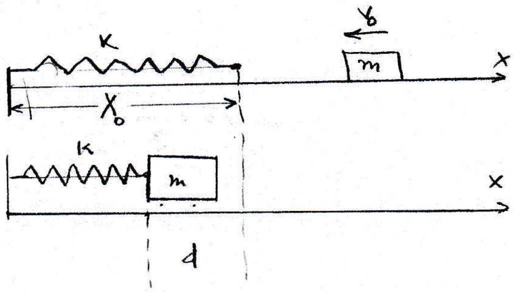
10.1 | 10.1



En. cinética é convertida em energia potencial da mola, isto é: $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k d^2$

pelo que $d^2 = \frac{m}{k} v_0^2$ e $d = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$

10.2 | 10.2

Se a mola tem um comportamento linear tal significa que a razão entre a força e o deslocamento é constante, isto é, $\frac{F}{x} = k =$ constante.

10.3 | 10.3

Pg 13.9 Vol I das "Lectures..."

10.4 | 10.4

En. cinética + En. potencial à superfície da Terra =

= En. cinética + En. potencial à distância de 10^6 mi, ou seja

$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{GMm}{d}$ com $v = 8\ mi\,s^{-1}$ R = Raio da Terra e $d = 10^6$ mi

$v^2 - \frac{2GM}{R} = v'^2 - \frac{2GM}{d}$; $v'^2 = v^2 - \frac{2GM}{R^2} R + \frac{2GM}{R^2}\frac{R^2}{d} = v^2 - 2gR + 2g\frac{R^2}{d}$

$\therefore$ $v'^2 = v^2 - 2g\left(R - \frac{R^2}{d}\right)$; $v'^2 = 8^2 - 2 \cdot 6{,}09 \cdot 10^{-3}\left(3964{,}3 - \frac{(3964{,}3)^2}{10^6}\right) = 15{,}9$ $\quad v' = 3{,}988\ mi\,s^{-1}$

$g = 9{,}8\ m s^{-2} = 0{,}00609\ mi\, s^{-2}$ $\quad R = 6{,}38 \cdot 10^6\ m = 6{,}38 \cdot 10^6 \frac{8\ mi}{1{,}2875 \cdot 10^4 m} = 3964{,}3\ mi$

Velocidade à distância de 10^6 mi $= 3{,}988\ mi\ s^{-1}$

10.5 | 10.5

$F_C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{R^2}$ $\quad F = -\frac{dU}{dx}$ $\quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = 8{,}9875 \cdot 10^9 \frac{1\ C}{6 \cdot 10^6} \simeq 1500$ Volt

---

10.6 | 10.6

$U = 10^6$ volt $\quad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ $\quad Q = 4\pi\varepsilon_0 V R = (8{,}975 \cdot 10^9)^{-1} \cdot 10^6 \cdot 0{,}5 = 55{,}6\,\mu C$

10.7 | 10.7

$\frac{F}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{1}{r} = U\frac{1}{r}$ $\quad U = E \cdot r = 31 \cdot 10^5 \frac{V}{m} \cdot 0{,}1\ m = 310$ kVolt

$\boxed{10.8}$ $\boxed{10.8}$

$F = 3+4x$ N $\quad 3+4x = 6\cdot\ddot{x} \quad \ddot{x} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$

$m = 6$ kg $\quad$ Soluçao homogénea, isto é, a soluçao de $\ddot{x}_h - \frac{2}{3}x_h = 0$

Faça-se $x_h = \mathbb{R}[X_h e^{st}]$, isto é, a soluçao x_h é a parte real da soluçao homogénea complexa $X_h e^{st} = X$, que derivando dá $\dot{X} = sX_h e^{st}$ e $\ddot{X} = s^2 X_h e^{st}$ e substituindo: $s^2 X_h e^{st} - \frac{2}{3}X_h e^{st} = 0$ donde $s^2 - \frac{2}{3} = 0$; $s = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Então $x_h = C_1 e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t}$ pois se $e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t}$ e $e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}$ são soluções da equação homogénea então a sua combinação linear é também solução da mesma equação.

Soluçao particular: a soluçao particular é do mesmo tipo que o 2º membro. Como o 2º membro é constante $(=\frac{1}{2})$ a soluçao particular é também constante. Seja pois $x_p = K =$ constante. Derivando e substituindo dá: $-\frac{2}{3}x_p = \frac{1}{2}$ donde $x_p = -\frac{3}{4}$.

Soluçao total: é a soma das duas soluções obtidas: $x = x_h + x_p = C_1 e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t} - \frac{3}{4}$

Condições iniciais: em $t=0$ $x=0$ e a velocidade $\dot{x}=0$. Então vem:

$x(t=0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{4} = 0 \quad$ e $\quad \dot{x} = C_1\sqrt{\frac{2}{3}}e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} - C_2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}$

$\dot{x}(t=0) = C_1\sqrt{\frac{2}{3}} - C_2\sqrt{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$; e de $C_1 + C_2 = \frac{3}{4}$ vem $2C_1 = \frac{3}{4}$, $C_1 = \frac{3}{8} = C_2$

Soluçao é pois: $x = \frac{3}{8}e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} + \frac{3}{8}e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}2\cdot\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}}{2} - \frac{3}{4}$

Mas $\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}}{2} = \cosh\sqrt{\frac{2}{3}}t$ e então $x = \frac{6}{8}\cosh(\sqrt{\frac{2}{3}}t) - \frac{3}{4}$

Quanto à velocidade vem: $\dot{x} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\,2\,\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}t} - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}t}}{2}$

e então $\dot{x} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\,2\sinh(\sqrt{\frac{2}{3}}t)$

Quando x fôr igual a 3 m qual é a velocidade?

$x = \frac{6}{8}\cosh\sqrt{\frac{2}{3}}t - \frac{3}{4} = 3$; $\cosh(\sqrt{\frac{2}{3}}t) = \frac{8}{6}(3+\frac{3}{4}) = \frac{4}{3}\,\frac{15}{4} = 5$

Da relaçao $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ vem $\sinh = \sqrt{\cosh^2 - 1} = \sqrt{5^2-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

que substituindo na equaçao da velocidade dá: $\dot{x} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 2\cdot 2\sqrt{6} = \frac{12}{8}\sqrt{\frac{2\cdot 6}{3}} = \underline{3\ m s^{-1}}$

10.8 Contin — Contin 10.8

a.1) Em $x=3$ a força é: $F = 3+4x = 3+4\cdot 3 = 15$ N

Mas $F = m\,a$ pelo que $15 = 6\,a$ donde a aceleração é $a = \frac{15}{6} = 2{,}5\ m s^{-2}$

a.2) A potência em logo em $x=3$

$dW = F\cdot dx \quad \frac{dW}{dt} = \text{Potência} = F\frac{dx}{dt} = F\cdot v = 15\cdot 3 = 45\ J s^{-1} = 45\ W$

b.1) Agora a força é $F = (3+4t)$ Newton e então $F = m\ddot{x}$ e vem:

$\ddot{x} = \frac{3+4t}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}t \;;\; \dot{x} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}t + C$. Mas $\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\dot{x} = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{2}t \qquad \dot{x}(t=3) = \frac{1}{3}3^2 + \frac{1}{2}3 = 3 + 1{,}5 = 4{,}5\ m s^{-1}$

b.2) $\ddot{x}(t=3) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}3 = 2{,}5\ m s^{-2}$

b.3) $\text{Potencia} = \frac{dW}{dt} = F\cdot v = (3+4\cdot 3)\,4{,}5 = 67{,}5$ Watt

---

10.9 — 10.9

$F = 1{,}5\,y\,\hat{i} + 3x^2\,\hat{j} - 0{,}2(x^2+y^2)\,\hat{k}$

Posição em $t=0$ $\vec{r}(t=0) = 2\hat{i} + 3\hat{j}$

Velocidade em $t=0$ $\dot{r}(t=0) = v(t=0) = 2\hat{j} + \hat{k}$

a) Qual a força na partícula $m = 1$ kg em $t=0$? Em $t=0$ $x=2$ e $y=3$ donde

$F = 1{,}5\cdot 3\,\hat{i} + 3\cdot 2^2\,\hat{j} - 0{,}2(2^2+3^2)\,\hat{k} = 4{,}5\,\hat{i} + 12\,\hat{j} - 2{,}6\,\hat{k}$

b) Aceleração em $t=0$ $\quad a = \frac{F}{m} = 4{,}5\,\hat{i} + 12\,\hat{j} - 2{,}6\,\hat{k}$

c) Energia cinética: $T = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}m(2^2+1^2) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5 = 2{,}5$ Joules

d) Taxa de variação da energia cinética: $\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) = m\,v\frac{dv}{dt} = 1\cdot(2\hat{j}+\hat{k})(4{,}5\hat{i}+12\hat{j}-2{,}6\hat{k}) =$

$= 0 + 24 - 2{,}6 = 21{,}4$ Joules $s^{-1} = 21{,}4$ Watt

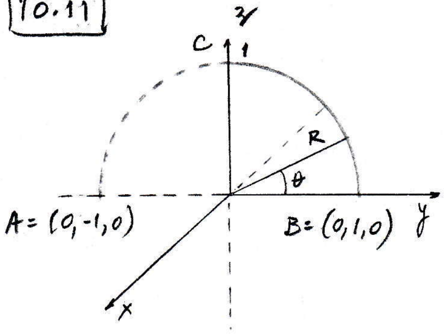
10.10 — 10.10

) $\vec{r}(0+\Delta t) = \vec{r}(0) + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Delta t = 2\hat{i} + 3\hat{j} + (2\hat{j}+\hat{k})0{,}01 = 2\,\hat{i} + 3{,}02\,\hat{j} + 0{,}01\,\hat{k}$

) $\vec{v}(0+\Delta t) = v(0) + \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = 2\hat{j} + \hat{k} + (4{,}5\hat{i} + 12\hat{j} - 2{,}6\hat{k})\,0{,}01 = 0{,}045\hat{i} + 2{,}12\hat{j} + 0{,}974\hat{k}$

) $T = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}\,1\cdot(0{,}045^2 + 2{,}12^2 + 0{,}974^2) = 2{,}7$ Joules

10.11 | 10.11



$\vec{F} = 1{,}5\,y\,\hat{i} + 3x^2\,\hat{j} - 0{,}2\,(x^2+y^2)\,\hat{k}$

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

a) Trajecto entre $(0,-1,0)$ e $(0,1,0)$ é o segmento de recta $\overline{AB}$, para o qual $x=0$ e $z=0$ e então

$F = 1{,}5\,y\,\hat{i} - 0{,}2\,y^2\,\hat{k}$ e $d\vec{r} = dy\,\hat{j}$

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (1{,}5\,y\,\hat{i} - 0{,}2\,y^2\,\hat{k})(dy\,\hat{j}) = 0 \Rightarrow W = 0$ Nota: $\vec{F}$ é $\perp$ à recta $\overline{AB}$

b) A trajectória é o arco ACB para o qual $x=0$ e $y^2+z^2=1$

$d\vec{r} = dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ e $\vec{F} = 1{,}5\,y\,\hat{i} - 0{,}2\,y^2\,\hat{k}$ e então

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (1{,}5\,y\,\hat{i} - 0{,}2\,y^2\,\hat{k})(dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) = -0{,}2\,y^2 dz$

$W = -0{,}2\int_0^1 y^2 dz$ mas $z^2 = 1-y^2$ $\quad 2z\,dz = -2y\,dy$; $dz = -\frac{y}{z}dy = -\frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}} = \mp\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy$

e como só interessa a curva de cima vem $dz = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy$

$$W = -0{,}2\int_{-1}^{1} y^2\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -0{,}2\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}dy = -0{,}2\left[-\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}\,(2+y^2)\right]_{-1}^{1} = \frac{0{,}2}{3}\left[0-0\right] = 0$$

OU AINDA: $y = R\cos\theta \quad dy = -R\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$ com $R=1$

$z = R\,\text{sen}\,\theta \quad dz = R\cos\theta\,d\theta$

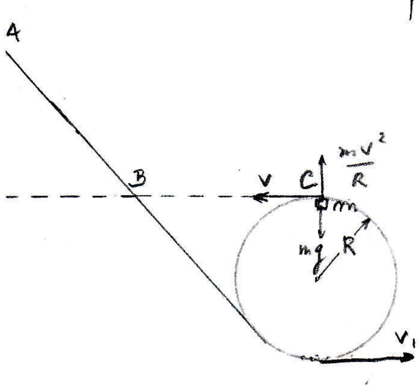
$\vec{r} = dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} = (-R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j} + R\cos\theta\,\hat{k})\,d\theta$

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -0{,}2\,y^2 dz = -0{,}2\cdot R^2\cos^2\theta\,R\cos\theta\,d\theta = -0{,}2\cos^3\theta\,d\theta$

$$W = -0{,}2\int_{\pi}^{0}\cos^3\theta\,d\theta = -0{,}2\left[\frac{1}{12}(9\sin\theta + \sin 3\theta)\right]_{\pi}^{0} = 0$$

A força é conservativa: O trabalho realizado não depende do caminho entre A e B

10.12 | 10.12



Para que a massa m não se separe do círculo então

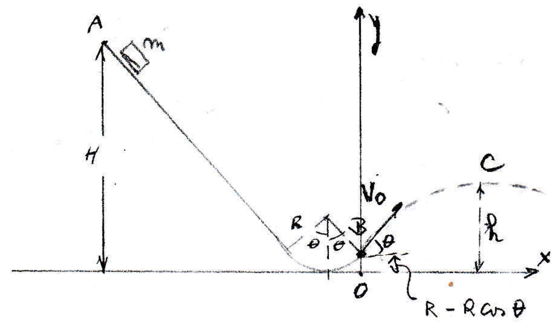
$\frac{mv^2}{R} > mg$ ou seja a velocidade deve ser $v > \sqrt{gR}$

A energia potencial que perde entre A e B deve ser igual à energia cinética de m em C, ou seja:

$mgH \geq \frac{1}{2}mv^2$; $gH \geq \frac{1}{2}gR$ ou $H \geq \frac{R}{2}$

OU: $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R = mg(H+2R)$ e se $v = \sqrt{gR}$ dá $H = \frac{R}{2}$

10.13 | 10.13



A diferença de energia potencial entre A e B é igual à energia cinética em B:

$$mgH - mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{donde vem} \quad v_0 = \sqrt{2(H - R(1-\cos\theta))g}$$

Com o sistema de eixos desenhado vamos calcular a componente vertical da velocidade e da distância.

$$\ddot{y} = -g \; ; \; \dot{y} = -gt + C \quad \text{e para } t=0 \quad \dot{y}(t=0) = V_0 \operatorname{sen}\theta \; ; \; \dot{y} = -gt + V_0 \operatorname{sen}\theta$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta\, t + C \quad \text{e para } t=0 \quad y(t=0) = R(1-\cos\theta) \; ; \; y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \operatorname{sen}\theta\, t + R(1-\cos\theta)$$

No ponto C da altura máxima a velocidade vertical anula-se e vem:

$$\dot{y} = 0 = -gt + V_0 \operatorname{sen}\theta \quad \text{e então o ponto C é atingido no tempo } t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$y\left(t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) = h = -\frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} + \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} + R(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} + R(1-\cos\theta)$$

$$h = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{g}} \operatorname{sen}^2\theta \, \cancel{2}(H - R(1-\cos\theta))\cancel{g} + R(1-\cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta\left[H - R(1-\cos\theta)\right] + R(1-\cos\theta) =$$

$$= H\operatorname{sen}^2\theta - R\operatorname{sen}^2\theta + R\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + R - R\cos\theta = H\operatorname{sen}^2\theta + R(1-\operatorname{sen}^2\theta) + R\cos\theta(\operatorname{sen}^2\theta - 1) =$$

$$= H\operatorname{sen}^2\theta + R\cos^2\theta - R\cos\theta\cdot\cos^2\theta = H\operatorname{sen}^2\theta + R\cos^2\theta - R\cos^3\theta$$

b) A velocidade no ponto mais baixo é dada por:

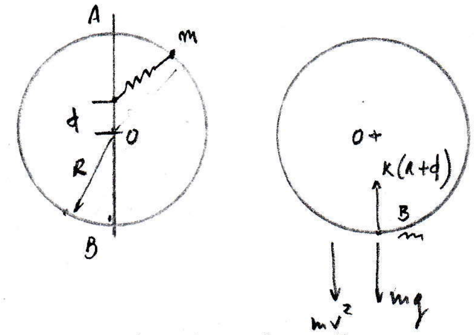
$$\frac{1}{2} m v^2 = mgH \quad v^2 = 2gH \quad v = \sqrt{2gH}$$

A força exercida no ponto mais baixo é a soma da força centrífuga $\frac{mv^2}{R}$ mais o peso do corpo, e vem:

$$F = \frac{mv^2}{R} + mg = \frac{m}{R} 2gH + mg = mg\left(\frac{2H}{R} + 1\right)$$

10.14 **10.14**

$$\underbrace{\frac{1}{2}K(R-d)^2+2mgR}_{\text{En. potencial em A}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{En. cinética em B}}+\underbrace{\frac{1}{2}K(R+d)^2}_{\text{En. potencial em B}}$$



No ponto B: $K(R+d)=mg+\frac{mv^2}{R}$

$$d=\frac{1}{K}\left[mg-KR+\frac{mv^2}{R}\right]$$

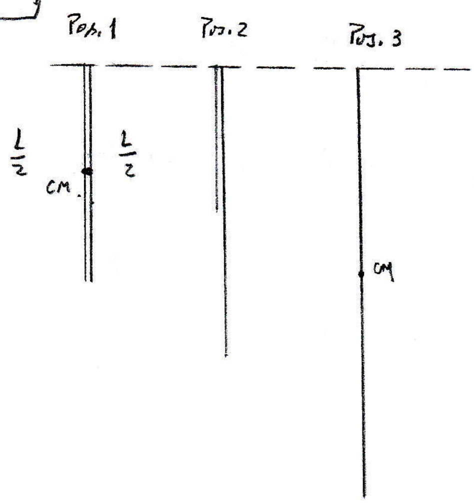
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}K\left[(R-d)^2-(R+d)^2\right]+2mgR$$

$$mv^2=K\Big[\underbrace{\cancel{R^2}-2Rd+\cancel{d^2}-\cancel{R^2}-2Rd-\cancel{d^2}}_{-4Rd}\Big]+4mgR \qquad mv^2=-4KRd+4mgR \quad \frac{mv^2}{R}$$

$$d=\frac{1}{K}\left[mg-KR-4Kd+4mg\right]=\frac{1}{K}\left[5mg-KR-4Kd\right]=\frac{5}{K}mg-R-4d$$

$$5d=\frac{5}{K}mg-R \qquad \boxed{d=\frac{mg}{K}-\frac{R}{5}}$$

10.15 **10.15**



A perda de energia potencial, que resulta da descida do Centro de Massa do cabo completo, vai ser igual ao ganho em energia cinética do cabo.

En. potencial na Pos. 1: $U(1)=M\,Y_{CM}(\text{Pos.}1)\cdot g$

$Y_{CM}(\text{Pos.}1)=-\frac{L}{4}$

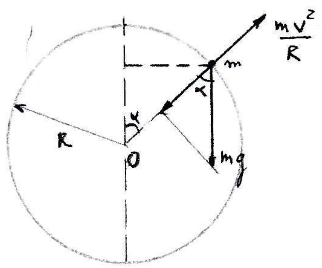
En. potencial na Pos. 3: $U(3)=M\,Y_{CM}(\text{Pos.}3)\,g$

$Y_{CM}(\text{Pos.}3)=-\frac{L}{2}$

Então $U(1)-U(3)=M\left(-\frac{L}{4}\right)g-M\left(-\frac{L}{2}\right)g=Mg\left[-\frac{L}{4}+\frac{L}{2}\right]=Mg\frac{L}{4}$

donde vem: $Mg\frac{L}{4}=\frac{1}{2}Mv^2$ do que resulta $v=\sqrt{\frac{gL}{2}}$

10.16



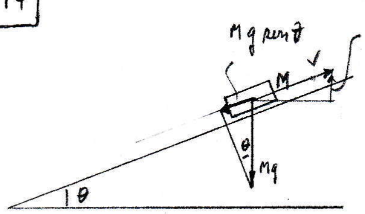
m deixará de contactar com a esfera de raio R quando $\frac{mv^2}{R} > mg\cos\alpha$. É α que queremos conhecer pelo que temos de saber a velocidade v. Esta pode ser calculada igualando a perda de energia potencial ($= mg(R - R\cos\alpha) = mgR(1-\cos\alpha)$), ao ganho em energia cinética ($= \frac{1}{2}mv^2$)

$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\alpha)$ e como $\frac{mv^2}{R} > mg\cos\alpha$ $\quad mv^2 > mgR\cos\alpha$ vem

$2mgR(1-\cos\alpha) > mgR\cos\alpha \quad 2 - 2\cos\alpha > \cos\alpha;\ 2 > 3\cos\alpha;\ \cos\alpha < \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48{,}2^\circ$

Isto é; qualquer que seja m, g ou R a massa deixa de contactar com a esfera sempre num ângulo igual a $48{,}2^\circ$

10.17



Na subida o carro tem de vencer a força resistente $F = Mg\,\text{sen}\,\theta$. O trabalho realizado é $dW = F.dl$ e a potência despendida é $\frac{dW}{dt} = P = F.\frac{dl}{dt} = F.v$. Então vem: $P = Mg\,\text{sen}\,\theta . v$

A potência disponível do carro é $85 - 20 = 65$ hp $= 65 \cdot 735{,}5$ W $= 47807{,}5$ W para manter a velocidade de 30 mph $= 4{,}828 \cdot 10^4$ m h^{-1} $= 13{,}4$ m s^{-1}.

$P = Mg\,\text{sen}\,\theta\, v \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{47807{,}5}{1{,}36 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 13{,}4} = 0{,}267$ em que $M = 3000$ lb $= 1{,}36 \cdot 10^3$ kg

$\theta = \text{arc sen}\, 0{,}267 = 15{,}5^\circ$

Nota: A relação $P = Mg\,\text{sen}\,\theta\, v$ pode ter outra interpretação, pois $v\,\text{sen}\,\theta$ é a componente vertical da velocidade que multiplicada por Mg dá o aumento de energia potencial por unidade de tempo que é a potência adicional que o motor do carro tem de fornecer.

10.18 **10.18**

$$P = F \cdot v \qquad F = \frac{P}{v} = \frac{120 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3/3600} = 7200\ N$$

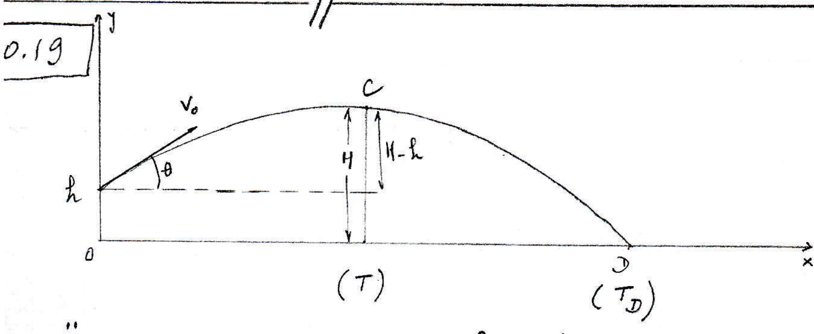
Mas $F = m \cdot a$ donde $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{7200}{1000} = 7{,}2\ m\,s^{-2}$

$a = 7{,}2$; $v = at$ $\quad v = 100\ km/h = 10^5/3600 = 27{,}7\ m\,s^{-1}$

$$T = \frac{v}{a} = \frac{27{,}7}{7{,}2} = 3{,}85\,s.$$

Isto é, um carro com 120 kW = 162 cv de potência e que pesa 1000 kg poderia ir dos 0 aos 100 km/h em 3,85 s na melhor das hipóteses.

10.19 **10.19**



	M (kg)	Distância (m)
~~Peso~~	7,25	19,30
disco	2	59,87
dardo	0,8	86,09

$\ddot{y} = -g$ $\qquad \theta = 45° \Rightarrow tg\,\theta = 1$

$\dot{y} = -gt + V_0 \,sen\,\theta$ $\qquad sen\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0\, sen\,\theta\, t + h$ $\qquad cos\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Em C a velocidade vertical anula-se: $\dot{y} = 0 = -gT + V_0\, sen\,\theta \qquad T = \dfrac{V_0\, sen\,\theta}{g}$

A altura H virá: $H = -\frac{1}{2} g \dfrac{V_0^2\, sen^2\theta}{g^2} + \dfrac{V_0^2\, sen^2\theta}{g} + h = \frac{1}{2}\dfrac{V_0^2\, sen^2\theta}{g} + h$

A energia fornecida pelo atleta é $Mg(H-h) = M\cancel{g}\frac{1}{2}\dfrac{V_0^2\, sen^2\theta}{\cancel{g}} = \frac{1}{2} M V_0^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M V_0^2$

Falta conhecer V_0 o que faremos com a distância D que é atingida.

$x = V_0 \cos\theta\, t$ e para $t = T_D$ vem $x = D$, donde: $D = V_0 \cos\theta\, T_D$ ou $T_D = \dfrac{D}{V_0 \cos\theta}$

Para $t = T_D$ $y = 0$ o que permite escrever:

$$0 = -\frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_0^2 \cos^2\theta} + \cancel{V_0}\, sen\,\theta \frac{D}{\cancel{V_0} \cos\theta} + h \;;\; \frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_0^2 \cos^2\theta} = D\, tg\,\theta + h \;;\; \cancel{\tfrac{1}{2}} g \frac{D^2}{V_0^2 \,\cancel{\frac{1}{2}}} = D + h$$

donde: $V_0^2 = g \dfrac{D^2}{D+h}$ e $H - h = \frac{1}{2}\dfrac{V_0^2\, sen^2\theta}{g} = \frac{1}{2}\frac{1}{g} g \dfrac{D^2}{D+h} sen^2\theta = \frac{1}{4}\dfrac{D^2}{D+h}$

Pelo que: $V_0 = D\sqrt{\dfrac{g}{D+h}}$ $\quad H - h = \frac{1}{4}\dfrac{D^2}{D+h}$ $\quad T_D = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{D+h}{g}}$ e $E = Mg(H-h)$

e a tabela a seguir mostra os resultados para as 3 situações:

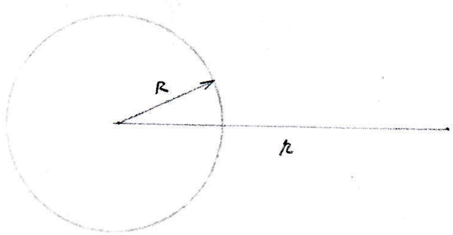
10.19 10.19

	M (Kg)	DISTÂNCIA (m)	$V_0 = D\sqrt{\frac{g}{D+h}}$ (ms^{-1})	$H = \frac{1}{4}\frac{D^2}{D+h} + h$	Energia (Joule)
PESO	7,25	19,30	13,15	6,21	313
DISCO	2	59,87	23,86	16,33	284
DARDO	0,8	86,09	28,7	22,88	165

Nota: o resultado obtido para a energia é metade do que a solução do livro apresenta. Why?

10.20 10.20

Caso de uma capa esférica de massa M



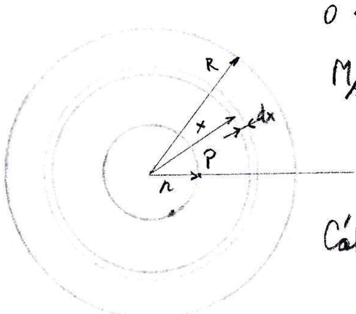
$r > R \quad U = -\frac{GM}{r}$

$r < R \quad U = -\frac{GM}{R}$ que é pois constante no interior

Caso de uma esfera sólida: $r > R \quad U = -\frac{GM}{r}$

$r < R \quad U = ?$ e que é o nosso problema.

O potencial em P é a soma do potencial U_i devido à esfera de massa M_r e o potencial das capas esféricas "acima" de P que designo por U_e



Mas $U_i = -\frac{GM_r}{r}$ com $M_r = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3}{R^3} M$ donde $U_i = -\frac{GM r^2}{R^3}$

Cálculo de U_e: $dM = \frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{3 M x^2 dx}{R^3}$

$dU_e = -\frac{G\,dM}{x} = -\frac{3GM\, x\, dx}{R^3}$ que integrando entre $x = r$ a $x = R$ vem

$$U_e = -\frac{3GM}{R^3}\int_r^R x\,dx = -\frac{3GM}{2R^3}\, x^2\Big|_r^R = -\frac{3GM}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right)$$

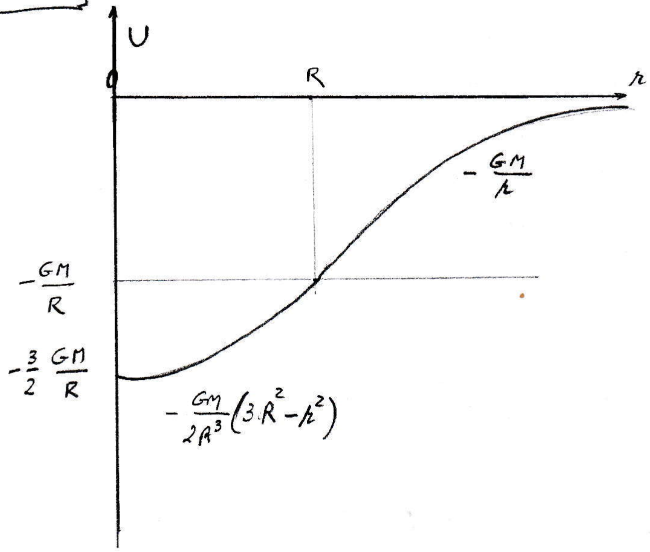
Somando $U_e + U_i$ vem $U_{r<R} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{3}{2}\frac{GM}{R^3} r^2 - \frac{GM r^2}{R^3} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{1}{2}\frac{GM}{R^3} r^2 = -\frac{GM}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$

Resumo: $U(r > R) = -\frac{GM}{r}$ $\qquad g(r) = -\frac{d}{dr} U = \frac{-GM}{r^2}\hat{r} = \frac{-GM}{r^3} r\,\hat{r} = \frac{-GM}{r^3}\vec{r}$

$U(r < R) = -\frac{GM}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$; $g(r) = -\frac{d}{dr}\left(U(r<R)\right) = \frac{-d}{dr}\left(\frac{GM}{2R^3} r^2\right) = -\frac{GM}{R^3}\vec{r}$

10.20 Contin

Contin. 10.20



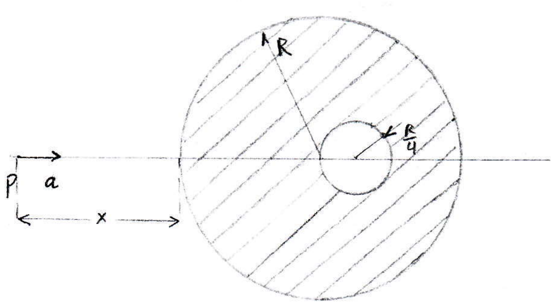
10.21

10.21

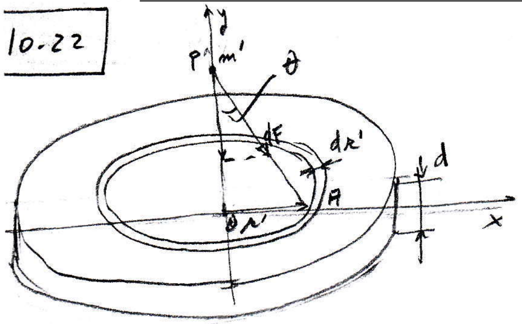
$$F_1 = \frac{GMm'}{(x+R)^2} \quad \text{con} \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

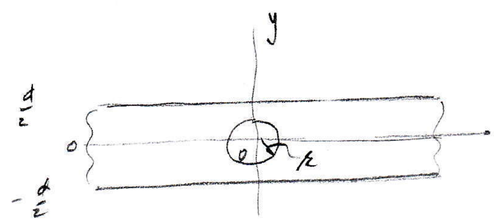
$$F_2 = \frac{Gmm'}{\left(x+R+\frac{R}{4}\right)^2} \quad \text{con} \quad m = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3 \rho$$

$$\frac{F_1-F_2}{m'} = a = G\left[\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{(x+R)^2} - \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{4^3}\rho}{\left(x+\frac{5}{4}R\right)^2}\right] = \frac{4}{3}\pi\rho G\left[\frac{R^3}{(x+R)^2} - \frac{(R/4)^3}{\left(x+\frac{5}{4}R\right)^2}\right]$$



10.22 | 10.22





A chapa de dimensões infinitas e espessura d pode ser entendida como um cilindro de raio a tendendo para ∞.

A força gravítica elementar em P causada pelo anel de raio r e espessura dr é: $dF = -\frac{Gm'dm}{\overline{AP}^2}$ em que $dm = \rho d 2\pi r' dr'$. Esta força pode ser decomposta em duas: uma paralela à chapa e outra perpendicular. A resultante das forças paralelas vão anular-se umas com as outras pela simetria da figura. As forças perpendiculares com a direcção do eixo yy, vão reforçar-se. São pois estas que nos interessa calcular

$$dF_\perp = -\frac{Gm'dm}{|AP|^2}\cos\theta = -\frac{m'G\rho d\, 2\pi\, y\, r'dr'}{(y^2+r'^2)\sqrt{y^2+r'^2}} \quad \text{pois } \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+r'^2}}$$

A força gravítica total em P é o integral quando r varia de 0 a +∞.

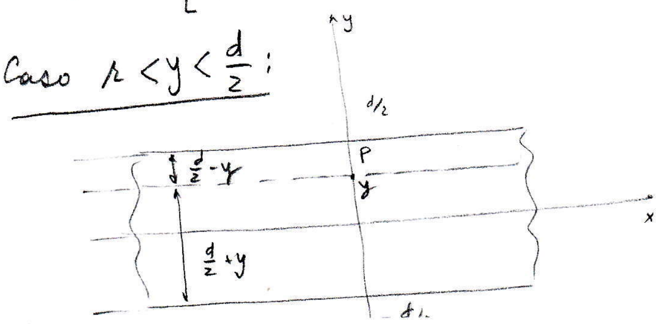
$$F_\perp = -m'2\pi G\rho d\, y\int_0^\infty \frac{r'}{(y^2+r'^2)^{3/2}}dr' = -m'2\pi G\rho d y\left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2+y^2}}\Big|_0^\infty\right] = -m'2\pi G\rho d y\left[-0+\frac{1}{y}\right]$$

e então $F_\perp = -m'2\pi G\rho d y\frac{1}{y} = -m'2\pi G\rho d$

Esta força $F_\perp$ foi calculada sem ter em conta a cavidade esférica de raio r no seu interior. Esta cavidade contribui com $F_O = +G\frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{m'}{y^2}$ pelo que finalmente a força gravítica total será $F_y = -m'2\pi G\rho d + m'\frac{4}{3}\pi G\rho\frac{r^3}{y^2}$ ou

$$F_y = m'\left[-2\pi G\rho d + \frac{4\pi G\rho r^3}{y^2}\right] \quad \text{para o caso de } y > \frac{d}{2}$$

Caso $r < y < \frac{d}{2}$:



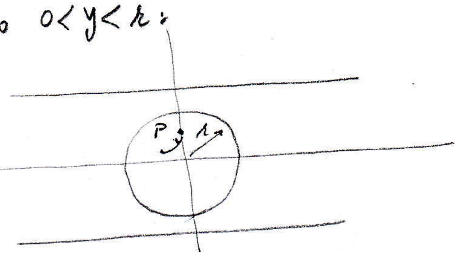
$\boxed{10.22}$ $\boxed{10.22}$

No ponto P há 2 forças gravíticas: uma provocada pela chapa de espessura $\frac{d}{2}+y$ que aponta para baixo $F_1 = -m' 2\pi \rho G\left(\frac{d}{2}+y\right)$ que se usou a expressão já calculada atrás, e outra que aponta para cima $F_2 = -2\pi\rho G\left(\frac{d}{2}-y\right)$. A soma das duas, dá: $F_1+F_2 = -m'2\pi\rho G\left[\left(\frac{d}{2}+y\right)-\left(\frac{d}{2}-y\right)\right] = -m'2\pi\rho G\, 2y = -m'4\pi\rho G y$

A cavidade esférica oca não foi tida em conta neste cálculo. À semelhança do que se disse antes, importa reduzir (em grandeza) a força F_1+F_2 ou seja somar a contribuição da esfera de raio r e que é de: $m'\frac{4\pi G\rho r^3}{3y^2}$. Então vem:

$$F_y = -m'4\pi\rho G y + \frac{m'4\pi\rho G r^3}{y^2} = m'\left[-4\pi\rho G y + \frac{4\pi\rho G r^3}{3y^2}\right] \quad \text{para } r<y<\frac{d}{2}$$

Caso $0<y<r$:



Se não existisse a cavidade esférica então a força gravítica em P seria: $F_1 = -m'4\pi\rho G y$ como se viu atrás.

Importa agora calcular qual é a contribuição para F da esfera de raio r e densidade ρ, para o ponto P situado no seu interior, isto é, para $y<r$. Ora, viu-se no problema $\boxed{10.20}$ que tal força era dada por: $F_2 = -\frac{GMm'}{R^3} r\hat{r}$ em que $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ e então vem: $F_2 = -\frac{4}{3}\pi \cancel{R^3}\rho G m' \frac{1}{\cancel{R^3}} r = -m'\frac{4\pi\rho G y}{3}$ que tem de ser subtraída a F_1, vindo então:

$$F = -m'4\pi\rho G y + m'\frac{4\pi\rho G y}{3} = m'\left[-4\pi G\rho y + \frac{4}{3}\pi\rho G y\right] \quad \text{para } 0<y<r$$

0.23 | 10.23

Dados do problema: 1. a trajectória é elíptica com semi-eixo maior a e excentricidade e

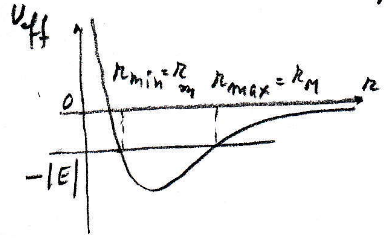
2. M é estacionário.

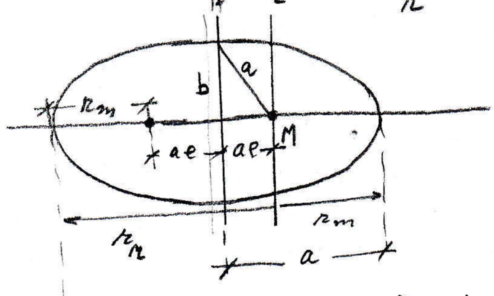
$E = E_K + U$ em que $U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}$ $\quad \alpha = GMm$

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$ mas $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r\hat{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{m}$ e então

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ pelo que $E_K = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r}$. Fazendo $U_{eff} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r}$ vamos desenhar a curva $U_{eff}(r)$:





Os valores de r_m e r_M podem ser obtidos como raízes da equação: $E = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r}$

Por outro lado a lei das áreas diz que $r^2\dot{\theta} = 2\frac{dA}{dt}$ ou $\ell = m r^2\dot{\theta} = 2m\frac{dA}{dt} = $ Constante

pelo que $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ e, substituindo na eq. da energia, vem: $E = \frac{1}{2} m r^2 \frac{\ell^2}{m^2 r^4} - \frac{\alpha}{r}$

ou: $E = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ que vamos resolver em ordem a r.

$$r^2 + \frac{\alpha}{E} r - \frac{\ell^2}{2mE} = 0 \qquad r = -\frac{\alpha}{2E} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} + \frac{4\ell^2}{2mE}} = \frac{\alpha}{2|E|} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{4\ell^2}{2m|E|}}$$

$$r_m = \frac{\alpha}{2|E|} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\ell^2}{m|E|}}$$

$$r_M = \frac{\alpha}{2|E|} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\ell^2}{m|E|}}$$

Somando e notando que $r_m + r_M = 2a$ vem $\frac{\alpha}{|E|} = 2a$ pelo que $|E| = \frac{\alpha}{2a} = \frac{GMm}{2a}$

Por fim como sabemos que para haver trajectórias fechadas a energia tem de ser negativa vem o resultado $E = -\frac{GMm}{2a}$

10.24 **10.24**

a) Da lei das áreas $r^2\dot{\theta} = 2\frac{dA}{dt}$ $mr^2\dot{\theta} = 2m\frac{dA}{dt} = \ell$ = Momento angular = c^{te}

$2m\,dA = \ell\,dt$ e integrando vem: $T = \frac{2m}{\ell}\pi ab$ em que πab é a área total que a elipse engloba.

Do problema e da figura atrás podemos escrever: $r_M - r_m = 2ae$

$2ae = \sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\ell^2}{m|E|}}$; $4a^2e^2 = \frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\ell^2}{m|E|}$ com $a = \frac{\alpha}{2|E|}$

$\cancel{4}\frac{\alpha^2}{\cancel{4}|E|^2}\cdot e^2 = \frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\ell^2}{m|E|}$; $e^2 = 1 - \frac{|E|^2}{\alpha^2}\frac{2\ell^2}{m|E|}$; $e^2 = 1 - \frac{2\ell|E|}{m\alpha^2}$; $1 - e^2 = \frac{2\ell^2|E|}{m\alpha^2}$

Da figura vem: $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2)$ e então $b = a\sqrt{1-e^2}$

Substituindo a e b na expressão de $T = \frac{2m}{\cancel{\ell}}\pi\frac{\alpha}{\cancel{2}|E|}\cdot\frac{\cancel{\alpha}}{2|E|}\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\alpha}}\frac{\sqrt{2|E|}}{\sqrt{m}}$

$T = \frac{\pi m\alpha\sqrt{2}\sqrt{|E|}}{2|E|^2\sqrt{m}} = \frac{\pi m^{1/2}\alpha}{2^{1/2}|E|^{3/2}}$ e de $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ vem $|E| = \frac{\alpha}{2a}$

$T = \frac{\pi m^{1/2}\alpha}{2^{1/2}\frac{\alpha^{3/2}}{2^{3/2}a^{3/2}}} = \frac{2\pi m^{1/2}}{\alpha^{1/2}}a^{3/2}$ $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{\alpha}a^3 = 4\pi^2\frac{m}{GMm}a^3 = 4\pi^2\frac{a^3}{GM}$

e então: $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3}$

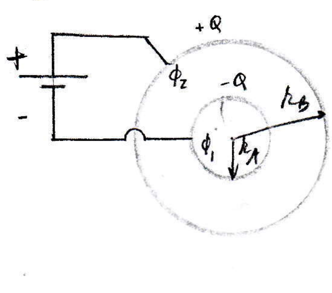
b) Atrás, na alínea anterior, obtivemos: $T = \frac{\pi m^{1/2}\alpha}{2^{1/2}|E|^{3/2}} = \frac{\pi GM m^{3/2}}{\sqrt{2}|E|^{3/2}}$ ou

$T = \frac{\pi GM}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{|E|}{m}\right)^{3/2}}$ $\boxed{T^2 = \frac{\pi^2G^2M^2}{2}\frac{1}{\left(\frac{|E|}{m}\right)^3}}$

// //

10.25 **10.25**

$V = \phi_2 - \phi_1 = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$ $E\cdot 4\pi r^2 = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$ (GAUSS)

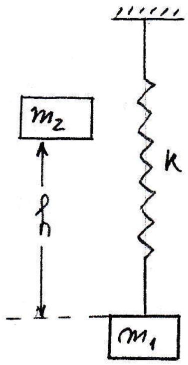


$V = \phi_2 - \phi_1 = -\int_{r_A}^{r_B}\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} r^{-2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

Mas $V = \frac{Q}{C}$ e vem $\frac{\cancel{Q}}{C} = \frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B}\right)$ pelo que:

$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_A r_B}{r_B - r_A}}$

10.26 | 10.26



$m_1 = 25 \cdot 10^{-3}$ Kg

$m_2 = 50 \cdot 10^{-3}$ Kg

$K = 15{,}3\ N\,m^{-1}$

$h = 9 \cdot 10^{-2}$ m

Velocidade antes do embate: $\frac{1}{2} m_2 v^2 = m_2 g h$

pelo que $v = \sqrt{2gh}$

Momento antes do embate: $50 \cdot 10^{-3} \cdot v = 50 \cdot 10^{-3} \sqrt{2gh}$

Momento depois do embate: $(50+25)10^{-3} \cdot V_0$

Conservação do momento: $(50+25)10^{-3} V_0 = 50 \cdot 10^{-3} \sqrt{2gh}$

e vem $V_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$

Energia cinética inicial depois do embate: $\frac{1}{2}(50+25) \cdot 10^{-3} \cdot V_0^2 =$

$= \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 75 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \cancel{2} \cdot 9{,}8 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 0{,}0294$ Joules

Energia potencial da mola na posição de H_{min} : $E_p = \frac{1}{2} K (\Delta H)^2$

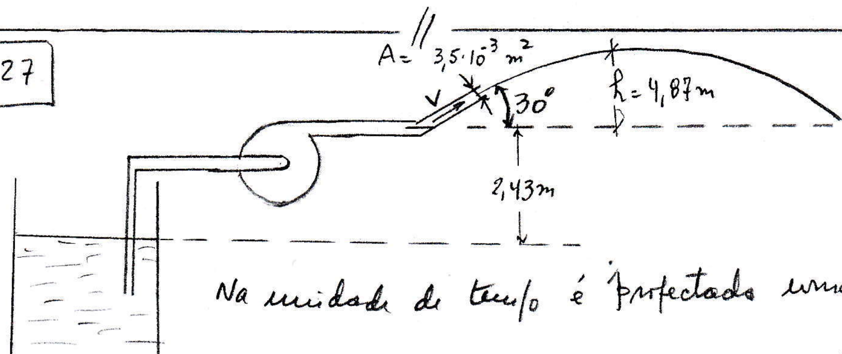
As duas energias devem ser iguais e vem: $\frac{1}{2} \cdot 15{,}3 \cdot (\Delta H)^2 = 0{,}0294$

ou $\Delta H = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0294}{15{,}3}} = 0{,}062\,m = 6{,}2$ cm

O deslocamento total da massa m_2 é pois de $9 + 6{,}2 = 15{,}2$ cm

Nota: a solução indica 19,2 cm, que é seguramente gralha!

10.27 | 10.27



Na unidade de tempo é projectada uma massa de água igual a:

$dm = \rho \cdot A \cdot v\,dt$ com ρ = densidade da água = 1000 kg m^{-3};

A igual à área do orifício; v = velocidade da água

Por outro lado a energia cinética à saída do orifício é igual a energia potencial dessa massa de água, e vem: $\frac{1}{2}\cancel{dm}(v\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cancel{dm} \cdot g \cdot h$

pelo que $v = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{2gh} = \frac{1}{\text{sen}\,30}\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}87} = 19{,}54\ m\,s^{-1}$

10.27 Contin. Contin. 10.27

A massa dm sofreu um aumento de cota de $2{,}43 + 4{,}87 = 7{,}3\,m$

pelo que ela ganhou uma energia potencial de: $dW = dm \cdot g \cdot 7{,}3 =$

$dW = \rho A \cdot v \cdot g \cdot 7{,}3 \cdot dt$ e assim a potência absorvida, que é a energia

por unidade de tempo é de $\frac{dW}{dt} = \rho \cdot A \cdot v \cdot g \cdot 7{,}3 = P_{útil}$

Esta $P_{útil}$ é de 60% da potência total fornecida ao motor e

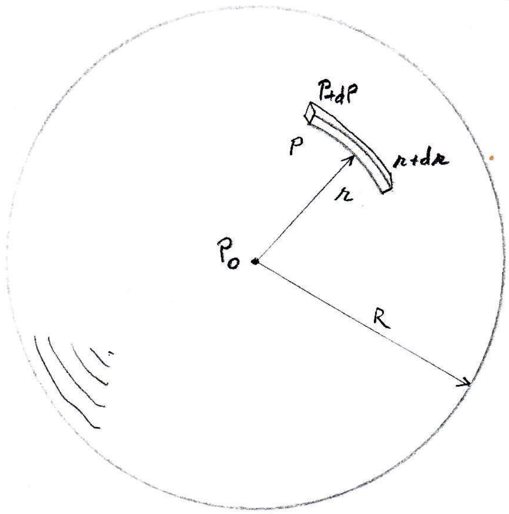
portanto $P_{fornecida} = \frac{1}{0{,}6} P_{útil} = \frac{1}{0{,}6} \rho A \cdot v \cdot g \cdot 7{,}3 = \frac{1}{0{,}6} \cdot 10^{3} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 19{,}54 \cdot 9{,}8 \cdot 7{,}3$

que dá $P_{fornecida} = \underline{\underline{8{,}2\,KW}}$

Nota: a solução indica 25 KW

10.28

10.28



Seja um elemento de área A e espessura dr, no interior do planeta. Este elemento está submetido a 3 forças: a pressão $P+dP$, a pressão P e a força gravítica devido a sua massa.

Cálculo da massa: $dm = \rho A\,dr$

Peso da massa: $g\rho A\,dr$ em que $g = \frac{GM_r}{r^2} =$

$= \frac{G}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi G\rho r$

Peso da massa $= \frac{4}{3}\pi G\rho r\rho A\,dr = \frac{4}{3}\pi GA\rho^2 r\,dr$

Soma das forças sobre o elemento: $A(P+dP) + \frac{4}{3}\pi GA\rho^2 r\,dr = AP$ donde:

$dP = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r\,dr$. Integrando desde o centro até à periferia, vem:

$$\int_{P_0}^{0} dP = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2\int_0^R r\,dr \quad ; \quad -P_0 = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2\frac{R^2}{2} \quad \text{donde} \quad P_0 = \frac{2}{3}\pi G\rho^2R^2$$

Esta expressão vai ser alterada de forma a usar a informação do valor da gravidade à superfície $g_{sup} = \frac{GM}{R^2}$ e então:

$$P_0 = \frac{2}{3}\pi\frac{GM}{R^2}\frac{R^2}{M}\rho^2R^2 = \frac{2}{3}\pi g_{sup}\frac{\rho^2}{M}R^4$$

com $g_{sup} = 1,6\ m\,s^{-2}$

$R = 1,74\cdot10^6\ m$

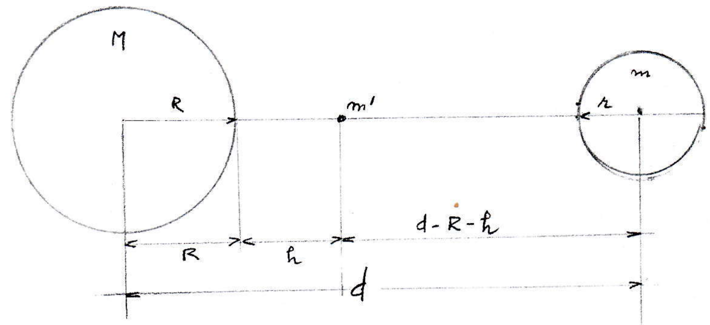
$M = 7\cdot10^{22}\ kg$

$\rho = 3,34\cdot10^3\ kg/m^3$

$$P_0 = \frac{2}{3}\pi\ 1,6\cdot\frac{(3,34\cdot10^3)^2}{7\cdot10^{22}}(1,74\cdot10^6)^4 = 4,9\cdot10^9\ N\,m^{-2} =$$

$= 4,8\cdot10^4$ atm

10.29



A força que actua sobre m' é o resultado da diferença entre as atracções gravíticas da Terra e da Lua:

$$F_R = F_\odot - F_{\text{☾}} = \frac{GMm'}{(R+h)^2} - \frac{Gmm'}{(d-R-h)^2}$$

O trabalho pela força F_R, se m' vai da Terra à Lua é $W = \int_0^{d-R-r} F_R\, dh$ ou seja

$$W = Gm' \int_0^{d-R-r} \left[\frac{M}{(R+h)^2} - \frac{m}{(d-R-h)^2} \right] dh = Gm' \left[-\frac{M}{R+h}\Bigg|_0^{d-R-r} - \frac{m}{d-R-h}\Bigg|_0^{d-R-r} \right] =$$

$$= Gm' \left[-\frac{M}{R+d-R-r} + \frac{M}{R} - \frac{m}{\cancel{d}-\cancel{R}-\cancel{d}+\cancel{R}+r} + \frac{m}{d-R} \right] =$$

$$= Gm' \left[-\frac{M}{d-r} + \frac{M}{R} - \frac{m}{r} + \frac{m}{d-R} \right] =$$

$$= GMm' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{d-r} \right] + Gmm' \left[\frac{1}{d-R} - \frac{1}{r} \right]$$