20.2 Método 1

a) $$t = \frac{Ak}{5} + \frac{\sqrt{120^2 + (140 - Ak)^2}}{3} \Rightarrow t = \frac{Ak}{5} + \sqrt{\frac{120^2}{3^2} + \frac{(140-Ak)^2}{3^2}}$$

$$t = \frac{Ak}{5} + \left[\frac{120^2}{3^2} + \frac{(140-Ak)^2}{3^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{dt}{dAk} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left[\frac{120^2}{3^2} + \frac{(140-Ak)^2}{3^2}\right]^{-1/2}\left(-\frac{280}{3^2} + \frac{2}{3^2}Ak\right)$$

$$\frac{dt}{dAk} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{140 - Ak}{3^2}}{\sqrt{\frac{120^2}{3^2} + \frac{(140-Ak)^2}{3^2}}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{(140-Ak)^2}{9} = \frac{1}{25}\left[120^2 + (140 - Ak)^2\right]$$

$$16 \times 140^2 - 16 \times 280\, Ak + 16\,(Ak)^2 - 9 \times 120^2 = 0$$

$$(Ak)^2 - 280\, Ak + 11500 = 0$$

$$Ak = \frac{280 \pm 180}{2} \Rightarrow Ak = \frac{100}{2} = 50 \text{ ou } Ak = \frac{460}{2} = 230$$

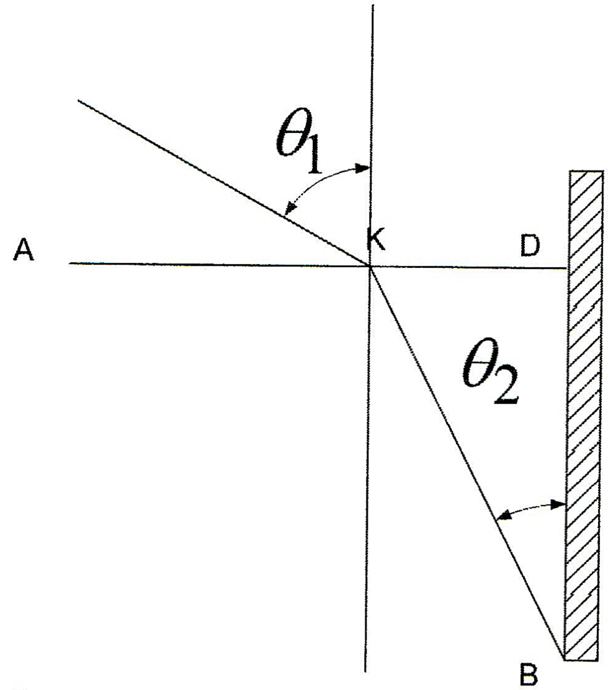
Escolhemos $Ak = \frac{100}{2} = 50$ //

b) $$Ak = 50\,ft \Rightarrow t = \frac{50}{5} + \frac{\sqrt{120^2 + (140-50)^2}}{3} = 60\,s$$

c) rota $ACB \Rightarrow AC = 40\,ft \Rightarrow t = 60{,}1\,s$

rota $AC'B \Rightarrow AC = 60\,ft \Rightarrow t = 60{,}1\,s$

Método 2



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Quando: $\theta_1 = 90^\circ \Rightarrow \sin\theta_2 = \dfrac{v_2}{v_1}$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \theta_2 = 36{,}87^\circ$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\overline{KD}}{120} \Rightarrow \overline{KD} = 120\operatorname{tg}(36{,}87^\circ)$$

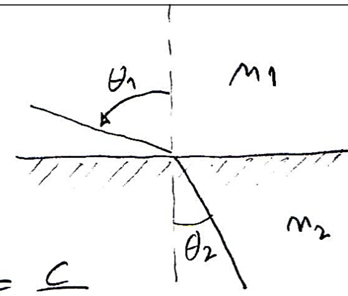
$$= 120 \times \frac{3}{4} = 90\ \text{ft}$$

Então: $\overline{AK} = 140 - \overline{KD}$

$= 140 - 90$

$= 50\ \text{ft}$

20.3



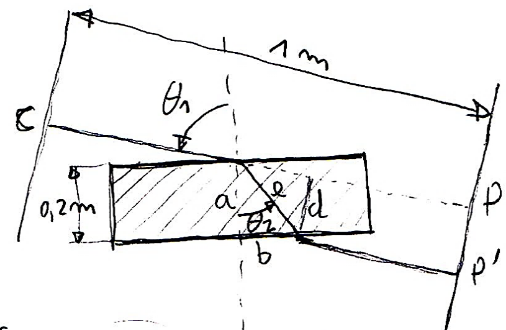
Lei de Snell : $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$ (1)

Índices de refração : $n_1 = \frac{c}{v_1}$ e $n_2 = \frac{c}{v_2}$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{\cancel{c}}{n_1}\cdot\frac{n_2}{\cancel{c}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) : $\boxed{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}}$

Dados: $\overline{SP} = 1\,m$
$n_2 = 1{,}5$
$n_1 = 1$
$a = 0{,}20\,m$



$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_2} = 1{,}5 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sin 30^\circ}{1{,}5} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{1}{3}$$

$$\theta_2 = \arcsin\frac{1}{3} \Rightarrow \theta_2 = 19{,}47^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\tan\theta_2 \Rightarrow b = 0{,}20\tan(19{,}47^\circ)$$

$$\boxed{b = 0{,}071\,m}$$

$$\boxed{e = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{3\sqrt{2}}{20}\,m}$$

$$\sin(\theta_1-\theta_2) = \frac{d}{e} \Rightarrow d = e\sin(\theta_1-\theta_2)$$

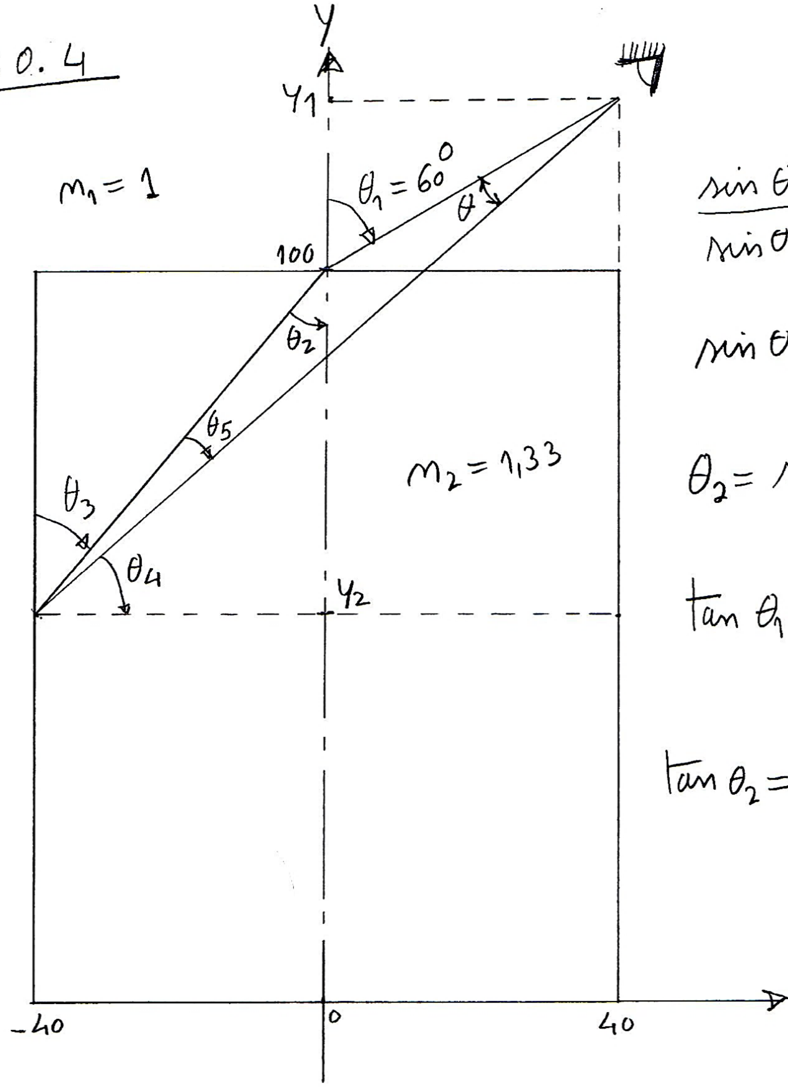
$$d = \frac{3\sqrt{2}}{20}\sin(30^\circ - 19{,}47^\circ) = 0{,}0388\,m \Rightarrow \overline{PP'} = 3{,}88\,cm$$

b) $t_0 = \frac{1\,m}{3\times10^8\,m\,s^{-1}} = 3{,}33\times10^{-9}\,s$

$$\Delta t = \frac{e}{\frac{c}{n_2}} = \frac{e\,n_2}{c} = 1{,}06\times10^{-9}\,s$$

$$SP' = t_0 + \Delta t = 4{,}39\,ns$$

20.4



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin 60^0}{1{,}33} = 0{,}6511$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}(0{,}6511) = 40{,}63^0$$

$$\tan\theta_1 = \frac{40}{Y_1 - 100} \Rightarrow Y_1 = 123{,}09\ cm$$

$$\tan\theta_2 = \frac{40}{100 - Y_2} \Rightarrow Y_2 = 53{,}38\ cm$$

$$\tan\theta_3 = \frac{40}{100 - Y_2} \Rightarrow \tan\theta_3 = 0{,}858 \Rightarrow \theta_3 = 40{,}63^0$$

$$\tan\theta_4 = \frac{Y_1 - Y_2}{80} = 0{,}8714 \Rightarrow \theta_4 = 41{,}07^0$$

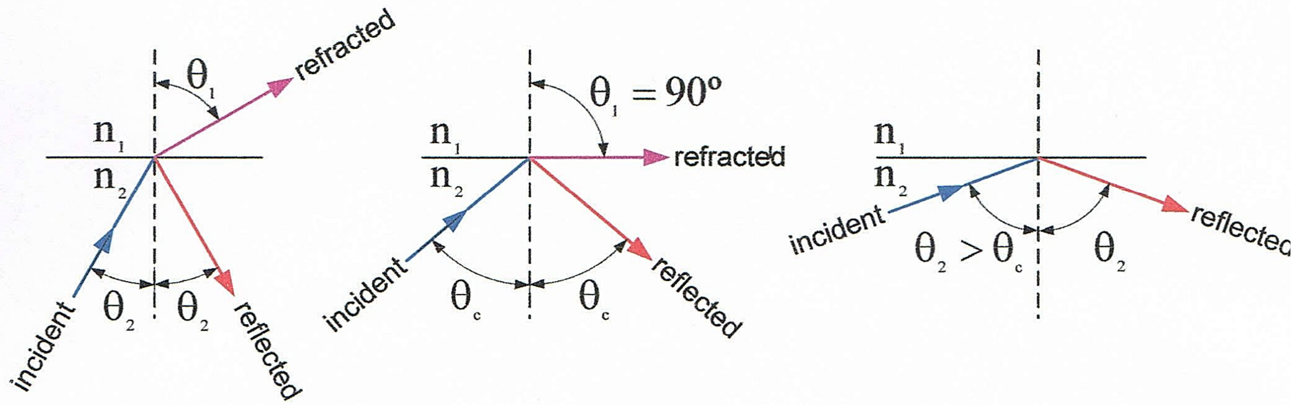
$$\theta_5 = 90^0 - \theta_3 - \theta_4 \Rightarrow \theta_5 = 8{,}3^0$$

$$\theta = 180^0 - \theta_5 - (\theta_2 + 90^0 + 30^0) = 11{,}07^0$$

$$\boxed{\theta = 11{,}07^0}$$

20.5

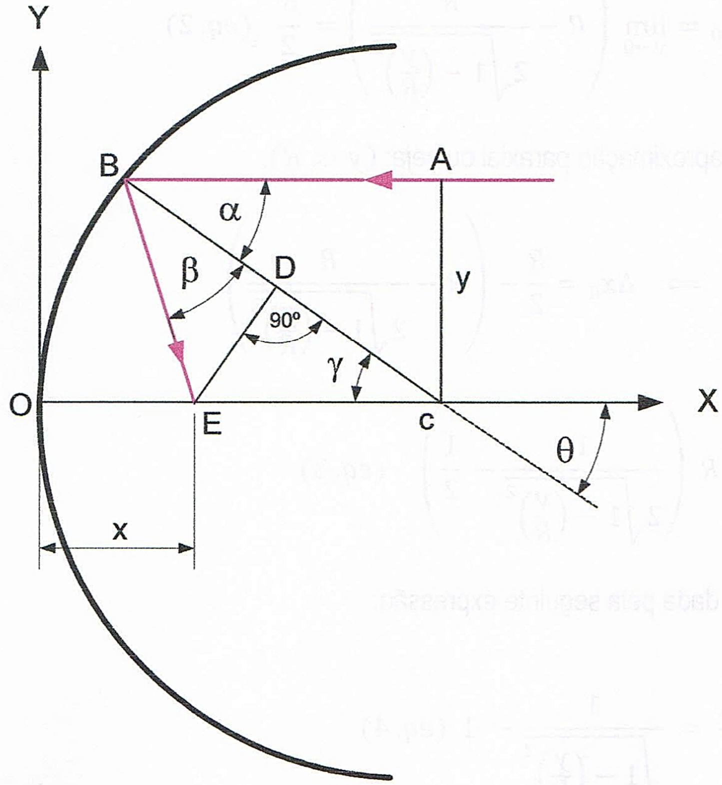
$n_2 > n_1$



$$Refraction\ low: n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

4

20.8



Consideremos um raio de luz AB incidente num espelho circular côncavo. A lei da reflexão impõe que os ângulos α e β sejam iguais. Notar que os ângulos α, β, γ e θ são iguais. Nestas condições verificamos que o triângulo BCE é isósceles de altura DE. Tal determina a seguinte equação:

$$DC = \frac{R}{2}$$

Por outro lado, do triângulo EDC extraímos:

$$\cos(\gamma) = \frac{DC}{EC} = \frac{R}{2EC} \implies EC = \frac{R}{2\cos(\gamma)}$$

$$\gamma = \alpha \implies EC = \frac{R}{2\sqrt{1 - sin^2(\alpha)}}$$

Do triângulo ABC resulta:

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{R}$$

$$x = R - EC \implies x = R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} \implies x = R\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}}\right) \quad (eq. 1)$$

$$x_0 = \lim_{y \to 0} x \implies x_0 = \lim_{y \to 0} \left(R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} \right) = \frac{R}{2} \quad (eq.2)$$

A equação 2 é válida somente na aproximação paraxial ou seja: $(y \ll R)$.

$$\Delta x_0 = x_0 - x \implies \Delta x_0 = \frac{R}{2} - \left(R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} \right)$$

$$\Delta x_0 = R \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} - \frac{1}{2} \right) \quad (eq.3)$$

A aberração relativa do espelho é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} - 1 \;(eq.4)$$

a) Se $y \ll R$ a equação 2 indica que a posição focal é :

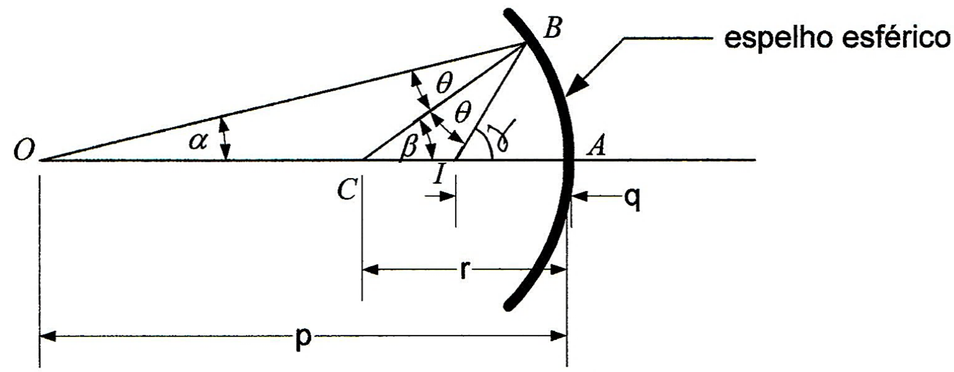
$$x_0 \sim \frac{R}{2}$$

b) Se $\frac{y}{R} = 0{,}2$ a equação 1 indica:

$$x = R\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} \right) \implies x = R\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - (0{,}2)^2}} \right) \implies x = 0{,}49R$$

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} - 1 \implies \frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}2)^2}} - 1 \implies \frac{\Delta x_0}{x_0} = 0{,}02$$

20.9



$$\beta = \alpha + \theta \Rightarrow \theta = \beta - \alpha \quad \text{e} \quad \gamma = \alpha + 2\theta$$

então: $\gamma = \alpha + 2(\beta - \alpha) \Rightarrow \gamma = 2\beta - \alpha$ (eq. 1)

Na aproximação paraxial temos:

$$\alpha \simeq \frac{\widehat{AB}}{p} \; ; \; \beta \simeq \frac{\widehat{AB}}{r} \; ; \; \gamma = \frac{\widehat{AB}}{q} \quad \text{(eqs 2)}$$

Substituindo as equações 2 na equação 1:

$$\frac{\widehat{AB}}{q} = 2\frac{\widehat{AB}}{r} - \frac{\widehat{AB}}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

a) A distância Terra-Sol é: $149{,}6 \times 10^{11}$ cm

$p = 149{,}6 \times 10^{11}$ cm

$r = 400$ cm

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{149{,}6 \times 10^{11}} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

Como $\dfrac{1}{149{,}6 \times 10^{11}} \simeq 0 \Rightarrow q = \dfrac{r}{2} = \dfrac{400}{2} = 200$ cm

A imagem é formada a meia distância entre o vértice do espelho e o respetivo centro.

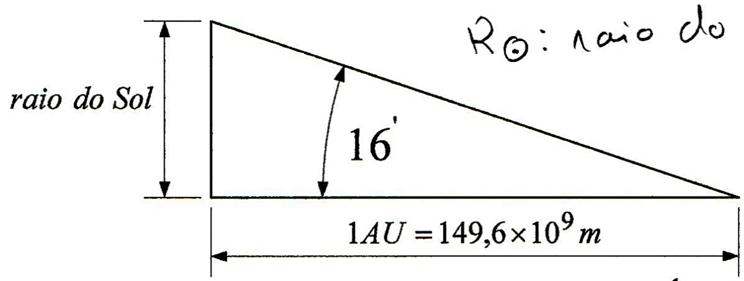
b) Façamos:

D: diâmetro do Sol

d: diâmetro da imagem do Sol reflectida pelo espelho

- Cálculo do diâmetro do Sol

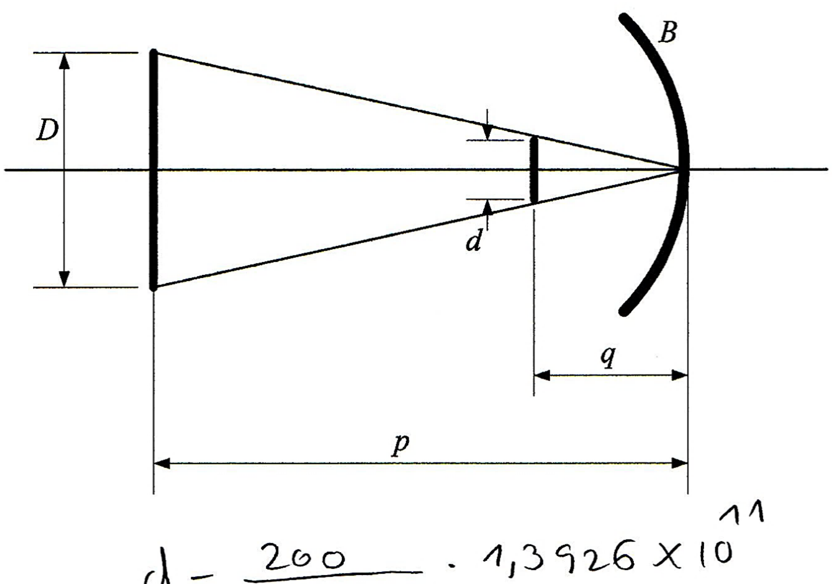
$R_\odot$: raio do Sol



$$R_\odot = 149{,}6\times10^{9} \times \tan\left(\frac{16}{60}\right) = 696{,}3\times10^{6}\ m$$

$$D = 2R_\odot = 1{,}3926\times10^{9}\ m$$

- Cálculo do diâmetro da imagem do Sol produzida pelo espelho



$$\frac{d}{D} = \frac{q}{p}$$

$$d = \frac{q}{p} D$$

$$d = \frac{200}{149{,}6\times10^{11}} \cdot 1{,}3926\times10^{11}$$

$$d = 1{,}86\ cm$$

6

20-10

a)

1. Estrelas distantes $\Rightarrow p = \infty$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{160} = \frac{1}{q} \Rightarrow q = 160 \text{ m}$$

2. Distância x entre o plano focal para estrelas distantes e a Lua

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{pf}{p-f}$$ sendo $p = 384400$ km

$$q = \frac{384400 \times 10^3 \times 160}{384400 \times 10^3 - 160} = 160{,}0000666 \text{ m}$$

$$x = 160{,}0000666 \text{ m} - 160 \text{ m} = \underline{6{,}7 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

b) $p = 300$ km

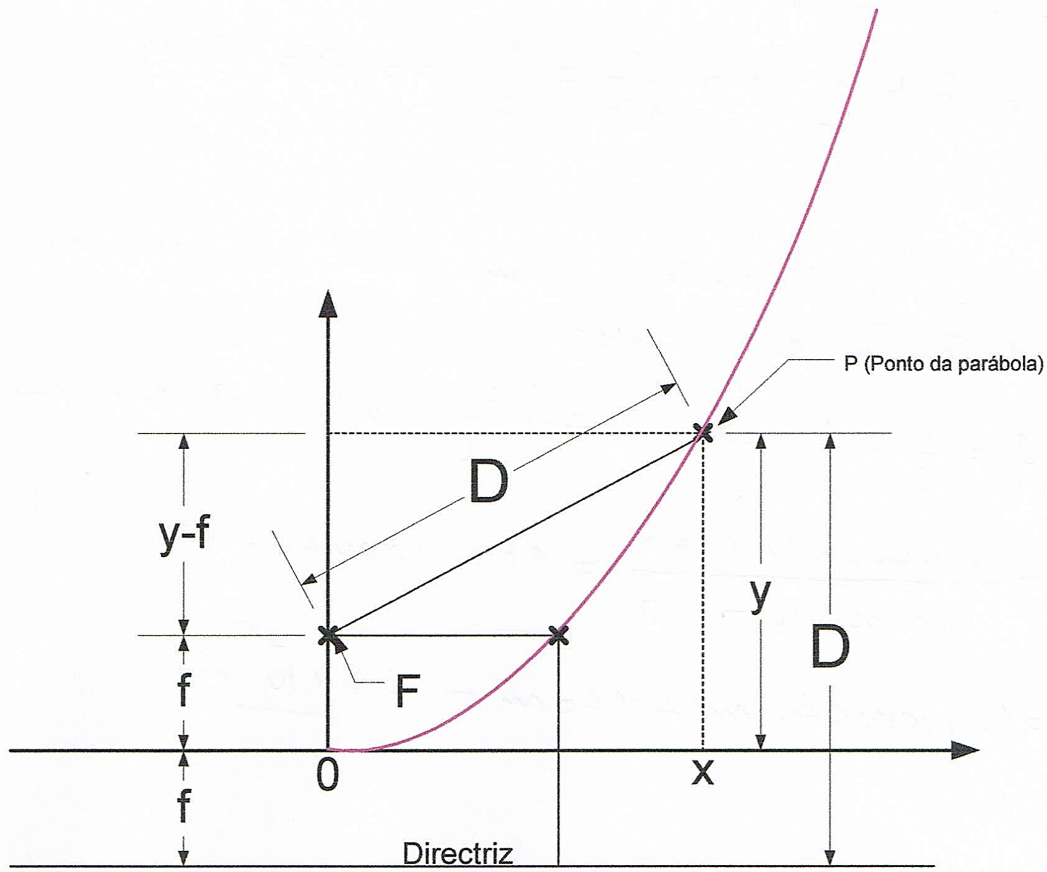
$$q = \frac{300 \times 10^3 \times 160}{300 \times 10^3 - 160} = 160{,}085 \text{ m}$$

A distância x entre o plano focal para estrelas distantes e um satélite artificial à distância orbital de 300 km da Terra é:

$$x = 160{,}085 \text{ m} - 160 \text{ m}$$

$$= \underline{0{,}085 \text{ m}}$$

20.11



Consideremos a curva cor-de-rosa, na qual se verifica serem iguais as distâncias de qualquer ponto que lhe pertença relativamente ao ponto F e á reta diretriz. Tal determina o seguinte:

$$(y-f)^2 + x^2 = D^2 \quad e \quad y + f = D \quad \Rightarrow (y-f)^2 + x^2 = \ (y+f)^2$$

$$y^2 - 2yf + f^2 + x^2 = y^2 + 2yf + f^2 \quad \Rightarrow \quad 4yf = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{4f}$$

Constatamos que a curva é uma parábola com foco situado no ponto F e distância focal f.

Respostas:

a) A figura 20.5 apresentada no enunciado do problema mostra uma superfície convexa em que raios paralelos ao respetivo eixo ótico incidem sobre toda a superfície, convergindo para o mesmo ponto ou foco. Para tal acontecer a superfície deverá ser parabólica que é a única que garante que todos os raios convergem para o foco.

b) Só é aceitável utilizar lentes esféricas se também for aceitável a aproximação paraxial.

7

20.13

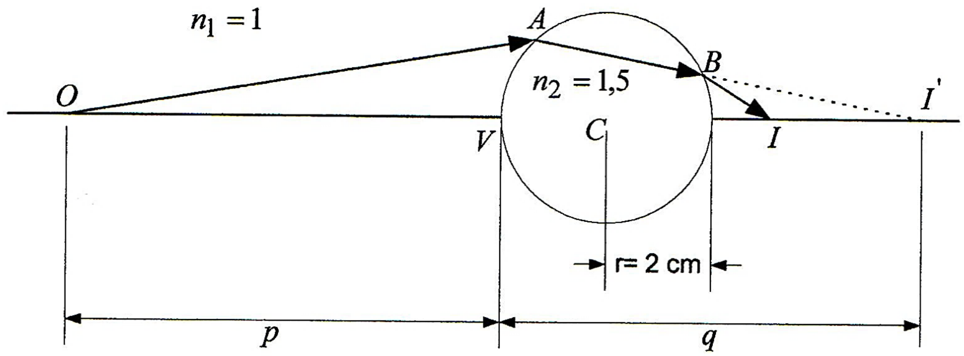


Figura 1

Convenção:

- O feixe de luz incide da esquerda para a direita;
- A distância (p) do objeto ao vértice é positiva se o objeto se encontra à esquerda do vértice;
- A distância da imagem ao vértice é positiva se a imagem se encontra à direita do vértice e negativa no caso contrário;
- O raio de curvatura é positivo quando a superfície vista pelo feixe de luz é convexo.

Nota: I' é a posição da imagem se o feixe de luz refractado em A (ponto da superfície de separação ar-esfera) se propagasse sómente no material de índice de refração n_2;

A equação dos pontos conjugados O e I' é a seguinte:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Então:

$$\frac{1}{10} + \frac{1,5}{q} = \frac{1,5-1}{2} \Rightarrow q = 10 \text{ cm}$$

Imaginemos que na posição da imagem I colocamos o objeto O:

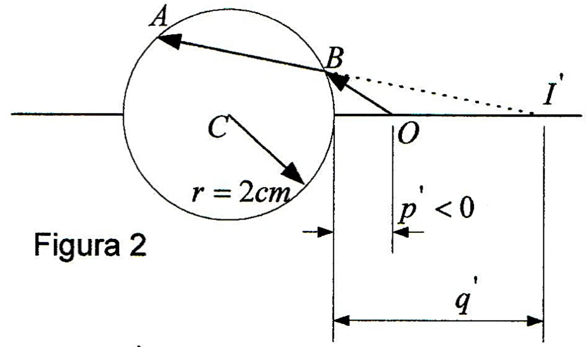


Figura 2

$q' = q - 2r \Rightarrow q' = 10 - 2\times 2 = 6$ cm

O raio incidente é refratado na direção BA e é divergente. Nestas condições a imagem I' é virtual.

A figura 2 pode ser apresentada como:

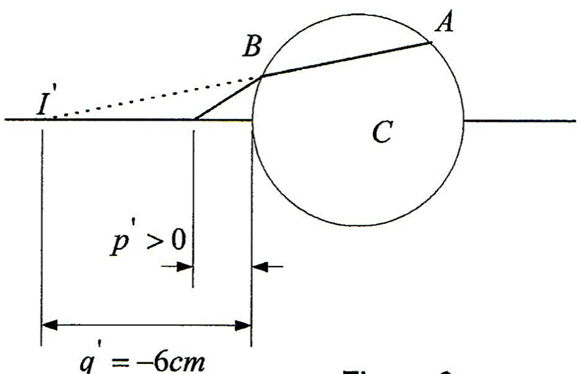


Figura 3

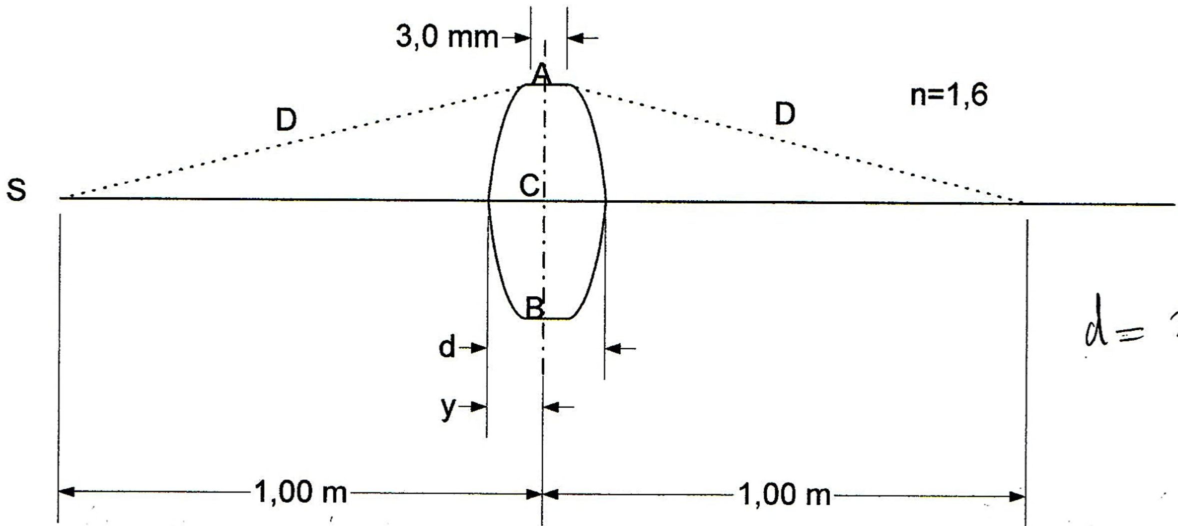
Aplicando novamente a equação dos pontos conjugados, resulta:

$$\frac{n_1}{p'} + \frac{n_2}{q'} = \frac{1{,}5 - 1}{2} \Rightarrow p' = 2 \text{ cm}$$

A imagem será formada à seguinte distância do centro da esfera:

$$\underline{\underline{r + p' = 4 \text{ cm}}}$$

20.15



$d = 2y \quad (1)$

Se fora da lente a velocidade de propagação da luz for igual a 1, então na lente será: $v = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,6} = \frac{5}{8}$

$$D + 3.0 \times 10^{-3} \times \frac{8}{5} + D = (1-y) + 2y \times \frac{8}{5} + (1-y)$$

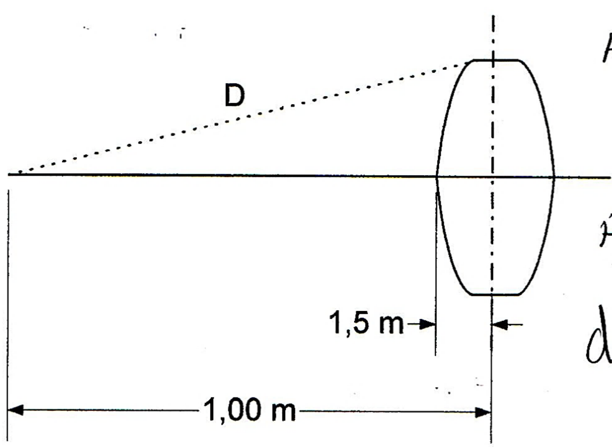
$$2D + \frac{24.0}{5} \times 10^{-3} = 2 - 2y + \frac{16}{5} y$$

$$2D + \frac{24.0}{5} \times 10^{-3} - 2 = \frac{6}{5} y$$

$$y = \frac{10D + 24.0 \times 10^{-3} - 10}{6} \quad (2)$$

Sendo: $D = \sqrt{\left(1 - \frac{3.0}{2} \times 10^{-3}\right)^2 + 0,1^2}$

$= 1,0035 \text{ m} \quad (3)$



Aplicando (3) em (2):

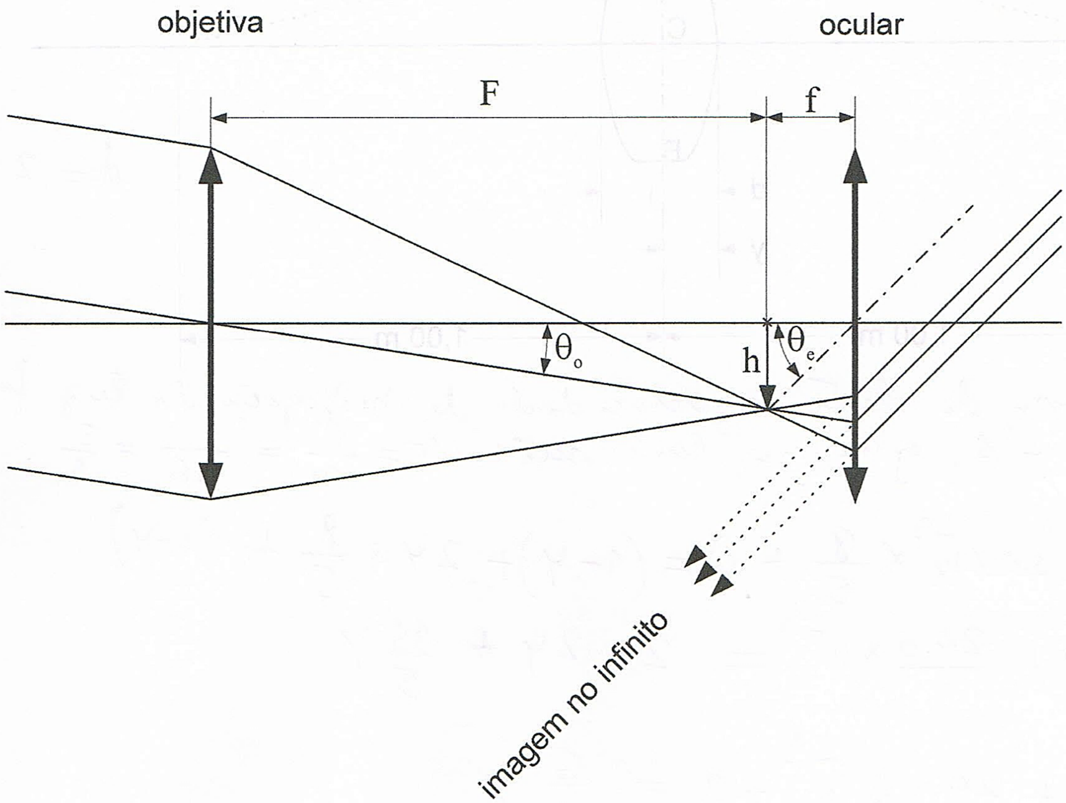
$y = 9,83 \text{ mm} \quad (4)$

Aplicando (4) em (1):

$d = 2 \times 9,83 \text{ mm}$

$= 1,966 \text{ cm}$

20.16



Por definição a ampliação angular é dada pela seguinte relação:

$$M = \frac{\theta_e}{\theta_o} \quad (eq.1)$$

$$\tan\theta_o = \frac{h}{F} \quad e \quad \tan\theta_e = \frac{h}{f}$$

Na aproximação paraxial θ_o e θ_e são ângulos muito pequenos, pelo que:

$$\theta_o = \frac{h}{F} \quad (eq.2) \quad e \quad \theta_e = \frac{h}{f} \quad (eq.3)$$

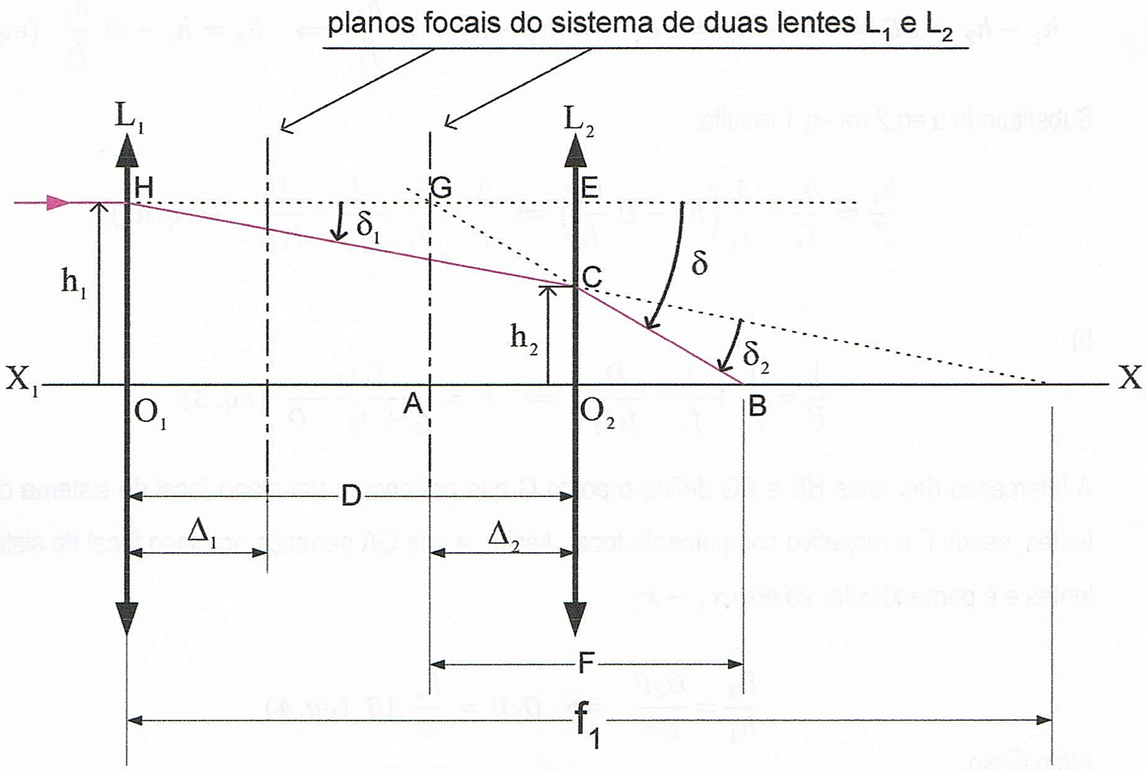
Substituindo as (eq.2) e (eq.3) na (eq.1), resulta:

$$M = \frac{\frac{h}{f}}{\frac{h}{F}} = \frac{h}{f}\frac{F}{h} = \frac{F}{f}$$

Notar que a imagem é formada no infinito porque a distância entre as lentes é igual á soma das respetivas distâncias focais.

9

20.17



a)

A lente L_1 desvia o feixe de luz do seguinte valor:

$$\delta_1 = \frac{h_1}{f_1}$$

Igualmente a lente L_2 desvia o feixe de luz recebido da lente L_1 do seguinte valor:

$$\delta_2 = \frac{h_2}{f_2}$$

Assim, o sistema constituído pelas duas lentes produz o seguinte desvio, relativamente à reta HE:

$$\delta = \frac{h_1}{F}$$

Mas o desvio total é igual á soma dos desvios parciais:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

Então:

$$\frac{h_1}{F} = \delta_1 + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{F} = \frac{h_1}{f_1} + \frac{h_2}{f_2} \quad (eq. 1)$$

Mas:

$$h_1 - h_2 = EC \Longrightarrow h_1 - h_2 = D\delta_1 \Longrightarrow h_1 - h_2 = D\,\frac{h_1}{f_1} \Longrightarrow h_2 = h_1 - D\,\frac{h_1}{f_1} \;\; (eq.2)$$

Substituindo a eq.2 na eq.1 resulta:

$$\frac{h_1}{F} = \frac{h_1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\left(h_1 - D\,\frac{h_1}{f_1}\right) \Longrightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_1} \quad (c.q.d.)$$

b)

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_1} \Longrightarrow F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - D} \;\; (eq.3)$$

A interceção das retas HE e BG define o ponto G que pertence a um plano focal do sistema de duas lentes, sendo F o respetivo comprimento focal. Assim, a reta GA pertence ao plano focal do sistema de lentes e é perpendicular ao eixo $x_1 - x_2$.

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{O_2B}{AB} \Longrightarrow O_2B = \frac{h_2}{h_1}AB \;\; (eq.4)$$

Além disso:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{f_1 - D}{f_1} = 1 - \frac{D}{f_1} \;\; (eq.5)$$

Substituindo a eq.5 na eq.4:

$$O_2B = \left(1 - \frac{D}{f_1}\right) AB \Longrightarrow O_2B = \left(1 - \frac{D}{f_1}\right) F \;\; (eq.6)$$

$$\Delta_2 = F - O_2B \quad (eq.7)$$

Substituindo a (eq.6) na (eq.7):

$$\Delta_2 = F - \left(1 - \frac{D}{f_1}\right) F \Longrightarrow \Delta_2 = \frac{D}{f_1}F \;\; (eq.8)$$

Substituindo a eq.3 na eq.8:

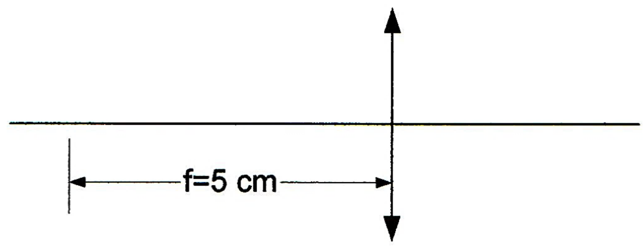
$$\Delta_2 = \frac{D}{f_1}\,\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - D} \Longrightarrow \Delta_2 = \frac{D f_2}{f_1 + f_2 - D} \;\; (c.q.d.)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio obtemos:

$$\Delta_1 = \frac{D f_1}{f_1 + f_2 - D}$$

20.18

a)



Recorrendo à equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

f: distância focal;
p: distância do objeto à lente;
q: distância da imagem à lente.

1. Se queremos que a imagem se forme no infinito:

$$q = \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} \Rightarrow f = p = 5 \text{ cm}$$

2. Se queremos que a imagem se forme a 25 cm

$$q = -25 \text{ cm} \Rightarrow p = \frac{fq}{q-f} \Rightarrow p = \frac{-5 \times 25}{-25-5}$$

$$p = 4{,}167 \text{ cm}$$

então: $4{,}167 < d < 5$ cm

b) $M(4{,}167) = -\frac{-25}{4{,}167} = 6$

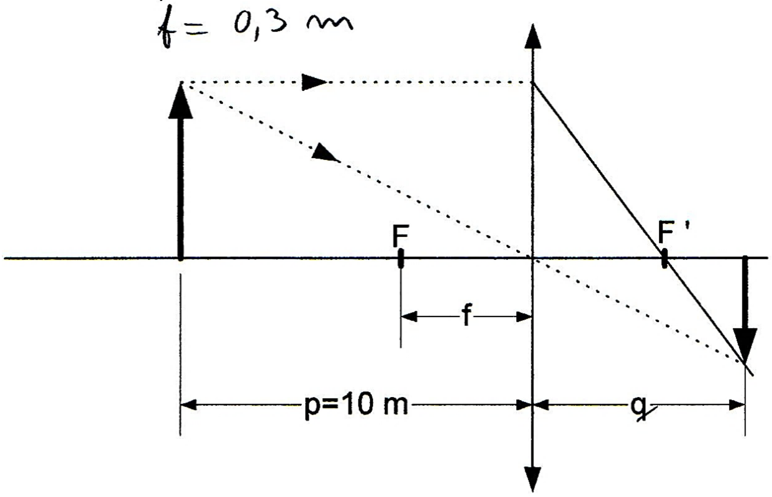
$$M(5) = -\frac{-25}{5} = 5$$

20.19

1. Lente convergente

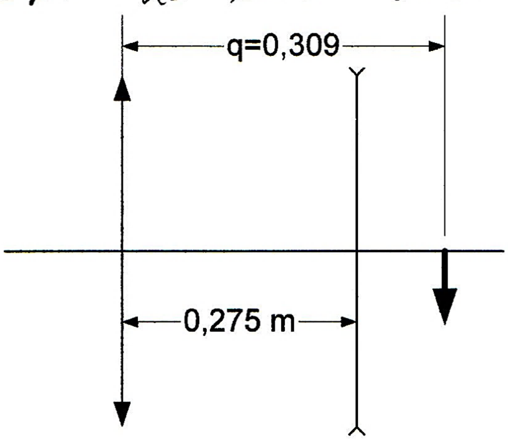
$p = 10\,m$

$f = 0,3\,m$



Lei de Gauss: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{0,3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{q} \Rightarrow q = 0,309\,m$

Verificamos que a imagem formada pela lente convergente situa-se a 0,309 m da lente. Esta imagem é o objecto da lente divergente.



2. Lente divergente

$p' = -(0,309 - 0,275) \Rightarrow p' = -0,034\,m$

↳ sinal negativo porque o objeto situa-se à direita da lente!

$f = -0{,}1$

$q' = ?$

Recorrendo novamente à Lei de Gauss

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{q'} = \frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{-0{,}034}$$

$$q' = 0{,}0515\,m$$

Então: $x = 5{,}2$ cm

A placa deverá ser colocada a 5,2 cm à direita do eixo da lente divergente.

20.21

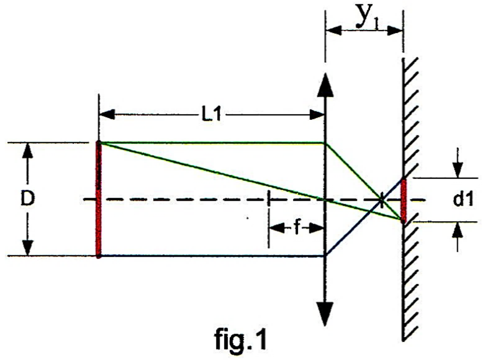


fig.1

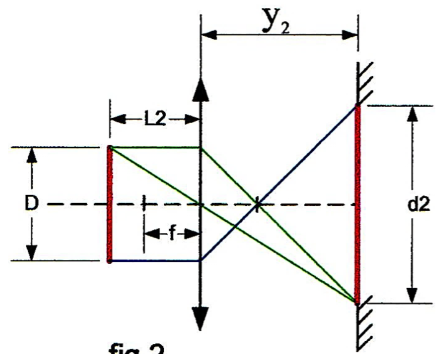


fig.2

a) $d_2 > d_1$

b) The screen must be moved away from the lens to form the image.

c)

$$\frac{D}{d_1} = \frac{L_1}{y_1} \quad e \quad \frac{D}{d_2} = \frac{L_2}{y_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y_1} = \frac{D}{d_1 L_1} \quad e \quad \frac{1}{y_2} = \frac{D}{d_2 L_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{y_2}$$

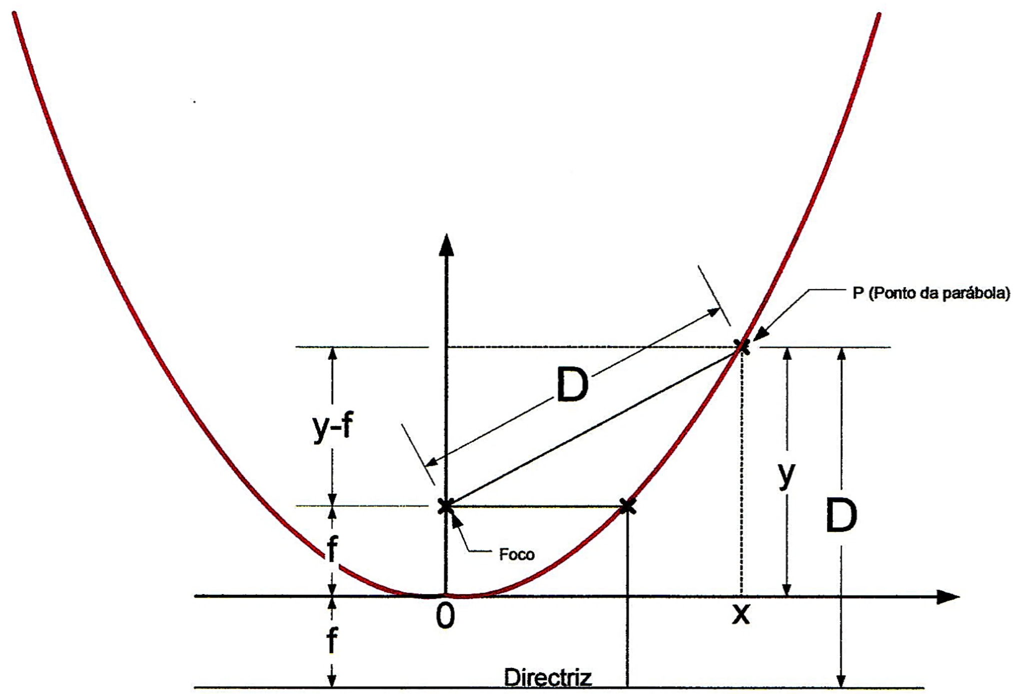
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} + \frac{D}{d_1 L_1} = \frac{1}{L_2} + \frac{D}{d_2 L_2}$$

$$f = \frac{d_1 L_1}{d_1 + D} = \frac{d_2 L_2}{d_2 + D}$$

12

20.23

a)



Consideremos a curva cor-de-rosa, na qual se verifica serem iguais as distâncias de qualquer ponto que lhe pertença relativamente ao ponto F (foco) e á reta diretriz. Tal determina o seguinte:

$$(y-f)^2 + x^2 = D^2 \quad e \quad y + f = D \quad \Rightarrow (y-f)^2 + x^2 = \ (y+f)^2$$

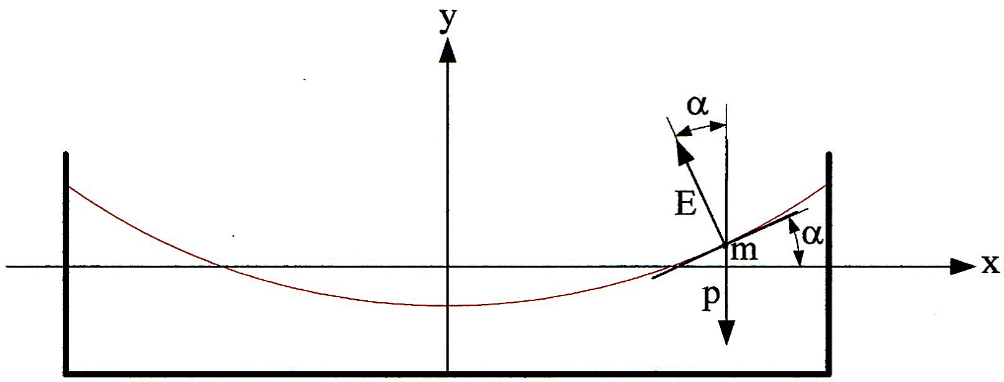
$$y^2 - 2yf + f^2 + x^2 = y^2 + 2yf + f^2 \quad \Rightarrow \quad 4yf = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{4f}$$

Assim, a equação

$$y = \frac{x^2}{4f} \quad (eq. 1)$$

representa uma curva parabólica de comprimento focal f.

b)



Consideremos uma partícula de fluído de massa m

$E\cos\alpha = p \quad (eq.1)$

$E\sin\alpha = F_c \quad (eq.2)$

$p = mg \ (eq.3)$

$F_c = m\omega^2 x \ \ (eq.4)$

Dividindo a (eq.2) pela (eq.1) e recorrendo às (eq.3) e (eq.4), resulta:

$$\frac{E\sin\alpha}{E\cos\alpha} = \frac{F_c}{p} \quad \Longrightarrow \quad \tan\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (eq.5)$$

Por outro lado:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

A equação da superfície de um fluido em rotação conjunta com o balde cilíndrico que o contém é a seguinte:

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} \quad (eq.6)$$

Comparando a (eq.6) com a (eq.1) da alínea anterior, verificamos:

$$\frac{1}{4f} = \frac{\omega^2}{2g} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{g}{2\omega^2}$$