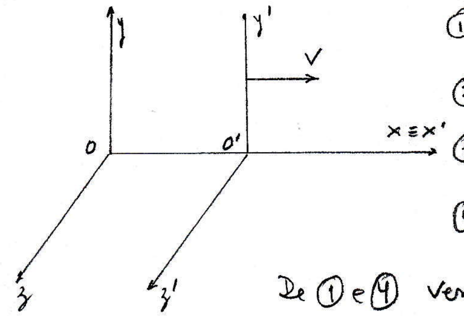
12.1 | 12.1



① $x' = \gamma(x - Vt)$ em que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

② $y' = y$

③ $z' = z$

④ $t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right)$

De ① e ④ vem: $x = \dfrac{1}{\gamma}x' + Vt$ e $t = \dfrac{1}{\gamma}t' + \dfrac{Vx}{c^2}$ e substituindo

$x = \dfrac{1}{\gamma}x' + \dfrac{V}{\gamma}t' + \dfrac{V^2 x}{c^2}$ ou $\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)x = \dfrac{1}{\gamma}x' + \dfrac{V}{\gamma}t'$; $\dfrac{1}{\gamma^2}x = \dfrac{1}{\gamma}x' + \dfrac{V}{\gamma}t'$ e

simplificando vem para x : $x = \gamma(x' + Vt')$ e, claro, $y = y'$ e $z = z'$

Por outro lado $t = \dfrac{1}{\gamma}t' + \dfrac{Vx}{c^2} = \dfrac{1}{\gamma}t' + \dfrac{V}{c^2}\gamma(x' + Vt') = \left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{V^2}{c^2}\gamma\right)t' + \dfrac{V\gamma}{c^2}x'$

$\gamma^2 = \dfrac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ pelo que $\dfrac{V^2}{c^2} = 1 - \dfrac{1}{\gamma^2}$ e então $\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{V^2}{c^2}\gamma = \dfrac{1}{\gamma} + \left(1 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right)\gamma = \dfrac{1}{\gamma} + \gamma - \dfrac{1}{\gamma} = \gamma$

e então vem para $t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right)$

Em resumo:

$$x = \gamma(x' + Vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

12.2 | 12.2

$x = \gamma(x' + Vt')$ $\quad dx = \gamma(dx' + V\,dt')$ $\quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}}$ e, dividindo

$t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right)$ $\quad dt = \gamma\left(dt' + \dfrac{V\,dx'}{c^2}\right)$

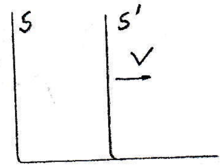
por dt' em cima e em baixo dá: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \dfrac{V_{x'} + V}{1 + \frac{V\,V_{x'}}{c^2}}$

E também: $y = y'$ $\quad dy = dy'$ $\quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}\right)} = \dfrac{V_{y'}}{\gamma\left(1 + \frac{V\,V_{x'}}{c^2}\right)}$

$z = z'$ $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{V_{z'}}{\gamma\left(1 + \frac{V\,V_{x'}}{c^2}\right)}$

12.3 | 12.3

$$\mu'_x = \frac{\mu_x - V}{1 - \frac{V\mu_x}{c^2}} = (\mu_x - V)\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^{-1} \quad e \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$



$$d\mu'_x = \left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^{-1} d\mu_x + (\mu_x - V)(-1)\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^{-2}\left(-\frac{V}{c^2}\right) d\mu_x =$$

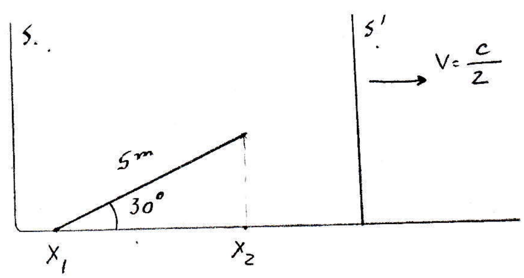
$$= \left[\frac{1}{1 - \frac{V\mu_x}{c^2}} + \frac{(\mu_x - V)\frac{V}{c^2}}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2}\right] d\mu_x = \frac{1 - \frac{V\mu_x}{c^2} + \frac{V\mu_x}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2} d\mu_x = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\mu_x}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{V\,dx}{c^2}\right); \quad \frac{d\mu'_x}{dt'} = \frac{\frac{1}{\gamma^2}\frac{d\mu_x}{(1 - V\mu_x/c^2)^2}}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{1}{\gamma^3}\frac{d\mu_x}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^3}\frac{d\mu_x/dt}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^2\left(1 - \frac{V\,dx/dt}{c^2}\right)} = \frac{1}{\gamma^3}\frac{a_x}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^3}$$

Então: a aceleração no sistema móvel a'_x está relacionada com a do sistema fixo através de: $a'_x = \dfrac{1}{\gamma^3}\dfrac{a_x}{\left(1 - \frac{V\mu_x}{c^2}\right)^3}$

12.4 | 12.4



$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad y' = y$$
$$x_2 = \gamma(x'_2 + Vt') \qquad y'_2 = y_2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt') \qquad y'_1 = y_1$$
$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) \qquad y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1$$
$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1).$$

O comprimento no referencial S' é dado por $L' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} =$

$$= \sqrt{\left(5(\cos 30°)\frac{1}{\gamma}\right)^2 + (5\,\text{sen}\,30)^2} = 5\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 5\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = 5\sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

Então $L' = \dfrac{5\sqrt{13}}{4} = 4{,}5\,m$ e $\text{tg}\,\theta' = \dfrac{5\,\text{sen}\,30}{5(\cos 30)\frac{1}{\gamma}} = \gamma\,\text{tg}\,30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{3}$

$$\theta' = \text{arctg}\,\frac{2}{3} = 33{,}7°$$

Nota: porque se usou $x = \gamma(x' + Vt')$ e não $x' = \gamma(x - Vt)$? É o observador em S' que mede a barra em S e fá-lo num determinado instante. $x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2)$ e $x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1)$ em que $t'_2 = t'_1$ vindo $x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1)$ e como $\gamma > 1$ então $x'_2 - x'_1 < x_2 - x_1$

O observador S' vê a barra mais curta – contracção do comprimento!

12.5

$\frac{V}{c} = 0{,}99 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = 7{,}09$

Tempo, no referencial fixo, para percorrer $5 \cdot 10^3$ m à velocidade $V = 0{,}99c$: $\Delta t = \frac{5 \cdot 10^3}{0{,}99c} = 16{,}8\,\mu s$

" " " ligado ao muão: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{16{,}8}{7{,}08} = 2{,}3\,\mu s$

Distância percorrida no referencial do muão: $\ell' = \frac{\ell}{\gamma} = \frac{5 \cdot 10^3}{7{,}09} = 705$ m

---

12.6

$m_e c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2$ Joules $\qquad$ Mas $1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

$1\,J = \frac{1\,eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}$

$m_e c^2 = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,eV = 0{,}511 \cdot 10^6\,eV = 0{,}511\,MeV$

12.7

$x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b \qquad \dot{x} = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \qquad p = m \cdot V = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \cdot \dot{x}$

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{c^4 t^2}{b^2 + c^2 t^2}}} \cdot \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} = \frac{m_0 c^2 t}{\sqrt{\frac{b^2}{b^2 + c^2 t^2}}\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} = \frac{m_0 c^2 t}{b}$$

Força $F = \frac{dp}{dt} = \frac{m_0 c^2}{b}$

12.8

a) Energia anual gerada $= 1{,}05 \cdot 10^{12}$ kWh $= 1{,}05 \times 10^{12} \cdot 10^3 \cdot 3600$ Joules $= 3{,}78 \cdot 10^{18}$ J

$E = mc^2 \qquad M = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}78 \cdot 10^{18}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 42$ kg

b) $M_{H^2} = 2{,}0147\,\mu$

$M_{He^4} = 4{,}0039\,\mu$

$1\mu = 1{,}66054 \cdot 10^{-27}$ kg

Massa molar da água pesada $= 20{,}0276\ g\,mol^{-1}$

N° Avogadro $= 6{,}025 \cdot 10^{23}$ moléculas/mole

$\Delta m = 2 \cdot M_{H^2} - M_{He^4} = 0{,}0255\,\mu = 0{,}0255 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27} =$

$= 4{,}23438 \cdot 10^{-29}$ kg

Energia libertada na fusão de 2 átomos H^2 =

$= \Delta m \cdot c^2 = 3{,}811 \cdot 10^{-12}$ Joules

Energia necessária por segundo $= \frac{3{,}78 \cdot 10^{18}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} =$

$= 1{,}2 \cdot 10^{11}$ Joules s^{-1}

12.8 Contin — Contin 12.8

Nº de colisões necessárias por segundo $= \dfrac{1{,}2\cdot 10^{11}}{3{,}811\cdot 10^{-12}} = 3{,}145\cdot 10^{22}$ colisões de pares H^2

Cada molécula de água pesada tem 2 átomos H^2

Uma mole contem o número de moléculas: $6{,}025\cdot 10^{23}$ ou pares de H^2

São necessários, por segundo, $3{,}145\cdot 10^{22}$ colisões de pares H^2 ou seja $\dfrac{3{,}145\cdot 10^{22}}{6{,}025\cdot 10^{23}} = 0{,}052$ mole

Uma mole tem uma massa de 20,0276 grama, pelo que 0,052 mole tem uma massa de $0{,}052 \times 20{,}0276 = 1{,}04\ g$

A densidade da água pesada é de $1{,}1\ g\ cm^{-3}$ pelo que, por segundo, é necessário $\dfrac{1{,}04}{1{,}1}\ cm^3 = 0{,}95\ cm^3\ s^{-1}$

Nota: A solução do livro é de $2\ cm^3\ s^{-1}$, e a discrepância poderá ser resultado dos dados usados para a água pesada.

12.9 — 12.9

Constante solar $= 1{,}4\ kW/m^2$

Distância Terra-Sol $= 150\cdot 10^6\ km = R_{TS}$

massa do protão $= 1{,}67252\times 10^{-27}\ kg$

massa do ^4H_e $= 4{,}0039\,u = 4{,}0039\times 1{,}66054\cdot 10^{-27} = 6{,}6486\cdot 10^{-27}$

Reacção de fusão: 4 protões dão um átomo de ^4He

Energia total libertada pelo sol por segundo: $1{,}4\cdot 10^3\cdot 4\pi\cdot(150\cdot 10^9)^2 = 3{,}96\cdot 10^{26}\ J\ s^{-1}$

Energia libertada para formar 1 átomo de ^4H_e: $\Delta E = \Delta m\, c^2 = (4\times 1{,}67252 - 6{,}6486)\,10^{-27}\, c^2$

$$\Delta E = 0{,}04148\cdot 10^{-27}\cdot(3\cdot 10^8)^2 = 3{,}733\cdot 10^{-12}\ J \text{ por átomo de } ^4He$$

$$\frac{\text{En. total por segundo}}{\text{En. fornecida por } 4'H} \times \text{massa de } 4'H = 6{,}9\times 10^8 \text{ toneladas } s^{-1}$$

12.10

12.10

E se $t = 5$ anos e $a'_x = 1{,}03$ anos-luz ano^{-2} vem:

$$\beta = \frac{1{,}03 \cdot 5}{\sqrt{1 + (1{,}03 \cdot 5)^2}} = 0{,}982 \text{ anos-luz}\cdot\text{ano}^{-1}$$ ou $\underline{\underline{v = 0{,}982 \cdot c}}$

Qual é a distância percorrida? Integra-se $\beta(t)$ e vem

$$X = \int_0^T \frac{a'_x\, t}{\sqrt{1 + (a_x \cdot t)^2}}\, dt = \frac{1}{a'_x} \sqrt{1 + (a'_x \cdot t)^2}\Big|_0^T = \frac{1}{a'_x}\sqrt{1 + (a'_x\, T)^2} - \frac{1}{a'_x}$$ que,

neste caso, dá $x = \frac{1}{1{,}03}\sqrt{1 + (1{,}03 \cdot 5)^2} - \frac{1}{a'_x} = \underline{\underline{4{,}123 \text{ anos luz}}}$

Nota: a solução do livro indica 4,15 anos-luz!

12.10 **12.10**

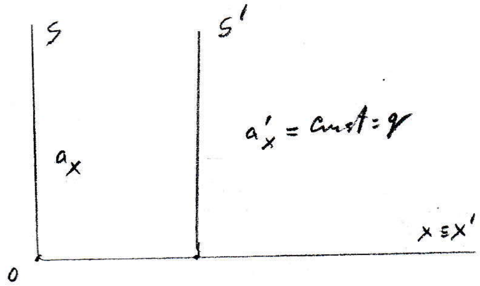
a) $g = 9{,}8\ m\,s^{-2}$ $1\ \text{ano-luz} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c\ \ m$ $1\,m = \dfrac{1\ \text{ano-luz}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c}$

$1\ \text{ano} = 365 \cdot 24 \cdot 3600\ s$ $1\,s = \dfrac{1\ \text{ano}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}$

Então $$g = 9{,}8 \cdot \frac{1\ \text{ano-luz}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c} \; \frac{1}{\left(\dfrac{1\ \text{ano}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2} =$$

$$= 9{,}8 \cdot \frac{365 \cdot 24 \cdot 3600}{3 \cdot 10^8} = 1{,}03\ \text{ano-luz ano}^{-2}$$

b)



$a'_x = 1{,}03\ \text{ano-luz} \cdot \text{ano}^{-2}$

$c = 1\ \text{ano luz ano}^{-1}$

Em cada instante o referencial S' coincide com o foguetão. Assim V vai coincidir com u_x que é a velocidade do foguetão no referencial S.

Vimos que $a'_x = \dfrac{1}{\gamma^3} \dfrac{a_x}{\left(1 - \dfrac{V u_x}{c^2}\right)^3}$ com $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$ e como $V = u_x$ vem

$$a'_x = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a_x}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{a_x}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3} = \frac{a_x}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 a_x$$

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3} a'_x = \frac{a'_x}{\dfrac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)^3}} = \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)^3 \cdot a'_x$$ e $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$ e vem

$$\frac{dV_x}{dt} = \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)^3 \cdot a'_x$$ e fazendo $c = 1$ ano-luz ano^{-1} e $\dfrac{V}{c} = \beta = V$ e também $V_x = V$ vem

$$\frac{d\beta}{dt} = \left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3 a'_x$$ ou $$\frac{d\beta}{\left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3} = a'_x \cdot dt$$ e, integrando, $$\int_0^\beta \frac{d\beta}{\left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3} = a'_x \int_0^t dt$$

que dá $$\left.\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right|_0^\beta = a'_x\, t\Big|_0^t$$ ou $$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a'_x \cdot t$$ que elevando ao quadrado

e explicitando β dá: $$\beta = \frac{a'_x \cdot t}{\sqrt{1 + a'^2_x t^2}}$$