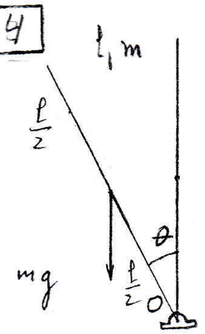
15.1

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \;;\; \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \text{pois}$$

o angulo que $\vec{r}$ faz com $\vec{F}$ é zero e $|\vec{r} \times \vec{F}| = |r||F| \operatorname{sen}(\alpha) = 0$

Se $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ isto implica que $\vec{L} = \text{const}$ e o plano que contem $\vec{r}$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{L}$, que como é constante, implica que o movimento se faz num plano.

15.4



Perda de energia potencial $= m \cdot \frac{l}{2} \cdot g$

Ganho em energia cinética de rotação $= \frac{1}{2} I \omega^2$

Com $I_0 = \frac{1}{3} m l^2$. Igualando:

$$m \frac{l}{2} g = \frac{1}{2}\frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \;;\; g = \frac{1}{3} l \omega^2 ; \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

<u>outro método:</u> Torque $= I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$ Torque $= mg \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2} \operatorname{sen}\theta$

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\omega \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}$$

Então $\frac{1}{3} \cancel{m} l^{\cancel{2}} \cdot \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \cancel{m} g \frac{\cancel{l}}{2} \operatorname{sen}\theta$; $\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta$; $\omega\, d\omega = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

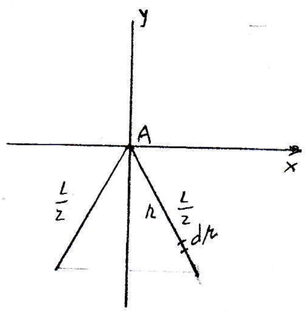
que, integrando, dá: $\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta + C^{te}$ e $\omega(\theta = 0^\circ) = 0$ pelo que

$0 = -\frac{3}{2}\frac{g}{l} + C^{te}$ donde vem para a constante de integração: $C^{te} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$ e

$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)$ pelo que $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$ e se $\theta = 90^\circ$ $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

que é o mesmo resultado que no método anterior.

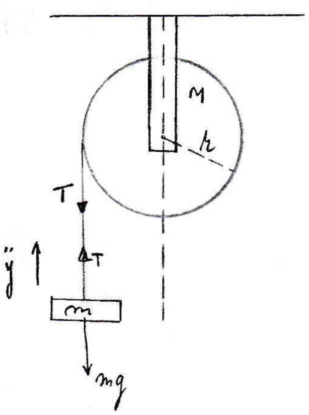
15.3 | 15.3



$$\int_0^{\frac{L}{2}} r^2 \frac{M}{L} dr = \frac{M}{L} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\frac{1}{8}L^3 = \frac{1}{24} ML^2$$

Como há 2 braços o momento de inércia total é duas vezes este valor: $I = 2\frac{1}{24}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2$

15.5 | 15.5



$$\ddot{y} = r\ddot{\theta} \qquad I = \frac{1}{2}Mr^2$$

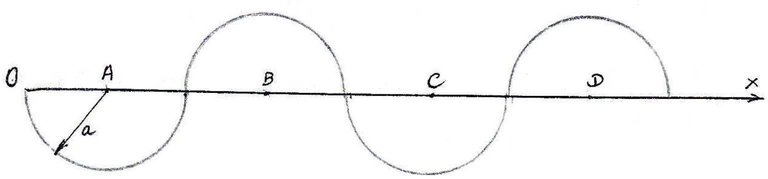
$$mg - m\ddot{y} - T = 0 \qquad T = mg - mr\ddot{\theta}$$

$$\text{Torque} = \Gamma = T\cdot r = I\ddot{\theta} \qquad mgr - mr^2\ddot{\theta} = I\ddot{\theta}\,; \quad mgr = \left(mr^2 + \frac{1}{2}Mr^2\right)\ddot{\theta}$$

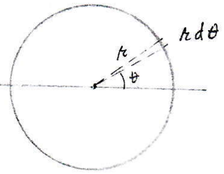
$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{mr^2 + \frac{1}{2}Mr^2} = \frac{mg}{mr + \frac{1}{2}Mr} \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{mgr}{mr + \frac{1}{2}Mr} = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{1 + \frac{M}{2m}} g$$

15.6 | 15.6



Momento de inércia de um fio circular de massa m em relação ao centro.



$$dm = \frac{m}{2\pi r}\cdot r\,d\theta\,; \quad I_{\odot} = \int r^2 dm = \frac{m}{2\pi} r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = mr^2.$$

Momento de inércia de um fio semicircular: $I_{\smile} = \frac{1}{2}mr^2$

Na figura acima: $I_A = I_B = I_C = I_D = \frac{1}{2}\frac{M}{4}a^2 = \frac{1}{8}Ma^2$

$$I_{A/O} = \frac{1}{8}Ma^2 + \frac{M}{4}a^2 = \frac{M}{4}a^2\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$I_{B/O} = \frac{1}{8}Ma^2 + \frac{M}{4}(3a)^2 = \frac{M}{4}a^2\left(\frac{1}{2}+3^2\right)$$

$$I_{C/O} = \frac{1}{8}Ma^2 + \frac{M}{4}(5a)^2 = \frac{M}{4}a^2\left(\frac{1}{2}+5^2\right)$$

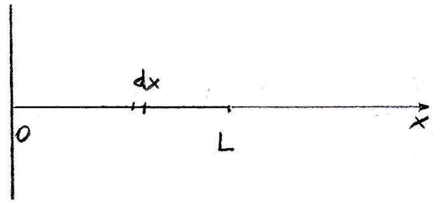
$$I_{D/O} = \frac{1}{8}Ma^2 + \frac{M}{4}(7a)^2 = \frac{M}{4}a^2\left(\frac{1}{2}+7^2\right)$$

$$I_{total} = \frac{M}{4}a^2\left[\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+9+\frac{1}{2}+25+\frac{1}{2}+49\right] =$$

$$= \frac{M}{4}a^2\left[4\cdot\frac{1}{2}+1+9+25+49\right] = \frac{86}{4}Ma^2 = 21{,}5\,Ma^2$$

15.7

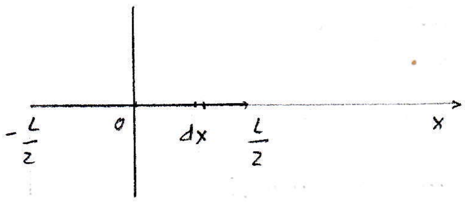
a)



$$dm = \frac{m}{L}dx$$

$$I = \frac{m}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(x^3\Big|_0^L\right) = \frac{1}{3}mL^2$$

b)

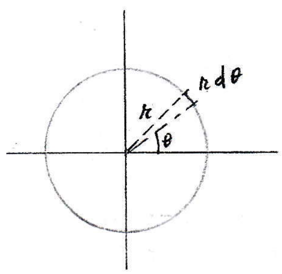


$$dm = \frac{m}{L}dx$$

$$I = \frac{m}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(x^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\right) = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{12}mL^2$$

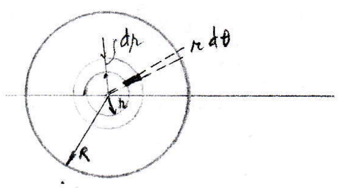
c)



$$dm = \frac{m}{2\pi r}r\,d\theta$$

$$I = \int \frac{m}{2\pi r}r^2 r\,d\theta = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{m}{2\pi}r^2 2\pi = mr^2$$

d)

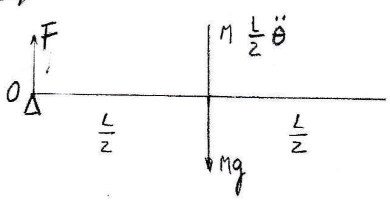


Elemento de área : $r\,d\theta\,dr$

" " massa: $dm = \frac{m}{\pi R^2} r\,dr\,d\theta$

$$I = \int r^2 dm = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{\pi R^2}2\pi\frac{1}{4}\left(r^4\Big|_0^R\right) = \frac{1}{2}mR^2$$

15.8



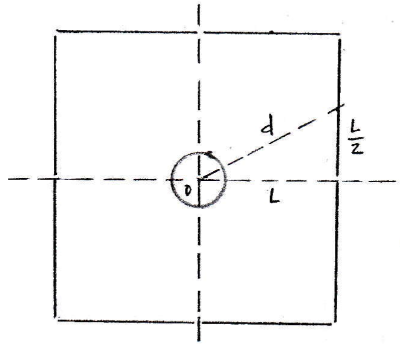
$$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta} \quad \text{em que } I_0 = \frac{1}{3}ML^2 \ ; \ Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

$$\sum F_y = 0 \ ; \ F + M\frac{L}{2}\ddot{\theta} - Mg = 0 \ ; \ F = -M\frac{L}{2}\frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} + Mg$$

$$F = Mg\left(1 - \frac{3ML^2}{4ML^2}\right) = Mg\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{Mg}{4}$$

15.9

15.9



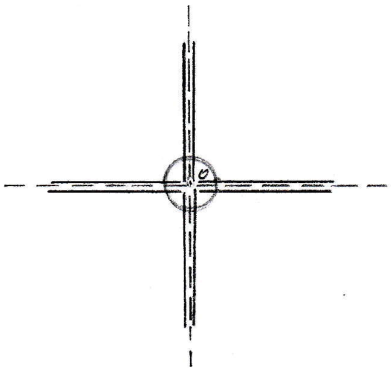
$$d = \sqrt{L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = L\,\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Momento de inércia de uma das barras em relação a O:

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m\left(L\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{16}{12} m L^2$$

Momento de inércia total antes da recolha:

$$I_{t_a} = 8\,\frac{16}{12} m L^2 + \frac{40}{3} m L^2 = 24\, m L^2$$



Momento de inércia de uma das barras em relação à extremidade em O:

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$

Momento de inércia total depois da recolha;

$$I_{t_d} = 8\,\frac{1}{3} m L^2 + \frac{40}{3} m L^2 = 16\, m L^2$$

O momento angular mantem-se e então: $I_{t_a}\,\omega_0 = I_{t_d}\,\omega_1$; $\omega_1 = \frac{I_{ta}}{I_{t_d}}\,\omega_0 = \frac{24}{16}\,\omega_0 = \frac{3}{2}\,\omega_0$

Energia cinética de rotação antes : $W_a = \frac{1}{2} I_{ta}\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}\, 24 m L^2 \omega_0^2 = 12\, m L^2 \omega_0^2$

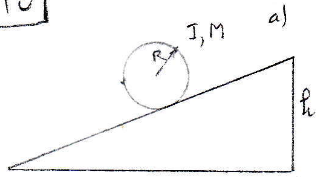
" " " depois: $W_d = \frac{1}{2} I_{t_d}\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\, 16 m L^2 \left(\frac{3}{2}\omega_0\right)^2 = 8\,\frac{9}{4}\, m L^2 \omega_0^2 = 18\, m L^2 \omega_0^2$

$\therefore$

$W_d - W_a = (18 - 12)\, m L^2 \omega_0^2 = 6\, m L \omega_0^2$ que é o trabalho fornecido pelo dispositivo.

15.10

15.10



a) A conservação da energia permite escrever:

$$M g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{em que} \quad \omega = \frac{v}{R} \quad \text{e vem:}$$

$$2 M g h = \left(M + \frac{I}{R^2}\right) v^2 \qquad v = R\sqrt{\frac{2 M g h}{M R^2 + I}}$$

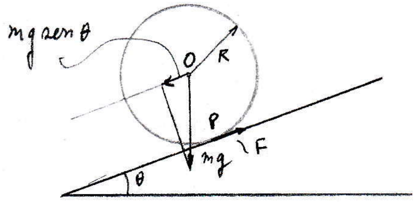
b) Caso de uma esfera: $I = \frac{2}{5} M R^2$ $\qquad v_e = \sqrt{\frac{10}{7} g h} = 1{,}195\sqrt{g h}$

Caso de um disco : $I = \frac{1}{2} M R^2$ $\qquad v_d = \sqrt{\frac{4}{3} g h} = 1{,}154\sqrt{g h}$

Então v_e é ligeiramente maior que v_d

15.11

15.11



Se o eixo O se mantem fixo a força mg sen θ que o faria mover deve ser anulada por uma força F aplicada pela correia ao cilindro e tal que $F - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$.

O momento de inércia do cilindro em relação ao eixo perpendicular ao plano e que passa por O – eixo do cilindro – é $I = \frac{1}{2} m R^2$. Então há um torque em relação a esse eixo e tal que: $R\,mg\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}$. Mas, como não há escorregamento $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{l}}{R}$ e vem $mg\,\mathrm{sen}\,\theta\, R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\ddot{l}}{R}$ e

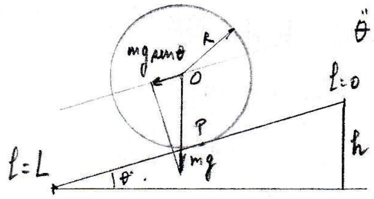
$\ddot{l} = 2 g\,\mathrm{sen}\,\theta$. A correia deve ter uma aceleração no sentido ascendente de valor $2g\,\mathrm{sen}\,\theta$

15.11 Extra

15.11 Extra

Vamos analizar as energias em jogo no caso do cilindro num plano inclinado, em queda.

$$M g\,\mathrm{sen}\,\theta\, R = I\ddot{\theta} \qquad I = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \text{ em relação a } P$$



$$\ddot{\theta} = \frac{M g\,\mathrm{sen}\,\theta\, R}{\frac{3}{2} M R^2} = \frac{\ddot{l}}{R} \qquad \ddot{l} = \frac{2}{3} g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{l} = \frac{2}{3} g (\mathrm{sen}\,\theta)\, t \qquad \text{Condições iniciais nulas!}$$

$$l = \frac{1}{3} g (\mathrm{sen}\,\theta) t^2$$

$$l(t=T) = L = \frac{1}{3} g\,\mathrm{sen}\,\theta\, T^2 \qquad T = \sqrt{\frac{3L}{g\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

$$\dot{l}(t=T) = \frac{2}{3} g\,\mathrm{sen}\,\theta \frac{\sqrt{3L}}{\sqrt{g\,\mathrm{sen}\,\theta}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{g\,\mathrm{sen}\,\theta\, L}$$

En. cinética de translação: $E_{K_t} = \frac{1}{2} M \dot{l}^2 = \frac{1}{2} M \frac{4}{3} g\,\mathrm{sen}\,\theta\, L = \frac{2}{3} M L g\,\mathrm{sen}\,\theta$

En. cinética de rotação: $E_{K_{ro}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{g\,\mathrm{sen}\,\theta\, L}}{R}\right)^2 = \frac{1}{3} M L g\,\mathrm{sen}\,\theta$

En. total: $E_{K_t} + E_{K_{ro}} = \frac{2}{3} M g L\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{3} M g L\,\mathrm{sen}\,\theta = M g L\,\mathrm{sen}\,\theta = M g h$

A en. total em $l = L$ é igual à energia potencial em $l = 0$.

E ainda: qual é a energia cinética de rotação em relação a P?

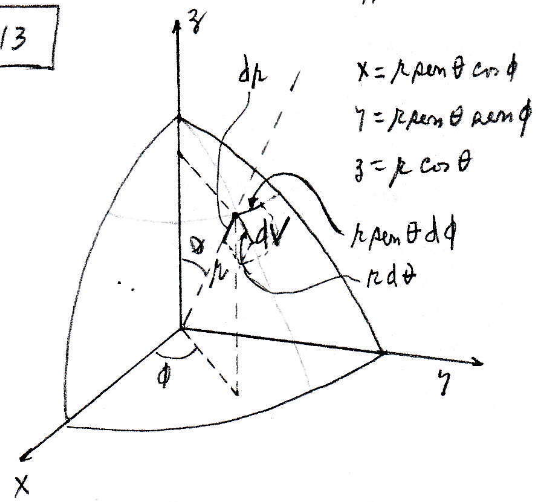
$$E_{K_P} = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} M R^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{g\,\mathrm{sen}\,\theta\, L}}{R}\right)^2 = M L g\,\mathrm{sen}\,\theta = M g h. = E_{K_t} + E_{K_{ro}}$$

15.12 15.12

a) Admitindo que os 2 cilindros rolam sem escorregamento, o facto de um chegar primeiro do que o outro ao fundo do plano inclinado pode ser devido a que tenham momentos de inércia diferentes.

b) Vamos supôr que um dos cilindros é homogéneo e que o outro tem a massa mais concentrada junto ao eixo, variando de uma densidade máxima junto ao eixo para uma densidade mínima na periferia; então o momento de inércia deste cilindro é mais pequeno que o do cilindro homogéneo. E, tudo o resto igual, se I diminui então a aceleração angular $\ddot{\theta}$ aumenta, $\ddot{x}$ aumenta e este cilindro não-homogéneo chegará primeiro à base do plano inclinado.

15.13 15.13



O elemento de volume é:

$$dV = r\,d\theta \cdot r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi \cdot dr = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

O elemento de massa é: $dm = \rho\,dV$

A distância desta massa ao eixo dos zz é: $r\,\text{sen}\,\theta$.

O elemento do momento de inércia em relação ao eixo dos zz é:

$$dI = dm \cdot (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = \rho \cdot (r\,\text{sen}\,\theta)^2\,dV = \rho\,(r\,\text{sen}\,\theta)^2\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = \rho\,r^4\,\text{sen}^3\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$I_z = \int dI = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta\,d\theta \int_{R_a}^{R_b} r^4\,dr = \rho \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos x\right)\Big|_0^{\pi} \right\}}_{\frac{16}{12}} \cdot \left(\frac{r^5}{5}\Big|_{R_a}^{R_b} \right) =$$

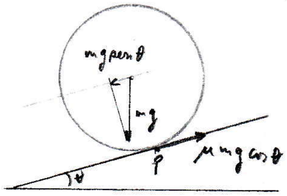
$$= \rho \cdot 2\pi\,\frac{16}{12}\,\frac{1}{5}\left(R_b^5 - R_a^5\right) = \frac{8\pi}{15}\,\rho\left(R_b^5 - R_a^5\right)$$

Escrevendo I_z em função da massa M, vem: $\frac{4}{3}\pi\left(R_b^3 - R_a^3\right) \cdot \rho = M$, pelo que:

$$I_z = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\left(R_b^3 - R_a^3\right)}\left(R_b^5 - R_a^5\right) = \frac{2}{5}M\,\frac{R_b^5 - R_a^5}{R_b^3 - R_a^3}$$

15.14

15.14



$$mg\,\text{sen}\,\theta \cdot R = \frac{7}{5} m R^2 \ddot{\theta} \qquad I = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

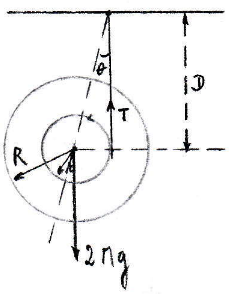
$$\mu m g \cos\theta \cdot R = \frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta}$$

Eliminando $\ddot{\theta}$ vem $\cancel{m}\cancel{g}\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{R} = \frac{7}{5}\cancel{m}\cancel{R^2}\dfrac{\mu \cancel{m}\cancel{g}\cos\theta\,\cancel{R}}{\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{R^2}}$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{7}{\cancel{5}}\,\frac{\cancel{5}}{2}\,\mu\cos\theta \qquad \mu = \frac{2}{7}\,\text{tg}\,\theta$$

15.15

15.15



a) $\text{tg}\,\theta = \dfrac{r}{D}$

b) $2Mg - 2M\ddot{y} = T \qquad I = \frac{1}{2}\,2M\,R^2 = MR^2 \qquad \ddot{\theta} = \dfrac{\ddot{y}}{r}$

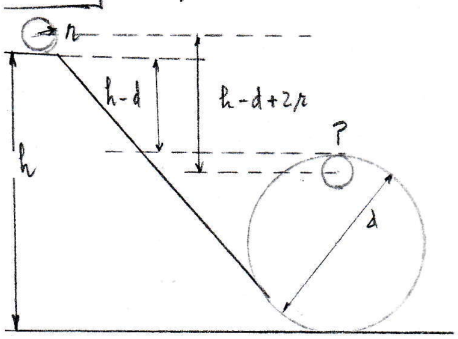
$$T \cdot r = I\ddot{\theta} \qquad (2Mg - 2M\ddot{y})\,r = MR^2\,\frac{\ddot{y}}{r}$$

$$2Mg = 2M\ddot{y} + MR^2\frac{1}{r^2}\ddot{y} \; ; \quad 2g = \left(2 + \frac{R^2}{r^2}\right)\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = \frac{g}{1 + \dfrac{R^2}{2r^2}}$$

15.16

15.16



Perda em energia potencial: $mg(h-d+2r)$

Ganho em energia cinética: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v_1^2}{r^2} = mv_1^2$

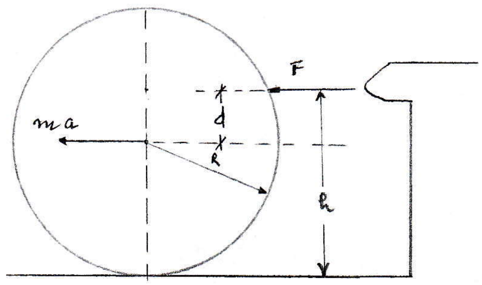
Equilíbrio em P: $m\dfrac{v_1^2}{\frac{d}{2}-r} = mg \; ; \; v_1^2 = g\left(\frac{d}{2}-r\right)$

Conservação da energia: $mg(h-d+2r) = mv_1^2 = mg\left(\frac{d}{2}-r\right)$

Então $h-d+2r = \frac{d}{2}-r \; ; \; h = \frac{3}{2}d - 3r$

15.19

15.19



$F = ma$

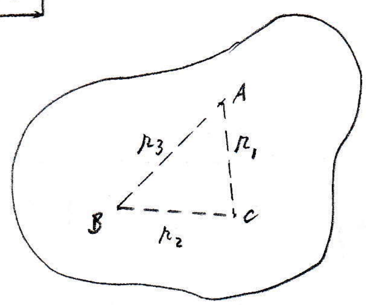
$\sum \vec{M} = 0 \qquad F \cdot d = \frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta} \qquad \text{Mas } \ddot{\theta} = \frac{a}{R}$

$\cancel{m}\cancel{a}\, d = \frac{2}{5} \cancel{m} R^2 \frac{\cancel{a}}{R}\ ; \quad d = \frac{2}{5} R$

$h = R + d = R + \frac{2}{5}R = \frac{7}{5}R = \frac{7}{5}\,\frac{1}{2}\,2R = \frac{7}{10}\,D$

15.20

15.20

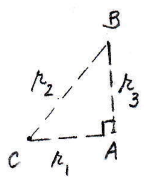


C é o CM

$I_A = I_C + M r_1^2 \qquad I_C = I_A - M r_1^2$

$I_B = I_C + M r_2^2 \qquad I_B = I_A - M r_1^2 + M r_2^2 = I_A + M\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

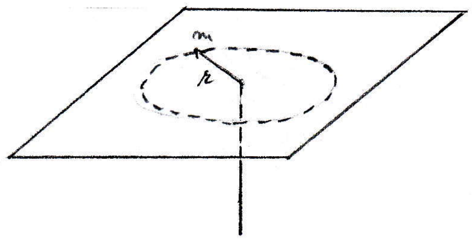
e se $r_3^2 = r_2^2 - r_1^2$ o que se verifica no caso do triângulo ABC seja rectângulo com r_1 perpendicular a r_3



então $I_B = I_A + M r_3^2$

15.17

15.17



a) O momento angular é constante, isto é

$$|\vec{r}\times\vec{p}| = r\,m\,v = l = c^{te}$$

Se $r=r_1$ e $v=v_1$ então para $r=r_2$ vem

$$m\,r_1 v_1 = m r_2 v_2 \quad \text{pelo que} \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

b) $$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = W = \frac{1}{2} m r_1^2 \frac{v_1^2}{r_1^2} - \frac{1}{2} m r_2^2 \frac{v_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{r_1}{r_2} v_1\right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

e como $r_1 > r_2$ vem $W<0$ e há que fornecer energia ao sistema pois a energia com $r=r_2$ é maior do que se $r=r_1$.

c) $dW = F\cdot dr$

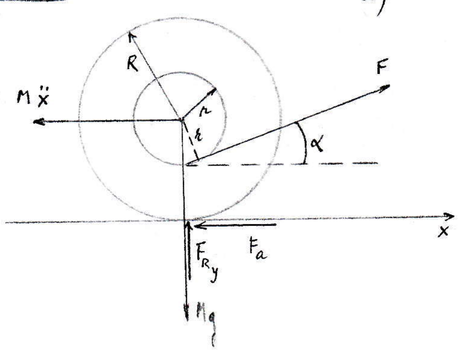
$$W = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m r_1^2 \frac{v_1^2}{r_1^2} = \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad \text{Mas } r_1 v_1 = l = c^{te} \text{ e vem:}$$

$$W = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{r^2}$$. Derivando em ordem a r obtemos a força

$$F = \frac{dW}{dr} = \frac{1}{2} m (-2) \frac{l^2}{r^3} = -m \frac{l^2}{r^3} = -m \frac{r\,v}{r^3} = -m \frac{v^2}{r}$$ e que, como se vê, é igual à força centrípeta que a massa experimenta.

15.18

15.18



a) $$\sum F_x = 0 \qquad F\cos\alpha - M\ddot{x} - F_a = 0 \;;\quad F_a = F\cos\alpha - M\ddot{x}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \qquad F_a \cdot R - F r = I\ddot{\theta}$$

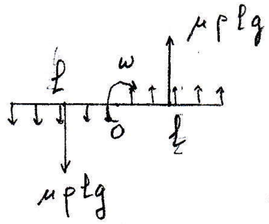
$$F\cos\alpha R - M R\ddot{x} - F r = I\frac{\ddot{x}}{R}\;;\quad F\cos\alpha\, R - F r = \left(M R + \frac{I}{R}\right)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{F(R\cos\alpha - 1)}{M R + \frac{I}{R}} = \frac{F R (R\cos\alpha - 1)}{I + M R^2}$$

b) Se levanta da mesa $F_{R_y} = 0$ e vem $Mg = F\operatorname{sen}\alpha$ e portanto $F = \dfrac{Mg}{\operatorname{sen}\alpha}$

15.22 **15.22**

$$I = \frac{1}{12} m (2\ell)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2$$



$$-2\mu\rho\ell g \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} \quad ; \quad -\mu\rho g \cancel{\ell^2} = \frac{1}{3} m \cancel{\ell^2} \ddot{\theta}$$

mas $m = \rho 2\ell$ e vem: $-\mu \cancel{\rho} g = \frac{1}{3} \cancel{\rho} 2\ell \ddot{\theta}$

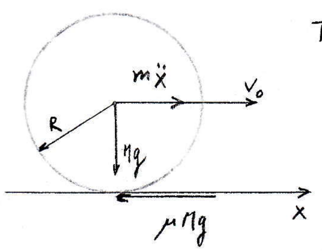
$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu g}{\ell}$ que integrando dá: $\dot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu g}{\ell} t + \omega_0$

e para $t = T$ queremos que a velocidade se anule: $\dot{\theta}(t=T) = -\frac{3}{2} \frac{\mu g}{\ell} T + \omega_0 = 0$

donde $T = \dfrac{2\ell\omega_0}{3\mu g}$

15.23 **15.23**

$I = \frac{2}{5} M R^2 \qquad \Sigma F_x = 0 \; ; \; m\ddot{x} + \mu M g = 0 \; ; \; \ddot{x} = -\mu g$



Torque provocado pela força de atrito é: $\mu M g R$ que é igual a $I\ddot{\theta}$

$\mu \cancel{M} g R = \frac{2}{5} \cancel{M} R^{\cancel{2}} \ddot{\theta} \qquad \ddot{\theta} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}$

$\ddot{x} = -\mu g$

$\dot{x} = V_0 - \mu g t$ e em $t = T$ inicia-se o movimento de rolamento sem escorregamento. A partir desse instante podemos escrever a relação: $\dot{x} = \dot{\theta} R$ e então vem: $\dot{x} = V_0 - \mu g T = \dot{\theta} R$.

$\dot{\theta} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} + \dot{\theta}(t=0)$. Porém, diz o enunciado, que o deslizamento inicial se faz sem rolamento. Então $\dot{\theta}(t=0) = 0$ e vem

$\dot{\theta} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t$ pelo que $\dot{x}(t=T) = V_0 - \mu g T = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} T R = \frac{5}{2} \mu g T$ donde

$V_0 = \left[1 + \frac{5}{2}\right] \mu g T = \frac{7}{2} \mu g T$ e $T = \frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu g}$

A distância percorrida até $t = T$ é dada por:

$D = x(t=T) = V_0 T - \frac{1}{2} \mu g T^2$ e substituindo T pelo valor encontrado, vem:

$$D = V_0 \frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu g}\right)^2 = \frac{2}{7} \frac{V_0^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{V_0^2}{\mu g} = \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{49}\right] \frac{V_0^2}{\mu g} = \frac{14-2}{49} \frac{V_0^2}{\mu g} =$$

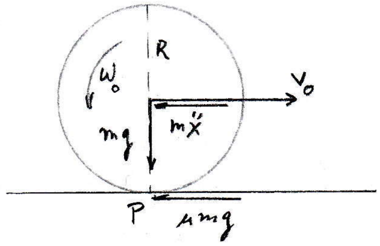
$$= \frac{12}{49} \frac{V_0^2}{\mu g}$$

b) Para $t = T$ a velocidade é: $v = \dot{x}(t=T) = \frac{5}{2} \mu g T = \frac{5}{2} \mu g \frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu g} = \frac{5}{7} V_0$

15.24

15.24

$I=\frac{2}{5}MR^2$



$\Sigma F_x = 0 \quad m\ddot{x} = -\mu g m;\ \ \ddot{x}=-\mu g;\ \ \dot{x}=V_0-\mu g t$

Torque $= I\cdot\ddot\theta$ Torque $= -\mu g m R = \frac{2}{5} mR^2\ddot\theta$

então $\ddot\theta = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$; $\dot\theta = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t+\dot\theta(t=0)$ mas $\dot\theta(t=0)=\omega_0$

$\dot\theta=\omega_0-\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$

a) o bola acaba por parar completamente ao fim de um tempo $t=T$.
Então $\dot\theta(t=T)=0$ e $\dot{x}(t=T)=0$ e vem:
$\omega_0-\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}T=0$ e $V_0-\mu gT=0$. Eliminando μgT entre estas duas equações vem $\omega_0-\frac{5}{2}\frac{1}{R}V_0=0$; $V_0=\frac{2}{5}\omega_0 R$

b) O recuo dá-se com rolamento sem deslizamento. Não há forças resistentes ao movimento pelo que a velocidade linear fica constante bem como a velocidade angular, as quais estão relacionadas por $V=\omega R$. Pretende-se que a velocidade de recuo seja de $-\frac{3}{7}V_0$.
Então o ω de recuo será $\frac{3}{7}\frac{V_0}{R}$ que é positivo pois não houve inversão do sentido de rotação. Para $t=T$ deve verificar-se que:

$-\frac{3}{7}V_0=V_0-\mu gT$ e $\frac{3}{7}\frac{V_0}{R}=\omega_0-\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}T$

Eliminando μgT entre estas duas equações, vem: $\mu gT=V_0\left[1+\frac{3}{7}\right]=\frac{10}{7}V_0$
e substituindo na 2ª equação: $\frac{3}{7}\frac{V_0}{R}=\omega_0-\frac{5}{2}\frac{1}{R}\frac{10}{7}V_0$ ou

$\frac{3}{7}\frac{V_0}{R}+\frac{5}{2}\frac{10}{7}\frac{V_0}{R}=\omega_0$; $\left(\frac{3}{7}+\frac{25}{7}\right)V_0=\omega_0 R$; $V_0=\frac{7}{28}\omega_0 R=\frac{\omega_0 R}{4}$

outro método 15.24

15.24 outro método

"Com a devida vénia a Sukumar Chandra"

a) A força externa, devido ao atrito, como atua no ponto de contacto P horizontalmente, o momento angular em relação a P mantem-se constante
Há 2 momentos lineares $I_{cm}\omega_0$ e $-MV_0R$ cuja soma $I_{cm}\omega_0-MV_0R=0$
porque quando se dá a paragem completa o momento angular é nulo e como o momento angular se conserva então ele deve ser sempre nulo

15.24 Contin.   Contin. 15.24

e vem: $I_{CM}\,\omega_0 - mV_0R = 0$ com $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

$\frac{2}{5}MR^2\omega_0 - mV_0R = 0$ donde $V_0 = \frac{2}{5}\omega_0 R$

b) Após a inversão de sentido da bola está rola sem deslizamento. O seu momento angular é agora $I_{CM}\,\omega + \left(\frac{3}{7}V_0\right)MR$. Como o momento angular é constante pode escrever-se: $I_{CM}\,\omega_0 - MV_0R = I_{CM}\,\omega + \left(\frac{3}{7}V_0\right)MR$. Mas

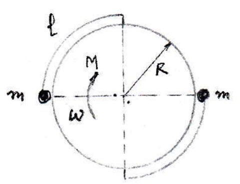
$\omega = \frac{3}{7}\frac{V_0}{R}$ e substituindo vem: $\frac{2}{5}MR^2\omega_0 = MV_0R + \frac{2}{5}MR^2\frac{3}{7}\frac{V_0}{R} + \frac{3}{7}V_0MR$ ou

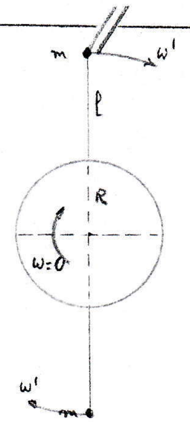
$\frac{2}{5}R\omega_0 = V_0 + \frac{2}{5}\frac{3}{7}V_0 + \frac{3}{7}V_0$; $\frac{2}{5}\omega_0 R = \left[1 + \frac{3}{7} + \frac{2}{5}\frac{3}{7}\right]V_0 = \frac{35+15+6}{35}V_0 = \frac{56}{35}V_0$

donde $V_0 = \frac{35}{56}\frac{2}{5}\omega_0 R = \frac{7}{28}\omega_0 R = \frac{\omega_0 R}{4}$

"Com a devida vénia a Sukumar Chandra"

15.25   15.25





Conservação do momento angular:

$(I_M + I_m)\,\omega = I'_m\,\omega'$ $I_M = \frac{1}{2}MR^2$ e $I_m = 2mR^2$ e $I'_m = 2m(R+\ell)^2$

$\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega = 2m(R+\ell)^2\,\omega'$ eq. (1)

Conservação da energia:

$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I'\omega'^2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\,2m(R+\ell)^2\,\omega'^2$ eq (2)

Substituindo ω' na eq. (2) pelo ω' obtido da eq. (1) vem:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\,2m(R+\ell)^2\left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2}{2m(R+\ell)^2}\right)^2\omega^2$ e simplificando dá:

$\left(2m(R+\ell)^2\right)^2 = 2m(R+\ell)^2\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)$; $4m^2(R+\ell)^2 = 2m\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)$

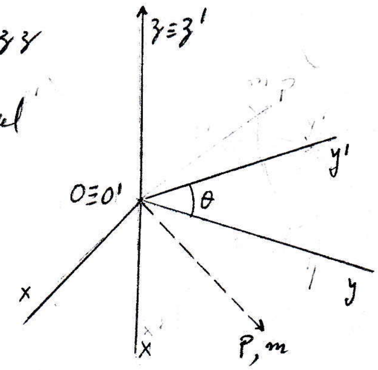
$4\cancel{m}R^2 + 8mR\ell + 4m\ell^2 = MR^2 + 4\cancel{m}R^2$; $4m\ell^2 + 8mR\ell - MR^2 = 0$; $\ell^2 + 2R\ell - \frac{M}{4m}R^2 = 0$

cujas raízes são $\ell = \frac{1}{2}\left(-2R \pm \sqrt{4R^2 + \frac{M}{m}R^2}\right) = -R \pm \frac{1}{2}2R\sqrt{1 + \frac{M}{4m}} = R\left[\sqrt{1 + \frac{M}{4m}} - 1\right]$

pois a outra raiz conduz a um ℓ negativo que não faz sentido.

Neste problema $O \equiv O'$ pelo que $r = x\,i + y\,j \equiv r' = x'i' + y'j'$

Vamos considerar $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e uma rotação em torno do eixo dos zz



Cálculo feito em coordenadas de Moe, que é o sistema móvel indicado por "'".

$$r' = x'i' + y'j' \; ; \quad \frac{dr'}{dt} = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt}$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \dot{x}'\frac{di'}{dt} + \dot{y}'\frac{dj'}{dt} + \dot{x}'\frac{di'}{dt} + \dot{y}'\frac{dj'}{dt} + x'\frac{d^2i'}{dt^2} + y'\frac{d^2j'}{dt^2}$$

$$= \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + 2\dot{x}'\frac{di'}{dt} + 2\dot{y}'\frac{dj'}{dt} + x'\frac{d^2i}{dt^2} + y'\frac{d^2j'}{dt^2}$$

$$\frac{di'}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{di'}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}j' = \omega j'$$

$$\frac{d^2i'}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}j'\right) = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{dj'}{d\theta} = -\omega^2 i'$$

$$\frac{dj'}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dj'}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}(-i') = -\frac{d\theta}{dt}i' = -\omega i'$$

$$\frac{d^2j'}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{d\theta}{dt}i'\right) = -\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{di'}{d\theta} = -\omega^2 j'$$ e substituindo e agrupando dá:

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + 2\dot{x}'\omega j' + 2\dot{y}'(-\omega i') + x'(-\omega^2 i') + y'(-\omega^2 j') =$$

$$= \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + 2\omega(\dot{x}'j' - \dot{y}'i') - \omega^2(x'i' + y\,j')$$

$$= (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')i' + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y)j'$$

Mas $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ pelo que $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ e $\underset{\sim}{F} = F_x i + F_y j = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$. Nas coordenadas de Moe $\underset{\sim}{F} = F_x(\cos\theta\, i' - \operatorname{sen}\theta\, j') + F_y(+\operatorname{sen}\theta\, i' + \cos\theta\, j') = (F_x\cos\theta + F_y\operatorname{sen}\theta)i' + (-F_x\operatorname{sen}\theta + F_y\cos\theta)j'$

pois $\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ e invertendo $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}$

$$(F_x\cos\theta + F_y\operatorname{sen}\theta)i' + (-F_x\operatorname{sen}\theta + F_y\cos\theta)j' = (m\ddot{x}' - m2\omega\dot{y}' - m\omega^2 x')i' + (m\ddot{y}' + m2\omega\dot{x}' - m\omega^2 y')j'$$

$F_x\cos\theta + F_y\operatorname{sen}\theta = m\ddot{x}' - m2\omega\dot{y}' - m\omega^2 x'$; $m\ddot{x}' = F_x\cos\theta + F_y\operatorname{sen}\theta + m2\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' = F'_x$

$-F_x\operatorname{sen}\theta + F_y\cos\theta = m\ddot{y}' + m2\omega\dot{x}' - m\omega^2 y'$; $m\ddot{y}' = -F_x\operatorname{sen}\theta + F_y\cos\theta - m2\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' = F'_y$

$\boxed{15.26}$ Contin. Contin. $\boxed{15.26}$

O cálculo anterior é feito directamente por derivações sucessivas e sem usar o produto vectorial. De uma forma mais elegante e compacta podemos escrever:

$\vec{V}_J = \vec{V}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ em que $\vec{r} = \vec{r}'$ e supôs-se ω constante.

$$\left(\frac{dV_J}{dt}\right)_J = \vec{a}_J = \left(\frac{dV_J}{dt}\right)_M + \omega \times V_J$$

$$= \left(\frac{dV_M}{dt}\right)_M + \omega \times \left(\frac{dr'}{dt}\right)_M + \omega \times \left(V_M + \omega \times r'\right) = \left(\frac{dV_M}{dt}\right)_M + \omega \times V_M + \omega \times V_M + \omega \times \omega \times r'$$

$$= \left(\frac{dV_M}{dt}\right)_M + 2\,\vec{\omega} \times \vec{V}_M + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\left(\frac{dV_M}{dt}\right)_M = \frac{d^2 r'}{dt^2} = \ddot{x}'\, i' + \ddot{y}'\, j'$$

$$2\,\omega \times V_M = 2 \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0 \end{vmatrix} = 2\left(-\omega \dot{y}'\, i' + \omega \dot{x}'\, j'\right)$$

$$\omega \times \omega \times r' = \omega \times \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \omega \times \left[-\omega y'\, i' + \omega x'\, j'\right] = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y' & \omega x' & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x'\, i' - \omega^2 y'\, j'$$

e substituindo vem: $\vec{a}_J = \ddot{x}'\, i' + \ddot{y}'\, j' - 2\omega \dot{y}'\, i' + 2\omega \dot{x}'\, j' - \omega x'\, i' - \omega^2 y'\, j'$

$$= \left(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega x'\right) i' + \left(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y'\right) j'$$

$$F_J = m\,\vec{a}_J = F_x\, i + F_y\, j = F_x\left(\cos\theta\, i' - \operatorname{sen}\theta\, j'\right) + F_y\left(+\operatorname{sen}\theta\, i' + \cos\theta\, j'\right) =$$

$$= \left(F_x \cos\theta + F_y \operatorname{sen}\theta\right) i' + \left(-F_x \operatorname{sen}\theta + F_y \cos\theta\right) j'$$

$F_x \cos\theta + F_y \operatorname{sen}\theta = m\ddot{x}' - 2m\omega \dot{y}' - m\omega x'$

$-F_x \operatorname{sen}\theta + F_y \cos\theta = m\ddot{y}' + 2m\omega \dot{x}' - m\omega^2 y'$

$m\ddot{x}' = F_x \cos\theta + F_y \operatorname{sen}\theta + 2m\omega \dot{y}' + m\omega x' = F'_x$

$m\ddot{y}' = -F_x \operatorname{sen}\theta + F_y \cos\theta - 2m\omega \dot{x}' + m\omega^2 y' = F'_y$