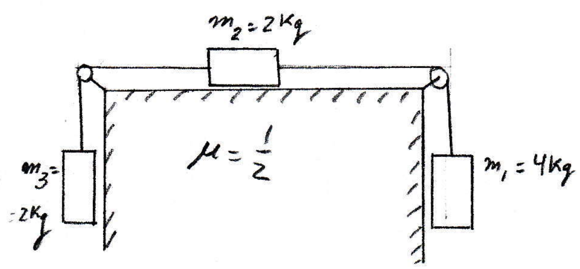
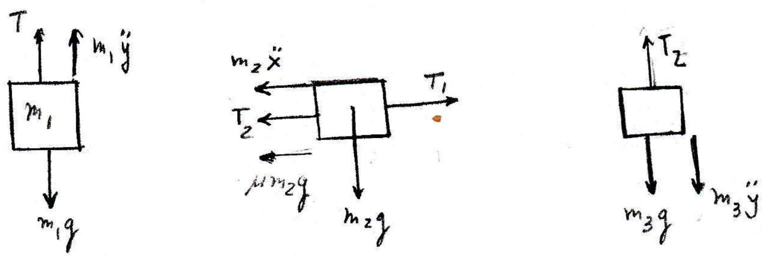
9.3

9.3



Diagramas de corpo livre



$T_1 = m_1 g - m_1 \ddot{y}$ $\quad$ $T_2 + m_2 \ddot{x} + \mu m_2 g - T_1 = 0$ $\quad$ $T_2 = m_3 g + m_3 \ddot{y}$

Mas $\ddot{x} = \ddot{y}$ e eliminando T_1 e T_2 na equação do meio vem:

$$m_3 g + m_3 \ddot{y} + m_2 \ddot{y} + \mu m_2 g - m_1 g + m_1 \ddot{y} = 0$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} = m_1 g - m_3 g - \mu m_2 g$$

$$\ddot{y} = \frac{m_1 - m_3 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + m_3} g = \frac{4 - 2 - \frac{1}{2} 2}{4 + 2 + 2} g = \frac{1}{8} g$$ dirigida para baixo

9.5

9.5

Para que o desgaste nos suportes seja igual então $\mu R_a = \mu R_f \Rightarrow R_a = R_f$

A soma das componentes verticais das forças dá:

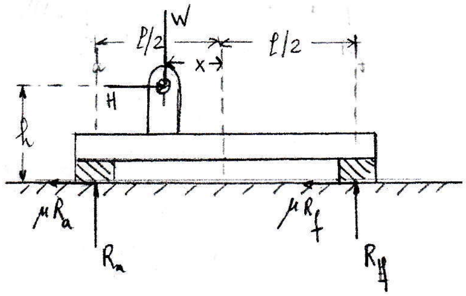
$$W = R_a + R_f = 2 R_f$$

A soma das componentes horizontais das forças dá:

$$H = \mu R_a + \mu R_f = \mu (R_a + R_f) = \mu W = 2 \mu R_f$$

A soma dos momentos das forças em relação ao ponto P dá:

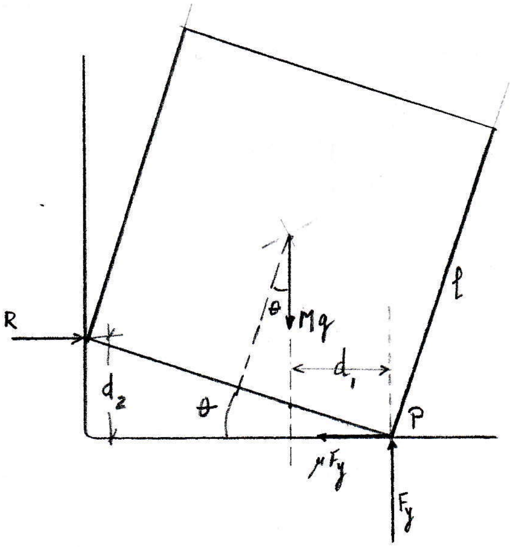
$$H \cdot h + W\left(\frac{l}{2} - x\right) - R_f l = 0$$



$$\cancel{2}\mu \cancel{R_f} h + \cancel{2 R_f}\frac{l}{\cancel{2}} - \cancel{2 R_f} x - \cancel{R_f} l = 0 \qquad \boxed{x = \mu h}$$

9.7

9.7



Soma das forças verticais:

$F_y - Mg = 0 \qquad F_y = Mg$

Soma das forças horizontais:

$R - \mu F_y = 0 \qquad R = \mu F_y$

Soma dos momentos das forças em relação ao ponto P:

$Mg\, d_1 - R\, d_2 = 0$

Cálculo de d_1: $\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\operatorname{tg}\theta\right)\cos\theta$ e $d_2 = \ell \operatorname{sen}\theta$ que substituindo dá:

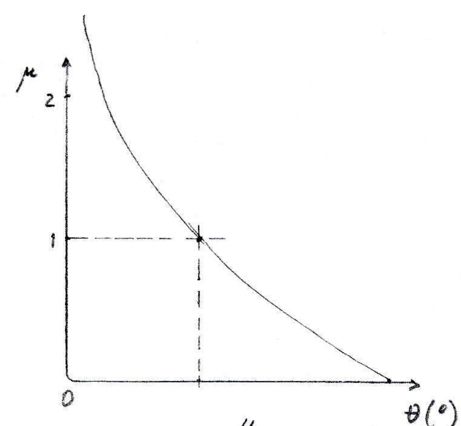
$Mg\,\frac{\ell}{2}(1-\operatorname{tg}\theta)\cos\theta - \mu F_y\,\ell\operatorname{sen}\theta = 0\,; \quad \mu F_y \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} Mg(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$

mas $F_y = Mg$ e vem: $\mu \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$ donde $\boxed{\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} - 1\right)}$

$\theta = 0 \quad \mu = +\infty$

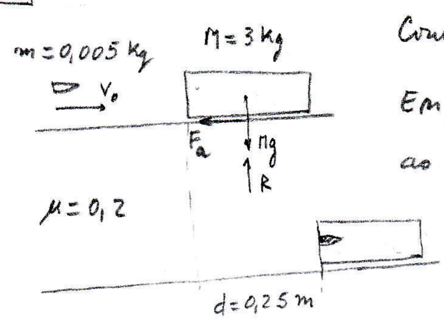
$\theta = 45^\circ \quad \mu = 0$

Se $\mu = 1$ vem $1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} - 1\right)$; $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{3}$; $\theta = 18{,}4^\circ$



9.9

9.9



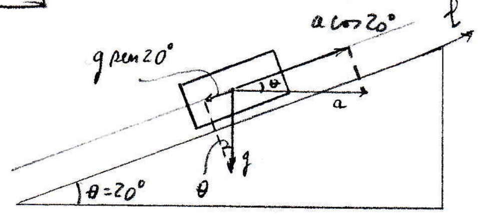
Conservação do momento linear $mV_0 = (m+M)V_0'$

Em. cinética do conjunto M+m após o embate há-de ser igual ao trabalho realizado pela força de atrito $F_a = \mu(M+m)g$ 9.9

$\frac{1}{2}(M+m){V_0'}^2 = \mu(M+m)g\,d \qquad {V_0'}^2 = 2\mu g d = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}98\ m^2 s^{-2}$

$V_0' = 0{,}9899$ e então $V_0 = \left(1 + \frac{M}{m}\right)V_0' = \left(1 + \frac{3}{0{,}005}\right)0{,}9899 = 595\ m s^{-1}$

9.11



no referencial da cunha!

$$\ddot{\ell} = a\cos 20° - g \,\text{sen}\, 20°$$

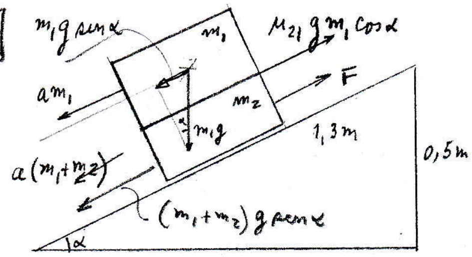
$$\dot{\ell} = (a\cos 20° - g\,\text{sen}\,20°)\,t \qquad \dot{\ell}(t=0)=0$$

$$\ell = \frac{1}{2}(a\cos 20 - g\,\text{sen}\,20)\,t^2 \qquad \ell(t=0)=0$$

$$\frac{1}{2}(a\cos 20 - g\,\text{sen}\,20)T^2 = L = 1\,m$$

$$T = \sqrt{\frac{2L}{a\cos 20° - g\,\text{sen}\,20°}} = \sqrt{\frac{2}{4\cdot\cos 20° - 9{,}8\cdot\text{sen}\,20°}} = 2{,}2\,s$$

9.13



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{0{,}5}{1{,}3} = 0{,}384 \qquad \alpha = 22{,}6°$$

$$\cos\alpha = 0{,}923$$

Antes do escorregamento de m_1 sobre m_2:

Forças no bloco 1: $a m_1 = \mu_{21} m_1 g \cos\alpha - m_1 g\,\text{sen}\,\alpha$

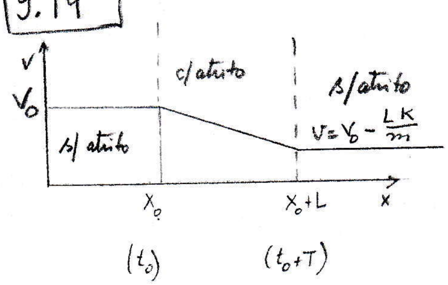
$$a = (\mu_{21}\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)\,g = (0{,}5\cdot 0{,}923 - 0{,}384)\,9{,}8 = 0{,}76\ m\,s^{-2}$$

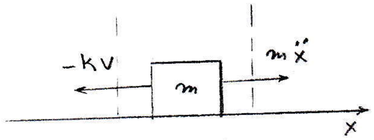
$$F_{MAX} = a(m_1+m_2) + \mu_{\triangle 2}(m_1+m_2)g\cos\alpha + (m_1+m_2)g\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= 0{,}76\cdot(0{,}2+0{,}06) + 0{,}33(0{,}2+0{,}06)\cdot 9{,}8\cdot 0{,}923 + (0{,}2+0{,}06)\,9{,}8\cdot 0{,}384 =$$

$$= 1{,}95\ N = 0{,}2\ kgf$$

9.14





$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\ ;\ m\dot{v} = -kv\ ;\ \dot{v} = -\frac{k}{m}v\ ;\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v$$

$$\dot{x} = v \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt\ ;\ \ln\frac{v}{C} = -\frac{k}{m}t \qquad v = C e^{-\frac{k}{m}t}$$

em $t = t_0$ $v = v_0 \Rightarrow V_0 = C e^{-\frac{k}{m}t_0} \Rightarrow C = V_0 e^{+\frac{k}{m}t_0}$ e $V = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}$

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\ ;\ x = \int V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}dt + C_1 = -\frac{m}{k}V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} + C$$

Em $t = t_0$, $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{m}{k}V_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = x_0 + \frac{m}{k}V_0$ e então

$$x = x_0 + \frac{m}{k}V_0 - \frac{m}{k}V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\ ;\ (x-x_0)\frac{k}{mV_0} = 1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \quad (A)$$

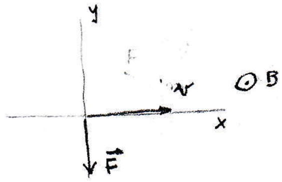
De (A) vem $e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} = 1 - (x-x_0)\frac{k}{mV_0}$ que substituindo em $V = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}$ dá:

$$V = V_0 - (x-x_0)\frac{k}{m} \quad \text{para} \quad x_0 < x < x_0 + L$$

Para $x > x_0 + L \Rightarrow V = V_0 - L\frac{k}{m}$ se $V_0 \geqslant \frac{Lk}{m}$

9.17 9.17

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$



$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = B\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \left(B v_y\,\hat{i} - B v_x\,\hat{j}\right) q$$

Mas $\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$ donde $\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = \frac{qB}{m}\left(v_y\,\hat{i} - v_x\,\hat{j}\right)$ pelo que

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \;;\quad \frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \;;\quad \frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \end{cases}$$

Fazendo $\omega = \frac{qB}{m}$ vem: $\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0$. Esta é a equação do oscilador harmónico cuja solução é do tipo: $v_x = A\sin(\omega t + \phi)$ com A e ϕ a determinar a partir das condições iniciais.

Condições iniciais: $t=0$ $\frac{dv_x}{dt} = 0$; $v_x = V$ vem

$v_x(t=0) = A\sin\phi = V$ $\quad \frac{dv_x}{dt}(t=0) = A\omega\cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ pelo que $A = V$

Integrando $v_x = A\sin(\omega t + \phi)$ temos: $x(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + C_1$

e $x(t=0) = -\frac{A}{\omega}\cos\phi + C_1 = 0$

Conhecido $v_x(t)$ vem da equação $\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y$ que $v_y = \frac{m}{qB}\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega} A\omega\cos(\omega t + \phi)$

que integrada dá $y(t) = \frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + C_2$

Mas $y(t=0) = 0$ pelo que $y(t=0) = \frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\phi + C_2 = 0$ que dá $C_2 = -\frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\phi$

e vem: $$\begin{cases} x(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + \frac{A}{\omega}\cos\phi = -\frac{V}{\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) = \frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) - \frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{V}{\omega}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{V}{\omega} \end{cases}$$

ou $$x^2(t) = \frac{V^2}{\omega}\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(y(t) - \left(-\frac{V}{\omega}\right)\right)^2 = \frac{V^2}{\omega^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$ que somando permite obter a

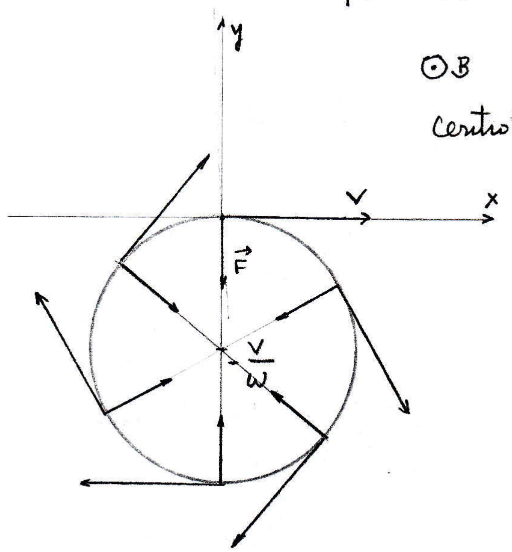
9.17 contin

9.17 contin

equação de um círculo: $x^2 + \left(y - \left(-\frac{V}{\omega}\right)\right)^2 = \frac{V^2}{\omega^2}$ que tem centro em

$x = 0$ e $y = -\frac{V}{\omega}$ e tem raio $\frac{V}{\omega}$

b) $q > 0 \quad B > 0$



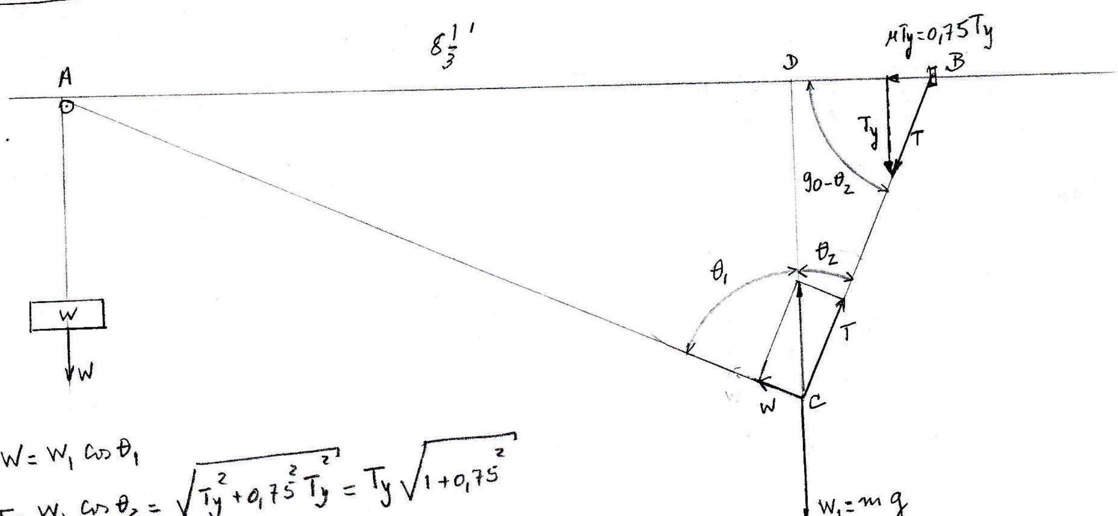
$\odot B$

centro $\left(0, -\frac{Vm}{qB}\right)$

c) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pelo que $T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \frac{m}{qB}$

9.18

9.18



Relações: $W = W_1 \cos\theta_1$

$T = W_1 \cos\theta_2 = \sqrt{T_y^2 + 0{,}75^2 T_y^2} = T_y \sqrt{1 + 0{,}75^2}$

$T\cos(90-\theta_2) = T_y \cdot 0{,}75$; $T \operatorname{sen}\theta_2 = T_y \cdot 0{,}75$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_y}{T} = \frac{1}{0{,}75} \operatorname{sen}\theta_2 \\ \frac{T_y}{T} = \cos\theta_2 \end{array} \right.$ que dividido dá: $tg\,\theta_2 = 0{,}75$

$T_y = T \operatorname{sen}(90-\theta_2) = T\cos\theta_2$ $\qquad \theta_2 = 36{,}86°$; $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{3}{5}$

$\overline{DB} = \overline{BC} \operatorname{sen}\theta_2 = 5 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3 \Rightarrow \overline{AD} = 8\frac{1}{3} - 3 = 5\frac{1}{3}'$

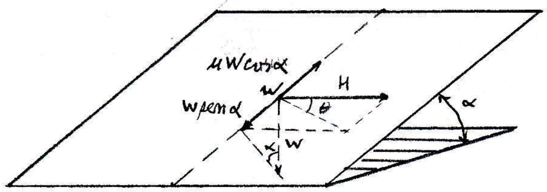
$\overline{AC}^2 = \left(8\frac{1}{3}\right)^2 + 5^2 - 2\, 8\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \cos(90 - \theta^2) \Rightarrow \overline{AC} = 6\frac{2}{3}'$

$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{5\frac{1}{3}}{6\frac{2}{3}} = 0{,}8 \rightsquigarrow \theta_1 = 53{,}13°$ pelo que $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 53{,}13 + 36{,}86 = 90°$

$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ e então $W = W_1 \cos\theta_1 = 1 \times 0{,}6 = 0{,}6$ kg peso

$T = W_1 \cos\theta_2 = 1 \cdot \cos 36{,}86 = 0{,}8$ kg peso

9.20



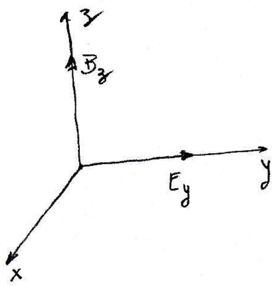
A peso W desloca-se quando $H > H_{min}$ dado por: $\sqrt{H_m^2 + W^2 sen^2\alpha} = \mu W \cos\alpha$ com $\mu = 2\,tg\alpha$

$$\sqrt{H_m^2 + W^2 sen^2\alpha} = 2\,tg\alpha\, W\cos\alpha$$

$$\sqrt{H_m^2 + W^2 sen^2\alpha} = 2W sen\alpha \;;\; H_m^2 + W^2 sen^2\alpha = 4W^2 sen^2\alpha \;;\; H_m = \sqrt{3}\, W sen\alpha$$

O ângulo θ que é o desvio da trajectória do peso W em relação à direcção de H vem dado por: $tg\,\theta = \frac{W sen\alpha}{\sqrt{3}\, W sen\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\theta = 30°$

9.22



$$\vec{F}_B = q\,\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad \vec{F}_E = q E_y \hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \ddot{r} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{F}_B = q\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = q v_y B_z \hat{i} - q v_x B_z \hat{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_E = q v_y B_z \hat{i} + q(E_y - v_x B_z)\hat{j} = m\ddot{x}\hat{i} + m\ddot{y}\hat{j} + m\ddot{z}\hat{k}$$

a) $F_x = m\ddot{x} = q v_y B_z \qquad F_y = m\ddot{y} = q(E_y - v_x B_z) \qquad F_z = m\ddot{z} = 0$

b) ① $x' = x - \frac{E_y}{B_z}t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad \ddot{x} = \frac{q}{m} v_y B_z$ e de ③ e ② vem $\ddot{x}' = \frac{q}{m}\dot{y}' B_z$

② $\dot{x}' = \dot{x} - \frac{E_y}{B_z} \qquad \dot{y}' = \dot{y} \qquad \dot{z}' = \dot{z} \qquad \ddot{y} = \frac{q}{m}(E_y - \dot{x}B_z)$ e vem: $\ddot{y}' = \frac{q}{m}\left(E_y - \left(\dot{x}' + \frac{E_y}{B_z}\right)B_z\right) =$

③ $\ddot{x}' = \ddot{x} \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z} \qquad \ddot{z} = 0 \qquad = -\frac{q}{m}\dot{x}' B_z$

$$m\ddot{x}' = q\, v_{y'} B_z = F_{x'}$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{q}{m} v_{x'} B_z = F_{y'}$$

$$m\ddot{z}' = 0 = F_{z'}$$

c) Trajectória da partícula:

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} = \omega\dot{y} \;;\; \frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \;;\; \frac{d^2v_x}{dt^2} = \omega\frac{dv_y}{dt} \;;\; \frac{d^2v_x}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{E_y}{B_z} - v_x\right) \;;\; \frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = \omega^2\frac{E_y}{B_z} \quad Ⓐ$$

$$\ddot{y} = \frac{qB_z}{m}\left(\frac{E_y}{B_z} - \dot{x}\right) = \omega\left(\frac{E_y}{B_z} - \dot{x}\right) \;;\; \frac{dv_y}{dt} = \omega\left(\frac{E_y}{B_z} - v_x\right)$$

Vamos integrar a eq. Ⓐ. Há uma solução homogénea e uma solução forçada.

$$v_{x_h} = A\cos\omega t + B\, sen\,\omega t$$

$v_{x_f} = K$ que substituindo na eq. Ⓐ dá $\omega^2 K = \omega^2\frac{E_y}{B_z}$ ou $K = \frac{E_y}{B_z}$

9,22 cont. contin. 9.22

A solução total é pois: $V_x = V_{x_h} + V_{x_f} = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{E_y}{B_z}$

Integrando mais uma vez vem: $x = A\frac{1}{\omega}\text{sen}\,\omega t - B\frac{1}{\omega}\cos\omega t + \frac{E_y}{B_z}t + X_0$

Condições iniciais: vamos supôr que em $t=0$ $V_x(t=0)=0$ e $x(t=0)=0$ e $y(t=0)=0$

Então: $V_x(t=0) = 0 = A + \frac{E_y}{B_z} \Rightarrow A = -\frac{E_y}{B_z}$ e então $x(t) = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\text{sen}\,\omega t - B\frac{1}{\omega}\cos\omega t + \frac{E_y}{B_z}t + X_0$

$x(t=0) = 0 = -B\frac{1}{\omega} = 0 \Rightarrow B = 0$ e vem finalmente $x = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\text{sen}\,\omega t + \frac{E_y}{B_z}t$

donde $\dot{x} = -\frac{E_y}{B_z}\cos\omega t + \frac{E_y}{B_z}$ e $\ddot{x} = \frac{E_y}{B_z}\omega\,\text{sen}\,\omega t$ e da equação atrás

$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$ vem para $v_y = \frac{1}{\omega}\frac{E_y}{B_z}\omega\,\text{sen}\,\omega t = \frac{E_y}{B_z}\text{sen}\,\omega t$ que, integrando, dá:

$y = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\cos\omega t + Y_0$. Mas $y(t=0) = 0 = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega} + Y_0 = 0 \Rightarrow Y_0 = \frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}$ e vem

$y = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\cos\omega t + \frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}$

$x = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\text{sen}\,\omega t + \frac{E_y}{B_z}t$

ou: $\begin{cases} y - \frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega} = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\cos\omega t \\ x - \frac{E_y}{B_z}t = -\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\text{sen}\,\omega t \end{cases}$

Elevando ao quadrado e somando vem: $\left(y - \frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(x - \frac{E_y}{B_z}t\right)^2 = \left(\frac{E_y}{B_z}\frac{1}{\omega}\right)^2$

que é uma equação possível de uma ciclóide.