 v_1'^2 + m_2 V_{CM}^2 + 2 m_2 V_{CM} v_2' + m_2 v_2'^2 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2} V_{CM}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2} + 2 V_{CM} \underbrace{(m_1 v_1' + m_2 v_2')} =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{CM}^2 + T_{CM}$$

$= 0$ porque é o mom. linear total em relação ao centro de massa, que se viu em $\boxed{6.1}$ que é nulo

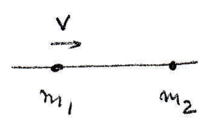
Em resumo: $T_t = T_{CM} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{CM}^2$

6.4

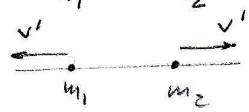
O resultado anterior pode ser generalizado a qualquer número de massas, e dá $\therefore$ $T_t = T_{CM} + \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) V_{CM}^2$

6.5

antes do impacto



depois do impacto



O mom. linear mantem-se constante: $m_1 v = -m_1 v' + m_2 v'$ $\quad v' = \frac{m_1}{m_2 - m_1} v$

Como o choque é perfeitamente elástico isto implica que há conservação da energia cinética, e vem: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2$ ou $m v^2 = (m_1 + m_2) v'^2$

e, substituindo v', vem: $m_1 v^2 = (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_2 - m_1)^2} v^2$; $v^2 \left[m_1 - \frac{m_1^2 (m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)^2} \right] = 0$

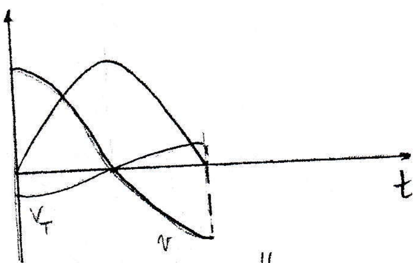
e como v pode ser qualquer então $m_1 - \frac{m_1^2 (m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)^2} = 0$; $\frac{m_1 (m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)^2} = 1$;

$\cancel{m_1^2} + m_1 m_2 = m_2^2 - 2 m_1 m_2 + \cancel{m_1^2}$; $m_1 = m_2 - 2 m_1$; $3 m_1 = m_2$; $\frac{m_2}{m_1} = 3$

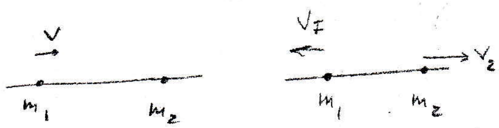
a) $mV = M_T V_T$ $\quad V_T = \frac{m}{M_T} V = \frac{10}{5{,}98\cdot 10^{24}} \cdot 500 = 8{,}36\cdot 10^{-22}$ m/s

b) $\frac{\frac{1}{2} m V^2}{\frac{1}{2} M_T V_T^2} = \frac{m}{M_T} \cdot \frac{M_T^2}{m^2} = \frac{M_T}{m} = 5{,}98\cdot 10^{23}$ En. cinética projéctil é muito maior que a en. cinética da Terra

c)



6.8



A lei da conservação da energia total permite escrever: $\frac{1}{2} m_1 v^2 = Q + \frac{1}{2} m_1 V_F^2 + \frac{1}{2} m_2 V_c^2$

em que Q é a energia em calor libertada no choque.

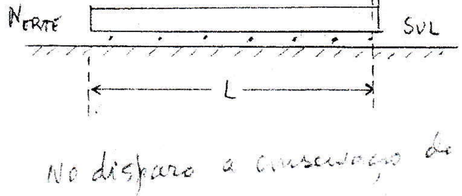
Da conservação do momento linear, vem: $m_1 v = -m_1 V_F + m_2 V_c$ ou $V_c = \frac{m_1}{m_2}(V + V_F)$

Substituindo V_c na expressão da energia, vem:

$$\frac{1}{2} m_1 V^2 = Q + \frac{1}{2} m_1 V_F^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} (V + V_F)^2$$

Substituindo pelos valores numéricos, vem: $V_F^2 + \frac{5}{1{,}25} V_F - \frac{35}{1{,}25} = 0$ cujas soluções são $V_F = -7{,}6568$ e $V_F = 3{,}6568$. A 1ª solução não é possível, neste caso, pois é dito que m_1 tem sentido contrário a V, após o choque. Subsiste a outra solução que dá $V_F = 3{,}66$ m s^{-1}.

6.9



Massa plataforma = 10 000 kg

L = 5 m

$m = 0{,}1$ kg

$v = 500$ m s^{-1}

N = 10 disparos/seg

No disparo a conservação do momento linear, dá: $0{,}1 \cdot 500 = 10\,000 \cdot V$; $V = 5$ mm s^{-1}

Tempo para a bala chocar no anteparo: $T = \frac{5\text{ m}}{500\text{ m s}^{-1}} = 0{,}01$ s

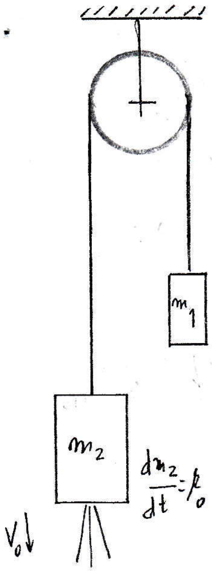
Deslocação por cada bala: $V \cdot T = 5$ mm s$^{-1} \cdot 0{,}01$ s $= 0{,}05$ mm

Mas em cada segundo há 10 disparos, o que dá um recuo por segundo de: $0{,}05 \times 10 =$

A velocidade é para Norte com $0{,}5$ mm s^{-1} $= 5\cdot 10^{-4}$ m/s.

6.10

6.10

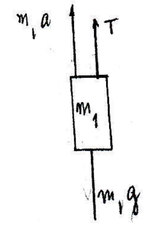


No intervalo de tempo dt são expulsos dm_2 a que a velocidade V_0

A variação do momento linear é $dp = V_0\, dm_2$ e então o impulso (força)

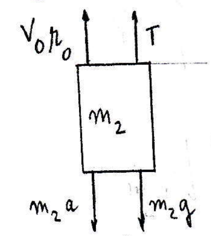
comunicado (para cima) pelo à que é $\frac{dp}{dt} = V_0 \frac{dm_2}{dt} = V_0 r_0 = F$

Forças que actuam em m_1:



$$m_1(g-a) = T$$

Forças que actuam em m_2:



$$m_2(a+g) = T + V_0 r_0$$

Substituindo T vem: $m_1(g-a) = m_2(g+a) - V_0 r_0$; $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a - V_0 r_0$

$$a = \frac{1}{m_1 + m_2}\Big((m_1 - m_2)g + V_0 r_0\Big)$$

Mas $m_2 = m_0 - r_0 t$ e dá $a = \frac{1}{m_1 + m_0 - r_0 t}\Big((m_1 - m_0 + r_0 t)g + V_0 r_0\Big) =$

$$\therefore \quad a = \frac{(m_1 - m_0)g + r_0(V_0 + gt)}{m_1 + m_0 - r_0 t}$$

6.11

6.11

Massa de neve que o carro recolhe por unidade de tempo: $0{,}5\,\text{kg}\; V = \frac{dm}{dt}$

Variação do momento linear $p = mv$ $\quad \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = F = mg\,\text{sen}\,30°$

$0{,}5\,v^2 + ma = mg\,\text{sen}\,30°$ $\quad a = g\,\text{sen}\,30 - \frac{0{,}5\cdot v^2}{m} = 9{,}8\cdot\frac{1}{2} - \frac{0{,}5\cdot 4^2}{9} = 4{,}01\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$

6.12

6.12

$\frac{dm}{dt} = \mu \cdot v$ $\quad p = mv$ $\quad \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$ mas $\frac{dv}{dt} = 0$ e então $F = \mu v^2 + mg$

$m = \mu v t$

$$F = \mu v^2 + mg = \mu v^2 + \mu v g t = \mu v(v + gt)$$

antes do impacto — depois do impacto

$m_n = 1{,}67482\cdot 10^{-27}\,kg = 939{,}55\ MeV/c^2$

$m_{C_{12}} = 12\ uma = 12\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg = 12\cdot 931\ MeV/c^2$

$m_n v_n = -m_n v'_n + m_c v_c \qquad v_c = \dfrac{m_n(v_n+v'_n)}{m_c}$ pelo conservação do momento linear!

$\frac{1}{2}m_n v_n^2 = \frac{1}{2}m_n v_n'^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2$ em que $E = \frac{1}{2}m_n v_n^2 \qquad v_n = \sqrt{\dfrac{2E}{m_n}}$ Choque elástico!

$E' = \frac{1}{2}m_n v_n'^2 \qquad v'_n = \sqrt{\dfrac{2E'}{m_n}}$

$E = E' + \frac{1}{2}m_c v_c^2$ ou $E' = E - \frac{1}{2}m_c v_c^2$

$$E' = E - \frac{1}{2}m_c\frac{m_n^2}{m_c^2}(v_n+v'_n)^2 = E - \frac{1}{2}\frac{m_n^2}{m_c}\left(v_n^2 + 2v_nv'_n + v_n'^2\right) = E - \frac{m_n}{m_c}\underbrace{\frac{1}{2}m_nv_n^2}_{E} - \frac{m_n}{m_c}2\cdot\frac{1}{2}m_n v v' - \frac{m_n}{m_c}\underbrace{\frac{1}{2}m_nv_n'^2} =$$

$$E' = E - \frac{m_n}{m_c}E - \frac{m_n}{m_c}E' - \frac{m_n}{m_c}2\cdot\frac{1}{2}m_nv_nv'_n\ ;\quad \left(1+\frac{m_n}{m_c}\right)E' = \left(1-\frac{m_n}{m_c}\right)E - \frac{2m_n}{m_c}\underbrace{\frac{1}{2}m_n\sqrt{\frac{2E}{m_n}}\sqrt{\frac{2E'}{m_n}}}_{\sqrt{EE'}} =$$

$$\left(1+\frac{m_n}{m_c}\right)E' = \left(1-\frac{m_n}{m_c}\right)E - \frac{2m_n}{m_c}\sqrt{EE'}\ ;\quad E' = \underbrace{\frac{m_c-m_n}{m_c+m_n}}_{a}E - \underbrace{\frac{2m_n}{m_c+m_n}}_{b}\sqrt{EE'} = aE - b\sqrt{EE'}$$

$$E' - aE = -b\sqrt{EE'}$$

$$E'^2 - 2aEE' + a^2E^2 = b^2EE'\ ;\quad E'^2 - (2a+b^2)EE' + a^2E^2 = 0$$

$$E' = \frac{1}{2}\left[(2a+b^2)E \pm \sqrt{(2a+b^2)^2E^2 - 4a^2E^2}\right] = E\left[a + \frac{b^2}{2} \pm b\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}\right] =$$

$$= E\left[\frac{m_c-m_n}{m_c+m_n} + \frac{4m_n^2}{(m_c+m_n)^2 2} \pm \frac{2m_n}{m_c+m_n}\sqrt{\frac{m_c-m_n}{m_c+m_n} + \frac{4m_n^2}{(m_c+m_n)^2 4}}\right] =$$

$$= E\left[\frac{(m_c-m_n)(m_c+m_n)+2m_n^2}{(m_c+m_n)^2} \pm \frac{2m_n}{m_c+m_n}\sqrt{\frac{(m_c-m_n)(m_c+m_n)+m_n^2}{(m_c+m_n)^2}}\right] =$$

$$= E\left[\frac{m_c^2+m_n^2}{(m_c+m_n)^2} \pm \frac{2m_n}{m_c+m_n}\sqrt{\frac{m_c^2}{(m_c+m_n)^2}}\right] = E\left[\frac{m_c^2+m_n^2}{(m_c+m_n)^2} \pm \frac{2m_nm_c}{(m_c+m_n)^2}\right]$$

de que resultam as 2 soluções para a energia no recuo E'

$$E'_1 = E\,\frac{m_c^2+m_n^2+2m_nm_c}{(m_c+m_n)^2} = E\,\frac{(m_c+m_n)^2}{(m_c+m_n)^2} = E$$

. Solução fisicamente impossível de se verificar!

$$E'_2 = E\,\frac{m_c^2+m_n^2-2m_nm_c}{(m_c+m_n)^2} = E\left(\frac{m_c-m_n}{m_c+m_n}\right)^2$$

e se $m_c \simeq 12\cdot m_n$ vem $E' = \dfrac{(12-1)^2m_n^2}{(12+1)^2m_n^2}E = \dfrac{121}{169}E =$

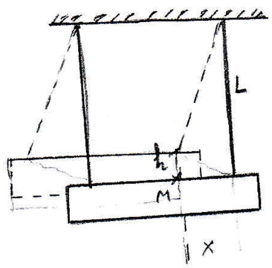
$= 0{,}7159\,E$

$\simeq$

6.13 | 6.13

1º Pelo cons. de energia temos En. cinética = En. potencial

$$\text{En cinética} = \frac{1}{2} m v^2$$



$$\text{En potencial} = (M+m) g h$$

$$h = L - L\cos\theta = L\left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}\right) = L\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}\right) \simeq L\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{2} L \frac{x^2}{L^2} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$$

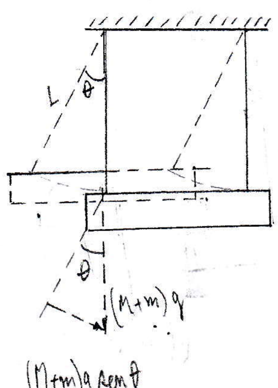
$x = L\,\text{sen}\,\theta$

e vem: $\frac{1}{2} m v^2 = (M+m) g \frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$; $v^2 = \frac{M+m}{m} g \frac{1}{L} x^2$ $\quad \boxed{x = \sqrt{\frac{M+m}{m}}\sqrt{\frac{g}{L}}\, v}$

Esta solução não é igual à do livro que é: $x = \frac{M+m}{m}\sqrt{\frac{g}{L}}\, v$

2º Método: cons. do momento linear $\quad m v = (m+M) v_d \quad$ em que v_d é a vel. inicial do conjunto $m+M$ depois do impacto

$$v_d = \frac{m}{m+M} v$$



$$\underbrace{(M+m) g\,\text{sen}\,\theta \cdot \cancel{L}}_{\text{torque}} = -\underbrace{(M+m) L^{\cancel{2}}}_{\text{mom. de inercia do CM em relação ao eixo}} \ddot{\theta}$$

$g\,\text{sen}\,\theta = -L\ddot{\theta}$ $\quad$ se θ pequeno $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$ e dá $g\theta = -L\ddot{\theta}$

$$1)\quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

A solução é do tipo $\theta = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$ com $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Em $t=0$ $\theta = 0 \Rightarrow \theta = A = 0$ e vem: $\theta = B\,\text{sen}\,\omega t$

$\dot{\theta} = B\omega\cos\omega t$

Em $t=0$ $\dot{\theta} = \frac{v_d}{L} = B\omega$ e vem: $B = \frac{v_d}{\omega L}$ donde

$\theta = \frac{v_d}{\omega L}\text{sen}\,\omega t$ é é solução pois $\dot{\theta} = \frac{v_d}{L}\cos\omega t$ e

$\ddot{\theta} = -\frac{v_d\omega}{L}\text{sen}\,\omega t$ e substituindo em 1) dá:

$-\frac{v_d\omega}{L}\text{sen}\,\omega t + \omega^2\frac{v_d}{\cancel{\omega} L}\text{sen}\,\omega t = 0$! OK!

Então $\theta = \frac{v_d}{\omega L}\text{sen}\,\omega t$ e θ_{MAX}, que se verifica para x, dá $\theta_{MAX} = \frac{v_d}{\omega L}$. Mas $x = L\,\text{sen}\,\theta_M \simeq L\,\theta_{MAX} = \frac{v_d}{\omega L} L = \frac{v_d}{\omega}$

Por fim: $x = \frac{1}{\omega}\frac{m}{M+m} v$ e $\boxed{v = x\frac{M+m}{m}\omega = \frac{M+m}{m}\sqrt{\frac{g}{L}}\, x}$ que é a solução do livro!

VSFF →

Análise do problema:

No 1º método em que se considerou haver cons. de energia $T+U$ a solução obtida está errada. Então há perda por calor no impacto e temos $T = U + Q$

$$Q = \text{calor libertado} = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - (M+m) g \frac{1}{2} \frac{1}{L} x^2 \quad \text{e} \quad x = \frac{m}{M+m}\sqrt{\frac{L}{g}}\, v \quad \text{(pela solução correcta!)}$$

e vem:
$$Q = \frac{1}{2} m v^2 - (M+m) g \frac{1}{2} \frac{1}{L} \frac{m^2}{(M+m)^2} \frac{L}{g} v^2 = \frac{1}{2} v^2 \left(m - \frac{m^2}{M+m}\right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{Mm + m^2 - m^2}{M+m} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} v^2$$ que é a parte da energia cinética inicial perdida no impacto.

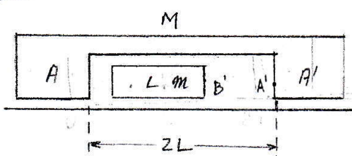
$$\frac{mM}{M+m} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M}}$$

Se $M \gg m$ $\quad \frac{mM}{M+m} = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M}} \simeq m \quad$ e $Q = \frac{1}{2} m v^2 = T$ e isto significa que se o bloco fôr muito grande em massa comparado com o profectil todo a energia cinética é transformado em calor e o bloco não mexe

Se $M \ll m$ $\quad \frac{mM}{M+m} \simeq M \qquad Q = \frac{1}{2} M v^2 \ll \frac{1}{2} m v^2 = T$ e o calor dissipado é muito pequeno!

Em conclusão: a solução do livro está correcta! Há cons. de energia se se considera o calor dissipado! É O MOMENTO LINEAR QUE SE CONSERVA!

$\boxed{6.14}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\boxed{6.14}$



$$x_{B'} = L + v_B t \qquad \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = T \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{M} + m\right) v_B^2$$

$$x_{A'} = 2L - v_A t \qquad -M v_A + m v_B = 0 \qquad v_A = \frac{m}{M} v_B$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2M}{m^2 + Mm} T} \qquad v_A = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{m^2+Mm} T}$$

Após $T = \frac{\tau_0}{2}$ o bloco B embate no bloco A tal que $A' \equiv B'$, pelo que

$$L + v_B \frac{\tau_0}{2} = 2L - v_A \frac{\tau_0}{2} \; ; \; (v_A + v_B)\frac{\tau_0}{2} = L \; ; \; \tau_0 = \frac{2L}{v_A + v_B} = \frac{2L}{\sqrt{T}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{m^2+Mm}} + \frac{m}{M}\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{m^2+Mm}}} =$$

$$\tau_0 = \frac{2L}{\sqrt{T}} \frac{1}{\frac{M\sqrt{2M} + m\sqrt{2M}}{M\sqrt{m^2+Mm}}} = \frac{2L}{\sqrt{T}} \frac{M\sqrt{m^2+Mm}}{(M+m)\sqrt{2M}} =$$

$$= L\sqrt{\frac{2}{T}} \frac{M\sqrt{m}\sqrt{m+M}}{(M+m)\sqrt{M}} = L\sqrt{\frac{2}{T}} \frac{\sqrt{M}\sqrt{m}}{\sqrt{M+m}} = L\sqrt{\frac{2}{T}}\sqrt{\frac{Mm}{M+m}}$$

$\uparrow v_{f/L}$ $\quad v_{g/L} = v_{g/f} + v_{f/L}$ $\quad v_{f/L}$: vel. do foguete no referencial do laboratório

$\downarrow v_{g/f} = -V$ $\quad v_{g/f}$: " " gás " " " foguete

$v_{g/L}$: " " " " " " laboratório

a) Para t o mom. linear é : $P(t) = m(t)\cdot v_{f/L}(t)$

Para $t+\Delta t$ o mom. linear é : $P(t+\Delta t) = m(t+\Delta t)\cdot v_{f/L}(t+\Delta t) - \delta m v_{g/L} =$

$$= \left(m(t) + \frac{dm}{dt}dt\right)\left(v_{f/L}(t) + \frac{dv_{f/L}}{dt}dt\right) - \delta m\, v_{g/L}$$

$$P(t+dt) - P(t) = m(t)\cancel{v_{f/L}}(t) + m(t)\frac{dv_{f/L}}{dt}dt + \frac{dm}{dt}v_{f/L}dt + \frac{dm}{\cancel{dt}}\frac{dv_{f/L}}{\cancel{dt}}(dt)^2 - \delta m\, v_{g/L} - m(t)\cancel{v_{f/L}}(t) \simeq$$

$$\simeq m(t)\frac{dv_{f/L}}{dt}dt + \frac{dm}{dt}v_{f/L}dt - \delta m\, v_{g/L} = m(t)dv_{f/L} + dm\, v_{f/L} - \delta m\, v_{g/L} =$$

$$= m(t)dv_{f/L} + \cancel{dm\, v_{f/L}} - \delta m\, v_{g/f} - \cancel{\delta m\, v_{f/L}} = m(t)dv_{f/L} - \delta m\, v_{g/f}$$

$$\frac{dP}{dt} = m(t)\frac{dv_{f/L}}{dt} - \frac{dm}{dt}v_{g/f} = -mg \quad \text{(no arranque a partir da superfície da Terra!)}$$

$$= 0 \quad \text{(fora do campo gravítico)}$$

$m(t)\dfrac{dv_{f/L}}{dt} - \dfrac{dm}{dt}v_{g/f} = 0$ dá $\dfrac{dv_{f/L}}{dt} = \dfrac{1}{m(t)}\dfrac{dm}{dt}v_{g/f}$ pelo que a = acel. inicial $= \dfrac{(-r_0)(-V)}{M_0} = \dfrac{r_0 V}{M_0}$

b) $r_0 \cdot 2\cdot 10^3 = M_0 a = F$ o que dá $r_0 = \dfrac{9{,}8\cdot 10^5}{2\cdot 10^3} = 4{,}9\cdot 10^2$ kg/s $= 490$ kg/s

c) $\dfrac{dv_{f/L}}{dt} = \dfrac{v_{g/f}}{m(t)}\dfrac{dm}{dt}$ $\quad v_{f/L} = V\cdot\displaystyle\int_{M_0}^{M}\frac{dm}{m(t)}$ $\quad$ e se $m(t) = M_0 - \dfrac{dm}{dt}t = M_0 - r_0 t$

$dm = -r_0\, dt$

$M = M_0 - r_0 T$; $T = \dfrac{M_0 - M}{r_0}$

$$v_{f/L} = V\int_0^T \frac{-r_0}{M_0 - r_0 t}dt = -Vr_0\int_0^T\frac{dt}{M_0 - r_0 t} =$$

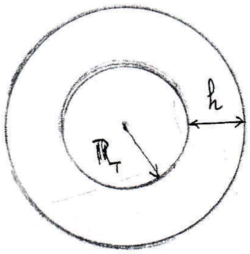
$$v_{f/L} = -Vr_0\left(-\frac{\log(M_0 - r_0 t)}{r_0}\right)\Bigg|_0^T = \frac{Vr_0}{r_0}\left[\log(M_0 - r_0 T) - \log M_0\right] = V\cdot\log\frac{M}{M_0}$$

6.17 6.17

Volume varrido pelo satélite por unidade de tempo : Area x velocidade

Massa de ar que choca com o satélite por unidade de tempo : $\rho A v = \frac{dm}{dt}$

Calculo da velocidade do satélite



$$\frac{m v^2}{R_T+h} = \frac{G M_T m}{(R_T+h)^2} \qquad v^2 = \frac{GM}{R_T+h}$$

Na superficie da Terra temos $mg = \frac{G M_T m}{R_T^2}$ ou $G M_T = g R_T^2$

pelo que $v^2 = \frac{g R_T^2}{R_T+h}$ ou $v = R_T\sqrt{\frac{g}{R_T+h}} = 6{,}38\cdot 10^6 \sqrt{\frac{9{,}8}{(6{,}38+0{,}2)\,10^6}} =$

$= 7{,}78\cdot 10^3 \; m s^{-1}$

Ora $p = m v$; $F_R = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \cancel{\frac{dv}{dt}} = \frac{dm}{dt} v = \rho A v^2 = 1{,}6\cdot 10^{-10} \cdot 0{,}5 \cdot (7{,}78\cdot 10^3)^2 = 4{,}84\cdot 10^{-3} N$

donde $F_R = 4{,}84\cdot 10^{-3} N$

b) F_R é proporcional a v^2. Se $h\downarrow$ $v\uparrow$ e $F_R\uparrow$