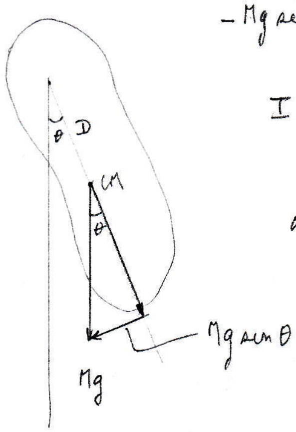
**17.1** **17.1**




$-Mg\,\mathrm{sen}\,\theta\, D = I\ddot{\theta}$ e se $\theta$ pequeno tal que $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$

$$I\ddot{\theta} = -MgD\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\theta = 0$$

ora sabe-se que uma solução desta equação é do tipo

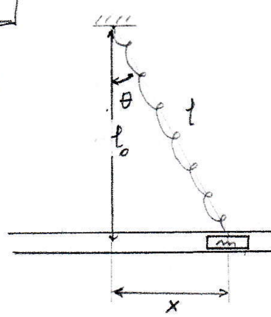
$$\theta = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad \text{donde que} \quad \omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}} = \frac{2\pi}{T}$$

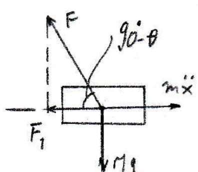
pelo que $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}}$

---

**17.2** **17.2**

a)




$$F = k(l - l_0) = k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right) = k\left(l_0\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - l_0\right) =$$

$$= k\,l_0\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1\right) \simeq k\,l_0\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 - 1\right) = k\,l_0\,\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{l_0^2} = \frac{1}{2}k\frac{x^2}{l_0}$$

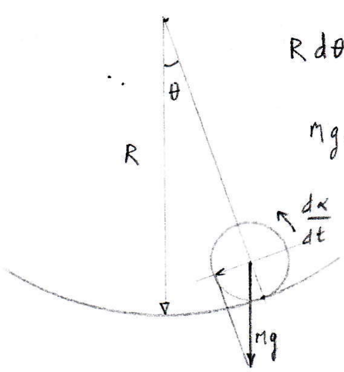
$$F_1 = F\cos(90^\circ - \theta) = F\,\mathrm{sen}\,\theta \simeq F\,\theta$$

$$x \simeq l_0 \cdot \theta \qquad \ddot{x} = l_0\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}k\frac{x^2}{l_0}\cdot\theta + m\ddot{x} = 0\,; \quad m\,l_0\ddot{\theta} + \frac{k}{2}\,\frac{l_0^2\theta^2}{l_0}\,\theta = 0\,; \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{2m}\theta^2 = 0}$$

que não é harmónico!

b)



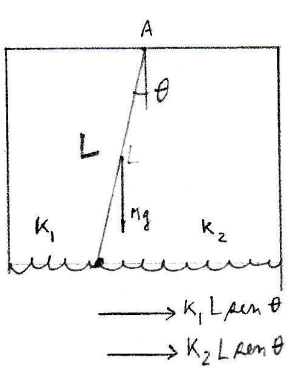

$$R\,d\theta = r\,d\alpha \qquad R\ddot{\theta} = r\ddot{\alpha}$$

$$Mg\,\mathrm{sen}\,\theta\, r + I\ddot{\alpha} = 0\,; \quad Mg\theta r + I\frac{R}{r}\ddot{\theta} = 0\,; \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgr^2}{IR}\theta = 0$$

que é harmónico!

---

**17.3** **17.3**




$$I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I_A\cdot\ddot{\theta} + Mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{L}{2} + (k_1 + k_2)L\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, L = 0$$

Se $\theta$ muito pequeno $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$ $\cos\theta \simeq 1$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\frac{L}{2} + (k_1 + k_2)L^2}{\frac{1}{3}ML^2}\theta = 0 \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{Mg\frac{L}{2} + (k_1 + k_2)L^2}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2}\,\frac{MgL + 2(k_1 + k_2)L^2}{ML^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3\left[MgL + 2(k_1 + k_2)L^2\right]}{2ML^2}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2ML}{3\left[Mg + 2(k_1 + k_2)L\right]}}$$

**17.4** **17.4**

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{com} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\dot{x} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

e se $E_K = U$ vem: $\cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{A^2} \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \phi) = \cancel{\frac{1}{2}} K \cancel{A^2} \cos^2(\omega_0 t + \phi)$

$\frac{m}{K}\omega_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \phi) = \cos^2(\omega_0 t + \phi)$ . Mas $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ e então $\frac{m}{K}\omega_0^2 = 1$ e vem:

$\operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \phi) = \cos^2(\omega_0 t + \phi)$ ; $1 - \cos^2(\omega_0 t + \phi) = \cos^2(\omega_0 t + \phi)$ ; $\cos^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}$

$\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\omega_0 t + \phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$

$$x(\omega_0 t + \phi = 45°) = A \cos 45° = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot A$$

isto é, a energia cinética iguala a energia potencial quando a amplitude instantânea for 70,7% da amplitude máxima.

---

**17.5** **17.5**

$x_A = 10 \operatorname{sen} \omega_A t$ com $\dot{x}_A = 10 \cdot \omega_A \cos \omega_A t$

$x_B = 10 \operatorname{sen} \omega_B t$ com $\dot{x}_B = 10 \cdot \omega_B \cos \omega_B t$

$x_A - x_B = 10 \operatorname{sen}(20 \cdot 0{,}35) - 10 \operatorname{sen}(21 \cdot 0{,}35) =$

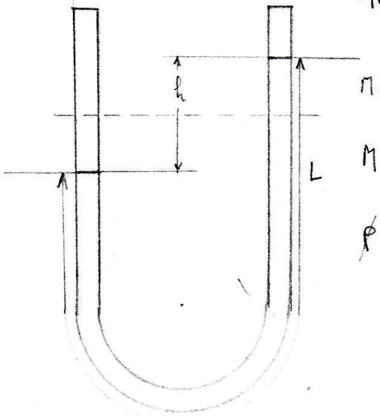
$= -2{,}186 \text{ cm}$

$\dot{x}_B - \dot{x}_B = 10\,\omega_B \cos \omega_B t - 10\,\omega_A \cos \omega_A t = 10\left[21 \cos(21 \cdot 0{,}35) - 20 \cos(20 \cdot 0{,}35)\right]$

$= -49{,}4 \text{ cm s}^{-1}$

---

**17.6** **17.6**




Massa total do líquido: $\rho L A$

Massa acima nível médio: $\Delta M = \rho A \frac{h}{2}$

Mas $\Delta M \cdot g = F = -M \ddot{h}$

$\cancel{\rho A} \frac{h}{2} g + \cancel{\rho A} L \ddot{h} = 0$ ; $\ddot{h} + \frac{g}{2L} h = 0$ donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{2L}}$ e

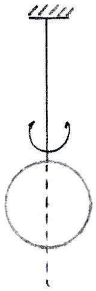
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

17.7 | 17.7

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

—————— // —————— // ——————

17.8 | 17.8



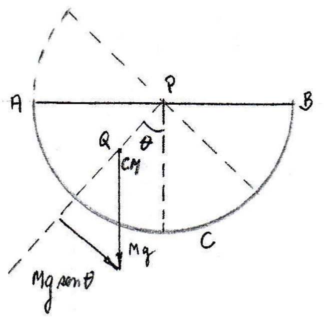
Momento de inércia do disco em relação ao eixo vertical:

$$I = \frac{1}{4} M R^2$$

$$I\ddot{\theta} + K\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{4K}} = \pi\sqrt{\frac{MR^2}{K}}$$

—————— // —————— // ——————

17.9 | 17.9



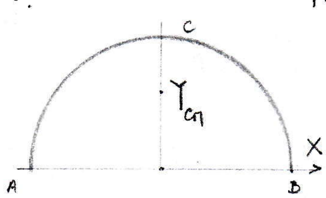

$$I_P\ddot{\theta} + Mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overline{PQ} = 0$$

em que é necessário calcular a localização do CM $\overline{PQ}$ e o momento de inércia $I_P$ em relação ao eixo perpendicular ao plano do papel e que passa por P.

Cálculo da localização do centro de massa:

1° CM do semi círculo ACB.

Pelo teorema de Pappus permite escrever que:

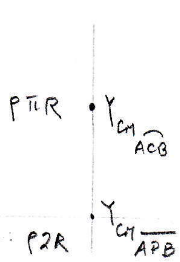



Comprimento do arco $\widehat{ACB}$ × Comprimento do arco descrito pelo CM numa rotação em torno do eixo dos xx = = área da superfície gerada pela rotação do arco,

ou seja $\pi R \cdot 2\pi Y_{CM} = 4\pi R^2$ ou $Y_{CM_{\widehat{ACB}}} = \frac{2}{\pi} R$ com massa $= \frac{M}{\pi R + 2R} \cdot \pi R = \rho \pi R$

2° CM da recta APB: $Y_{CM_{APB}} = 0$

3° CM do conjunto semi-círculo e segmento de recta $\overline{APB}$ com massa $= \rho 2R$



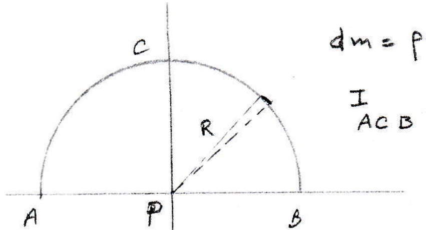

$$\rho\pi R \cdot Y_{CM_{\widehat{ACB}}} + \rho 2R \cdot 0 = (\rho\pi R + \rho 2R)\, Y_{CM_{conjunto}}$$

$$Y_{CM_{conjunto}} = \frac{\rho\pi R}{\rho\pi R + \rho 2R} Y_{CM_{\widehat{ACB}}} = \frac{\pi}{\pi+2} \frac{2}{\pi} R = \frac{2}{\pi+2} R$$

com massa $M = \rho R(\pi + 2)$

**17.9** Contin. — Contin. **17.9**

Agora já conhecemos $\overline{PQ} = \frac{2}{2+\pi} R$ e $M = \rho R(\pi+2)$. Falta calcular $I_P$




$$dm = \rho R\, d\theta$$

$$I_{ACB} = \int dm\, R^2 = \rho R^3 \int_0^{\pi} d\theta = \pi \rho R^3$$

$$I_{APB} = \frac{1}{12}(\rho 2R)(2R)^2 = \frac{8}{12}\rho R^3 = \frac{2}{3}\rho R^3$$

$$I_P = I_{\widehat{ACB}} + I_{\overline{APB}} = \pi\rho R^3 + \frac{2}{3}\rho R^3 = \left(\pi + \frac{2}{3}\right)\rho R^3$$

Finalmente: $\left(\pi+\frac{2}{3}\right)\rho R^3 \ddot{\theta} + \rho R(\pi+2)\, g\, \theta \frac{2}{2+\pi} R$ em que se fez $\operatorname{sen}\theta = \theta$

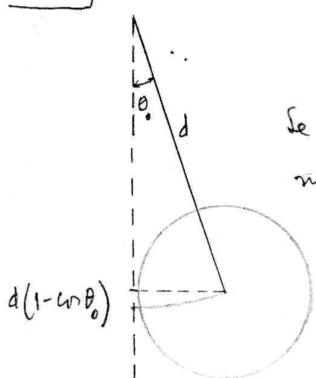
ou $\left(\pi+\frac{2}{3}\right) R\, \ddot{\theta} + \cancel{(\pi+2)}\, g \frac{2}{\cancel{2+\pi}}\, \theta$ ; $\ddot{\theta} + \frac{2\, g}{\left(\pi+\frac{2}{3}\right) R}\theta = 0$ pelo que

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{\left(\pi+\frac{2}{3}\right)R}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi+\frac{2}{3}}{2}}\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi+2}{6}}\sqrt{\frac{R}{g}} = 8{,}67\sqrt{\frac{R}{g}} =$$

$$= 8{,}67\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}8}} = 1{,}38 \text{ segundos.}$$

---

**17.10** — **17.10**




**Caso A**

Se o disco está ligado rigidamente à barra temos:

$$(I_c + Md^2)\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$$

$$I_c\ddot{\theta} + Md^2\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$$

Ora o momento angular do disco é $I_c\dot{\theta} = c^{te}$ donde $I_c\ddot{\theta} = 0$ e

vem: $Md^2\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$ ou $\ddot{\theta} + \frac{g}{d}\theta = 0$

e assim:

a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$ ou $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

b) $\ddot{\theta}(\theta=\theta_0) = -\frac{g}{d}\operatorname{sen}\theta_0$

c) $\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{d}(1-\cos\theta_0)}$

**Caso B**

$(I_c + Md^2)\ddot{\theta} + Mgd\operatorname{sen}\theta = 0$ e se $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

a) $\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_c + Md^2}}$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + Md^2}{Mgd}}$

b) $\ddot{\theta}(\theta=\theta_0) = -\frac{Mgd\operatorname{sen}\theta_0}{I_c + Md^2}$

c) $\frac{1}{2}(I_c + Md^2)\dot{\theta}^2 = Mgd(1-\cos\theta_0)$ ver figura ao lado

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2Mgd(1-\cos\theta_0)}{I_c + Md^2}}$$

17.11 17.11

No instante em que os discos ficam unidos o momento angular conserva-se

A energia cinética logo após a união dos discos deve ser igual à energia potencial

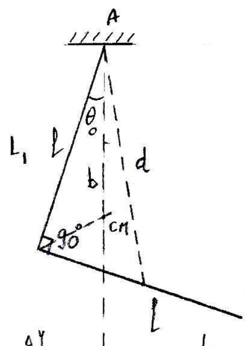
$I_A\omega_0 = I_{total}\,\omega'$ Mas $I_{total} = 2 I_B$ pois há 2 discos iguais. $I_B = I_A + M\cdot R_G^2 = I_A + M\frac{I_A}{M} = 2I_A$

$I_{total} = 2\cdot 2 I_A = 4I_A$. A energia cinética: $\frac{1}{2} I_{total}\,\omega' = \frac{1}{2}\cdot 4 I_A\left(\frac{I_A}{I_{total}}\omega_0\right)^2 = 2I_A\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\omega_0^2 = \frac{1}{8} I_A\omega_0^2$

A energia potencial (a 90°) é: $2MgR_G$ e vem:

$\frac{1}{8} I_A\omega_0^2 = 2Mg\sqrt{\frac{I_A}{M}}$ ou $\omega_0^2 = 16\frac{Mg}{I_A}\sqrt{\frac{I_A}{M}} = 16\cdot g\sqrt{\frac{M}{I}} = 16\cdot g\frac{1}{R_G}$; $\omega_0 = 4\sqrt{\frac{g}{R_G}} = 4\cdot 7 = 28$ rad s$^{-1}$

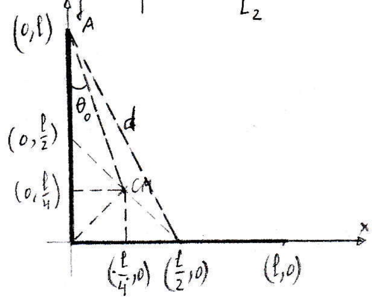
17.12 17.12




a) $\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\frac{\ell}{4}}{\ell-\frac{\ell}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$ $\quad\theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \cong 18{,}4°$

b) $I_{AL_1} = \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{12} + \frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}M\ell^2$

$I_{AL_2} = \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{12} + \frac{M}{2}d^2$ em que $d = \sqrt{\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\ell^2\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\ell^2\frac{5}{4}}$




$I_{AL_2} = \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{12} + \frac{M}{2}\ell^2\frac{5}{4} = \left(\frac{1}{24}+\frac{5}{8}\right)M\ell^2 = \frac{1+15}{24}M\ell^2 = \frac{16}{24}M\ell^2 = \frac{2}{3}M\ell^2$

$I_{A\,total} = \left[\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right]M\ell^2 = \left[\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\right]M\ell^2 = \frac{5}{6}M\ell^2$

Seja b a distância do CM ao centro de rotação A: $b = \sqrt{\left(\frac{\ell}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2\left(\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\right)} = \ell\frac{\sqrt{10}}{4}$

e então: $I_{A\,total}\,\ddot\theta = -Mg\,\text{sen}\,\theta\, b$ e se $\theta$ pequeno $I_{A\,total}\,\ddot\theta + Mg\ell\frac{\sqrt{10}}{4}\theta = 0$

$\ddot\theta + \frac{Mg\ell\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{5}{6}M\ell^2}\theta = 0$ ; $\ddot\theta + \frac{\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{5}{6}}\frac{g}{\ell}\theta = 0$ ; $\ddot\theta + \frac{6\sqrt{10}}{20}\frac{g}{\ell}\theta = 0$; $\ddot\theta + \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{g}{\ell}\theta = 0$

Integrando vem: $\theta(t) = A\cos(\omega t+\phi)$ $\quad\dot\theta = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\phi)$ $\quad$ e $\omega = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$t=0$ $\theta(t=0) = 0 = A\cos\phi$ e se $A\neq 0$ vem $\phi = \frac{\pi}{2}$

$t=0$ $\dot\theta(t=0) = -A\omega\,\text{sen}\,\phi$ em que falta conhecer $\dot\theta(t=0)$.

Em $t=0$ $\quad I\ddot\theta(0) = -\ell F$ ou $I\dot\theta(0) = -\ell\int F\,dt$ $\quad I\dot\theta(0) = -\ell J$ e $\dot\theta(0) = -\frac{\ell J}{I}$ e então:

$-\frac{\ell J}{I} = -A\omega\,\text{sen}\,\phi$ e se $\phi = \frac{\pi}{2}$ $\quad A = \frac{\ell J}{I\omega} = \frac{\ell J}{\frac{5}{6}M\ell^2\sqrt[4]{\frac{9}{10}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = \frac{J}{M\ell}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt[4]{\frac{10}{9}\cdot\frac{6^4}{5^4}}$

pelo que $A = \frac{J}{M\sqrt{\ell g}}\sqrt[4]{\frac{288}{125}}$

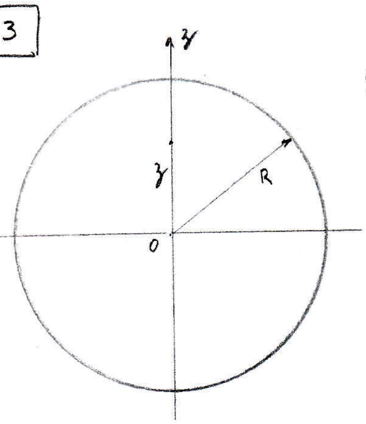
**17.12** Contin. Contin. **17.12**

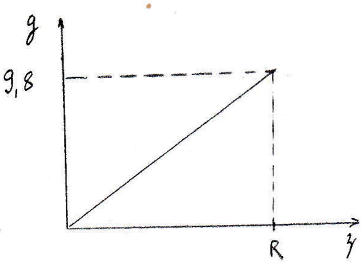
e vem $\theta(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A\,\text{sen}\,\omega t$. A esta solução há que somar $\theta_0$

para se obter por fim $\theta(t) = \theta_0 - \sqrt[4]{\frac{288}{125}}\,\frac{J}{m\sqrt{\ell g}}\,\text{sen}\,\sqrt[4]{\frac{9}{10}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t$

---

**17.13** **17.13**




$$\ddot{z} = -\frac{9,8}{R}z$$

$$\ddot{z} + \frac{9,8}{R}z = 0$$

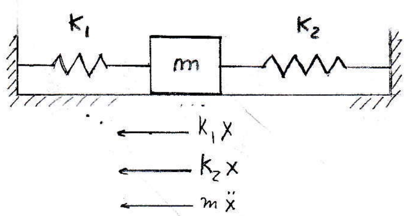
$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{R}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{9,8}}$$

O movimento é sinusoidal de período T. O tempo necessário para atravessar a Terra será metade de T, ou seja:

$$T_{\text{atravessamento}} = \pi\sqrt{\frac{R}{9,8}} = \pi\sqrt{\frac{6,5\cdot 10^6}{9,8}} = 0,71h = 42,6\text{ min}$$

---

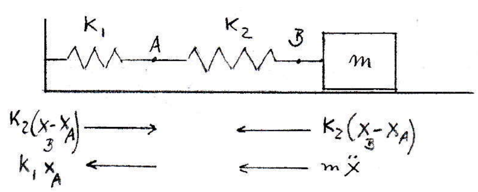
**17.14** **17.14**




$$m\ddot{x} + k_1x + k_2x = 0\ ; \quad \ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

$\Sigma F$ em A: $\quad k_2(x_B - x_A) - k_1x_A = 0 \qquad x_A = \frac{k_2}{k_1+k_2}x_B$



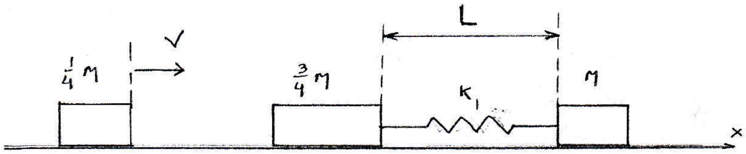

$\Sigma F$ em B $\quad m\ddot{x}_B + k_2x_B - k_2\frac{k_2}{k_1+k_2}x_B = 0$

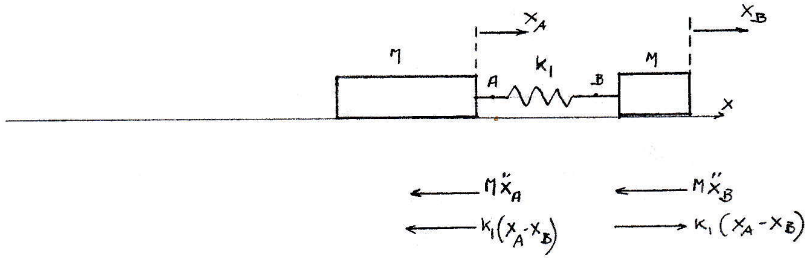
$$m\ddot{x}_B + k_2\left(1 - \frac{k_2}{k_1+k_2}\right)x_B = 0\ ; \quad m\ddot{x}_B + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x_B = 0$$

$$\ddot{x}_B + \frac{1}{m}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x_B = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

**17.15**




A conservação do momento linear garante que: $\frac{1}{4}MV = MV_i$ ; $V_i = \frac{1}{4}V$

$\sum F$ no ponto A: $M\ddot{x}_A = -k_1(x_A - x_B)$

$\sum F$ no ponto B: $M\ddot{x}_B = k_1(x_A - x_B)$

Subtraindo: $M(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) = -k_1(x_A - x_B) - k_1(x_A - x_B)$

$M(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) = -2k_1(x_A - x_B)$ ; $\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + \frac{2k_1}{M}(x_A - x_B) = 0$

Seja $x_A - x_B = \ell$. Então $\ddot{\ell} + \frac{2k_1}{M}\ell = 0$. Assim $\omega = \sqrt{\frac{2k_1}{M}}$ e $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2k_1}}$

Para calcular a amplitude da vibração da mola vamos integrar a equação.

$\ell = A\cos(\omega t + \phi)$ $\quad \dot{\ell} = -A\omega \,\text{sen}(\omega t + \phi)$

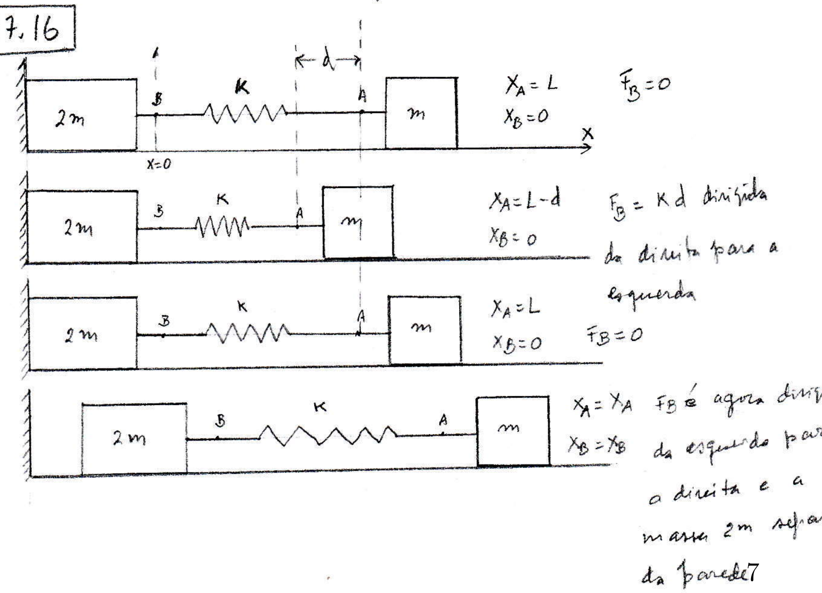
$t = 0$ $\ell = L$ $\quad L = A\cos\phi$ e fazendo $\phi = \frac{\pi}{2}$ vem:

$t = 0$ $\dot{\ell} = V_i = \frac{V}{4} = -A\omega\,\text{sen}\,\phi = -A\omega$ ou $A = -\frac{V}{4}\frac{1}{\omega} = -\frac{V}{4}\sqrt{\frac{M}{2k}}$

a amplitude vem $\frac{V}{4}\sqrt{\frac{M}{2k}}$

---

**17.16**




a) A partir do instante em que a força $F_B$ se anular para depois se dirigir da esquerda para a direita, é que a massa 2m se separa da parede. Isto acontece quando a massa m se deslocar da distância d

17.16 Contin.

Contin. 17.16

b) CM: $2m x_B + m x_A = (2m+m) X_{CM}$ ; $X_{CM} = \frac{2}{3} x_B + \frac{1}{3} x_A$

$\dot{X}_{CM} = \frac{2}{3}\dot{x}_B + \frac{1}{3}\dot{x}_A$

Na situação 3 $\dot{x}_B = 0$ e vamos calcular $\dot{x}_A$.

Energia potencial armazenada na mola na situação 2 : $\frac{1}{2} k d^2$

Energia cinética da massa m na situação 3 : $\frac{1}{2} m v_i^2$

Igualando e simplificando dá $v_i = d\sqrt{\frac{k}{m}}$

Então $\dot{X}_{CM} = v_{CM} = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3} d\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{d}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$ e esta velocidade do CM vai manter-se inalterada.

Qual a amplitude das oscilações da mola?

$\sum F = 0$. No ponto B temos: $2m\ddot{x}_B - k(x_A - x_B - L) = 0$ ; $\ddot{x}_B - \frac{k}{2m}(x_A - x_B) = -\frac{kL}{2m}$

No ponto A temos: $m\ddot{x}_A - (-k(x_A - x_B - L)) = 0$; $\ddot{x}_A + \frac{k}{m}(x_A - x_B) = \frac{kL}{m}$

Subtraindo vem: $\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + \left(\frac{k}{m} + \frac{k}{2m}\right)(x_A - x_B) = \frac{kL}{m} + \frac{kL}{2m}$ ; $\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + \frac{3k}{2m}(x_A - x_B) = \frac{3kL}{2m}$

Ora $\ell = x_A - x_B$ pelo que $\ddot{\ell} + \frac{3k}{2m}\ell = \frac{3kL}{2m}$

Mas: $\ell$ pode ser escrito: $\ell = L + \Delta\ell$ e substituindo vem: $\ddot{\Delta\ell} + \frac{3k}{2m}\Delta\ell + \frac{3k}{2m}L = \frac{3kL}{2m}$ ou

$\ddot{\Delta\ell} + \frac{3k}{2m}\Delta\ell = 0$ em que $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$ e integrando vem:

$\Delta\ell = A \operatorname{sen}\omega t$ e $\dot{\Delta\ell} = A\omega\cos\omega t$ e tomando como origem dos tempos a situação 3 vem:

em $t=0$ $\Delta\ell = 0$ e $\dot{\Delta\ell} = v_i = A\omega = d\sqrt{\frac{k}{m}}$ $A = \frac{1}{\omega} d\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{k}{m}}\, d = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d$

Assim a amplitude do movimento da mola é $A = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d$

17.17 17.17

A conservação do momento linear: $m_1 v_1 = -m_2 v_2$ ou $v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$

A " da energia cinética: $\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

Substituindo $v_1$ vem: $k x^2 = m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 + m_2 v_2^2 = \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) v_2^2 = \frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1} v_2^2$ ou:

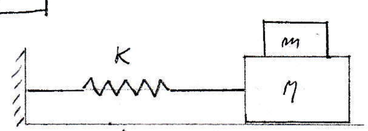
$$v_2^2 = x^2 k \frac{m_1}{m_2(m_1+m_2)} \quad \text{ou} \quad v_2 = x\sqrt{\frac{k}{m_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad \text{e} \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 = -x\sqrt{\frac{k}{m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}}$$

Estas são as velocidades de $m_1$ e de $m_2$ quando toda a energia potencial da mola se anula, o que acontece quando a mola tem um comprimento igual ao valor que tem em repouso, isto é, nem comprimida nem distendida. Como, quer $m_1$ quer $m_2$ vinham animadas da velocidade $v_0$ então temos de somar este valor e obtemos por fim:

$$v_1 = v_0 - x\sqrt{\frac{k}{m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}} \quad \text{e} \quad v_2 = v_0 + x\sqrt{\frac{k}{m_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}}$$

// //

17.18 17.18




$$(M+m)\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + \frac{k}{M+m} x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M+m}$$

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \; ; \; \dot{x} = A\omega \cos \omega t \; ; \; \ddot{x} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$|\ddot{x}_{MAX}| = A\omega^2 << \mu g \quad \text{ou} \quad A = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g (M+m)}{k}$$

Assim a amplitude $A$ não pode ser superior a $x_{MAX} = \frac{\mu g (M+m)}{k}$

// //

17.19 17.19

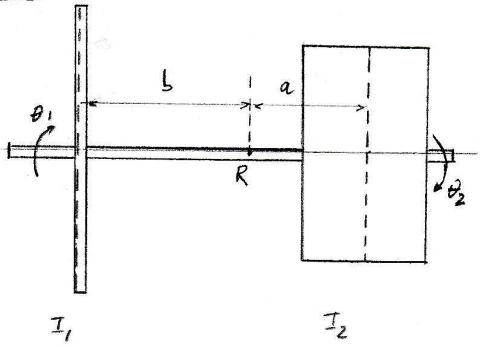
a) $E_{K_{max}} = 10^6$ ergs $= 10^6 \cdot 10^{-7}$ Joule $= 0{,}1$ J

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1$ s $\quad \frac{m}{k} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$; $k = m(2\pi)^2 = 0{,}2(2\pi)^2 = 7{,}89$ N m$^{-1}$

c) $E_{K_{MAX}} = \frac{1}{2} k x_{MAX}^2 \quad x^2 = \frac{2 \cdot 0{,}1}{7{,}89}$ donde $x = 0{,}159$ m $= 15{,}9$ cm

Em unidades cgs vem: $1\,N = 1\,kg \times 1\,m\,s^{-2} = 10^3 \cdot 10^2\,g\,cm\,s^{-2} = 10^5\,g\,cm\,s^{-2}$

Então: $7{,}89\,N\,m^{-1} = 7{,}89\;10^5\,g\,cm\,s^{-2} \cdot 10^{-2}\,cm^{-1} = 7{,}89 \cdot 10^3\,g\,s^{-2}$




Nota 1: Como os discos 1 e 2 giram em sentidos contrários, existe uma secção do eixo que está em repouso e que se designou por R

O ângulo total de rotação do disco 1 em relação ao disco 2, $\theta$, pode ser decomposto na rotação $\theta_1$, do disco 1 em relação à secção R, e na rotação $\theta_2$ do disco 2 em relação à secção R, tal que $\theta = \theta_1 + \theta_2$

Nota 2: o momento angular total do sistema pode ser escrito: $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0$

Nota 3: $\tau_1 = k_1\theta_1 \qquad \theta_1 = \frac{\tau_1}{k_1}$

$\tau_2 = k_2\theta_2 \qquad \theta_2 = \frac{\tau_2}{k_2}$

$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\tau_1}{k_1} + \frac{\tau_2}{k_2} = \frac{\tau}{k}$ e como $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ vem $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

a) Para cada um dos discos podemos escrever:

$$I_1\ddot{\theta}_1 + k_1\theta_1 = 0 \qquad \ddot{\theta}_1 + \frac{k_1}{I_1}\theta_1 = 0 \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + k_2\theta_2 = 0 \qquad \ddot{\theta}_2 + \frac{k_2}{I_2}\theta_2 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{I_2}}$$

e como os discos têm vibrações contrárias mas com a mesma frequência vem:

$\omega_1 = \omega_2$ ou $\sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{I_2}} \qquad \frac{k_1}{I_1} = \frac{k_2}{I_2} \qquad \frac{k_1}{k_2} = \frac{I_1}{I_2}$ ou $k_2 = \frac{I_2}{I_1}k_1$ e

substituindo em $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ vem $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{\frac{I_2}{I_1}k_1}$ ; $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{I_1}{I_2}\frac{1}{k_1}$ ; $\frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right) = \frac{1}{k}$

$k_1 = k\left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right) = k\frac{I_1 + I_2}{I_2}$ e $k_2 = k\frac{I_1 + I_2}{I_1}$

e por fim vem: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{1}{I_1}k\frac{I_1 + I_2}{I_2}} = \sqrt{k\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)}$

A frequência de torsão da árvore é pois: $\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)}$

Cálculo da localização da secção R:

$k_1 = k\frac{l}{b}$ e $k_2 = k\frac{l}{a}$ em que $l = a + b$

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{a}{b}$ ; $\frac{I_1}{I_2} = \frac{l - b}{b}$; $bI_1 = I_2 l - I_2 b$; $b(I_1 + I_2) = I_2 l \qquad b = \frac{I_2}{I_1 + I_2}\cdot l$

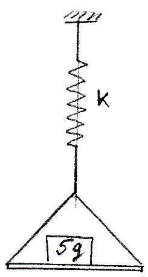
b) $\theta_1 = A\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \dot{\theta}_1 = A_1\omega_1\cos\omega t$ em $t = 0$ $\dot{\theta}_{10} = A_1\omega_1 \qquad A_1 = \frac{\dot{\theta}_{10}}{\omega_1}$

e $A_2 = \frac{\dot{\theta}_{20}}{\omega_2}$ pelo que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}}\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k_2}{I_1}\frac{I_2}{k_1}} \qquad \frac{\frac{\tau_{10}}{k_1}}{\frac{\tau_{20}}{k_2}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}\frac{I_2}{I_1}}\,\frac{k_2}{k_1} = \frac{I_2}{I_1}$

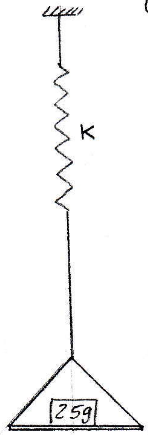
pois $\tau_{10} = \tau_{20}$

 17.30

Caso A: $\frac{\pi}{3} = 2\pi\sqrt{\frac{20+5}{K}}$ o que dá $K = 25.36\ N\ m^{-1}$




Caso A




Caso B

Caso B: No instante em que se liberta o suporte a aceleração é máxima; anula-se para a posição de repouso da mola; volta a passar por um máximo, que é oposto à aceleração da gravidade, na elongação máxima da mola. Se esta aceleração fôr superior a g o corpo de 25 g salta fora do suporte.

Ora $z = A\cos\omega t$ $\quad \dot{z} = -A\omega\sin\omega t$; $\ddot{z} = -A\omega^2\cos\omega t$ e então $\ddot{z}_{max} = A\omega^2$

$$A\omega^2 < 9{,}8 \qquad A\frac{K}{20+25} < 9{,}8\ ; \quad A < 9{,}8\,\frac{20+25}{25\cdot 36} = 9{,}8\,\frac{45}{25\cdot 36} = 9{,}8\,\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{5}}{\underset{5}{\cancel{25}}\cdot\underset{4}{\cancel{36}}} = \frac{9{,}8}{20} = \underline{\underline{49\,\text{cm}}}$$

17.29

17.29

Velocidade de m antes do impacto: $mgA = \frac{1}{2} m v_a^2 \quad v_a = \sqrt{2gA}$

Conservação do momento linear: $m v_a = 2m v_d \quad v_d = \frac{1}{2} v_a$ em que $v_d$ é

a velocidade do grupo 2m imediatamente após o impacto

Ponto de equilíbrio antes do impacto: $A = \frac{mg}{k}$ o que dá $\frac{k}{m} = \frac{g}{A}$

Novo ponto de equilíbrio após o impacto: $\frac{2mg}{k} = 2A$

Equação do movimento $2m\ddot{z} + kz = 0$ donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \sqrt{\frac{g}{2A}}$ e

o período vem: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2A}{g}}$

Cálculo da amplitude do movimento: $z = a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t$ em que

a e b são constantes a determinar a partir das condições iniciais

em $t=0$ seja $z = A$ e então $a = A$

em $t=0$ $\dot{z} = -v_d$ e então $\dot{z} = -a\omega\operatorname{sen}\omega t + b\omega\cos\omega t$ o que dá $b\omega = -v_d$

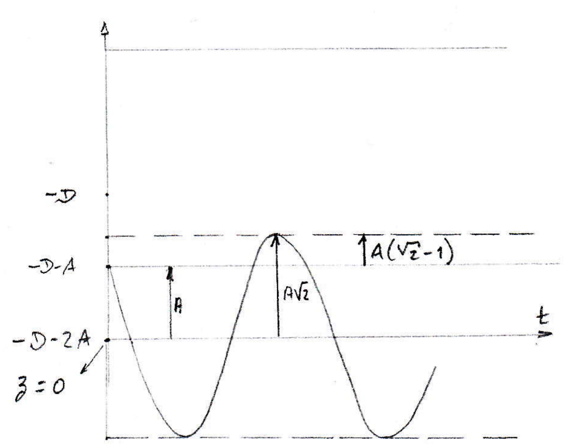
ou seja $b = -\frac{v_d}{\omega} = -\frac{v_a}{2\omega} = -\frac{\sqrt{2gA}}{2\sqrt{\frac{g}{2A}}} = -A$ e vem

$z = A\cos\omega t - A\operatorname{sen}\omega t = A\left(\cos\omega t - \frac{\operatorname{sen}45^\circ}{\cos 45^\circ}\operatorname{sen}\omega t\right) = \frac{A}{\cos 45}\left(\cos 45^\circ\cos\omega t - \operatorname{sen}45\operatorname{sen}\omega t\right) =$

$= A\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)$ e a amplitude do movimento é $A\sqrt{2}$

A máxima altura acima da posição de equilíbrio antes do impacto será:

$A\sqrt{2} - A = A(\sqrt{2} - 1)$



$\boxed{17.27}$ $\boxed{17.27}$

$\theta = \theta_M \operatorname{sen} \omega t$ ; $\dot{\theta} = \theta_M \omega \cos \omega t$ pelo que $\dot{\theta}_{MAX} = \theta_M \omega$

$I\ddot{\theta} + K\theta = 0$ e então $\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$ e após a adesão do dardo o momento de inércia $I$ passa a ser $I' = I + ma^2$ e o novo $\omega$ vem $\omega' = \sqrt{\frac{K}{I'}}$

Por outro lado o momento angular mantem-se e vem:

$$I\dot{\theta}_M = I'\dot{\theta}'_M \; ; \; I\theta_M \omega = I'\theta'_M \omega' \; ; \; \theta'_M = \frac{I}{I'}\frac{\omega}{\omega'}\theta_M = \frac{I}{I'}\sqrt{\frac{\frac{K}{I}}{\frac{K}{I'}}}\,\theta_M = \sqrt{\frac{I}{I'}}\,\theta_M$$

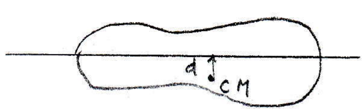
isto é, a nova amplitude do movimento é dada por:

$$\theta'_M = \theta_M \sqrt{\frac{I}{I + ma^2}}$$

---

$\boxed{17.28}$ $\boxed{17.28}$

a) $Mgd\theta = -I\ddot{\theta}$ $\quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0$




b) $\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$ ; $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$

c) $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I_c + Md^2}{Mgd}$ ; $Md^2 + I_c = \frac{MgT^2}{4\pi^2}d$ ; $d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \frac{I_c}{M} = 0$

c.1) $d_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gT^2}{4\pi^2}\right)^2 - 4\frac{I_c}{M}}\right)$

c.2) $d_1 = \frac{1}{2}\frac{gT^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\quad \dots \quad})$

$d_2 = \frac{1}{2}\frac{gT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\quad \dots \quad})$ que somando dá: $d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}$ ou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$$

c.3) $\frac{T^2}{4\pi^2} = \gamma = \frac{I_c + Md^2}{Mgd}$ Qual o valor de $d$ que minimiza este valor, ou seja, qual o valor de $d$ que anula a derivada?

$$\frac{d\gamma}{dd} = \frac{d}{dd}\left((Mgd)^{-1}(I_c + Md^2)\right) = -\frac{Mg}{(Mgd)^2}(I_c + Md^2) + \frac{1}{Mgd}2Md = 0$$

$-\frac{I_c + Md^2}{Mgd^2} + \frac{2}{g} = 0$ ; $-\frac{I_c}{Mgd^2} - \frac{1}{g} + \frac{2}{g} = 0$ ; $\frac{I_c}{Mgd^2} = \frac{1}{g}$ ; $\frac{I_c}{M} = d^2$ pelo que

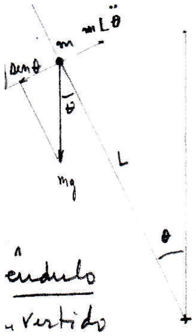
$d = \sqrt{\frac{I_c}{M}}$ = raio de giração conduz a um extremo do período e

que vale $T = 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{I_c}{M}\right)^{\frac{1}{4}}$

**17.26** **17.26**

$\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$mg\theta = mL\ddot{\theta}\ ;\ \ddot{\theta} - \frac{g}{L}\theta = 0$




Pêndulo invertido

Seja $e^{\alpha t}$ um integral da equação $\theta = e^{\alpha t}$; $\dot{\theta} = \alpha e^{\alpha t}$; $\ddot{\theta} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ e substituindo vem:

$\alpha^2 - \frac{g}{L} = 0$; $\alpha = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$ ou seja, quer $e^{\sqrt{g/L}\,t}$ quer $e^{-\sqrt{g/L}\,t}$ são soluções.

A solução geral é pois a combinação linear destas soluções:

$$\theta = A e^{\sqrt{g/L}\,t} + B e^{-\sqrt{g/L}\,t}$$

Condições iniciais: $t=0\quad \theta = 0 \Rightarrow A + B = 0$ ou $B = -A$

$t = 0\quad \dot{\theta} = \frac{v_i}{L} = A\sqrt{g/L} - B\sqrt{g/L}\ ;\ A - B = \frac{v_i}{L}\sqrt{\frac{L}{g}} = A - (-A) = 2A$ donde

$A = \frac{v_i}{2L}\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{v_i}{2\sqrt{Lg}}$ pelo que $\theta = \frac{v_i}{2\sqrt{Lg}}\left(e^{\sqrt{g/L}\,t} - e^{-\sqrt{g/L}\,t}\right)$

Para percorrer uma distância $d = 0{,}1\,m$ o angulo descrito será $\theta = \frac{d}{L}$ e

isso verifica-se ao fim de um tempo $t = T$. Vem então

$\frac{d}{L} = \frac{v_i}{2\sqrt{Lg}}\left(e^{\sqrt{g/L}\,T} - e^{-\sqrt{g/L}\,T}\right)$ ou $\frac{2\sqrt{Lg}\,d}{L\,v_i} = e^{\omega T} - e^{-\omega T}$ em que $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$\frac{2d}{v_i}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L}} = \gamma - \gamma^{-1}$ em que $\gamma = e^{\omega T}$

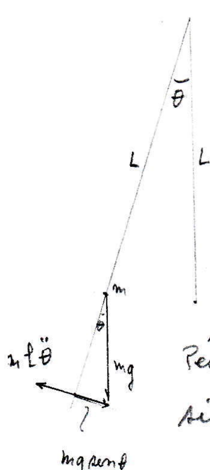
Mas é dito que $T = 2\pi = \frac{2\pi}{\omega}$ donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 1$ pelo que $\gamma - \gamma^{-1} = \frac{2d}{v_i} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{10^{-3}} = 200$

e então $\gamma^2 - 200\gamma - 1 = 0$ cujas raízes são $\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(200 \pm \sqrt{200^2 + 4}\right)$ e,

desprezando o valor 4 face a $200^2$ dá $\gamma_1 = 100 + 100 = 200$ e $\gamma_2 = 0$

Tomando o valor de $\gamma_1$ vem $e^{\omega T} = 200$ donde $T = \frac{1}{\omega}\ln 200 = \underline{5{,}3\,s}$

o outro valor de $\gamma$ é nulo e daria $T = \frac{1}{\omega}\ln 0 = -\infty$




Pêndulo simples

$mg\theta = -mL\ddot{\theta}\ ;\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ em que $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Notar que no pêndulo simples $\theta$ e $\ddot{\theta}$ tem sinais contrários sempre

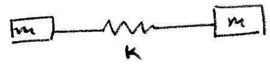
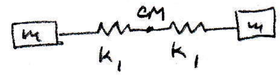
$\theta = A\cos\omega t\ ;\ \dot{\theta} = -A\omega\operatorname{sen}\omega t\ ;\ \ddot{\theta} = -A\omega^2\cos\omega t$

ao passo que no pêndulo invertido $\theta$ e $\ddot{\theta}$ tem o mesmo sinal.

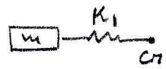
**17.24** **17.24**

Para a massa M podemos escrever: $MR\ddot{\theta}+Mg\theta=0$ donde $\omega=\sqrt{\frac{MgR}{MR^2}}=\sqrt{\frac{g}{R}}$

ou $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ e então $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$

Quanto às massas m:  que é equivalente a 

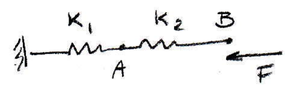
em que $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{k}$ donde $\frac{2}{k_1}=\frac{1}{k}$ e $k_1=2k$. O CM não se desloca e então

o sistema  executa um movimento $m\ddot{x}+k_1x=0$ donde

$\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ pelo que $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ e $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Ora em virtude do sincronismo do movimento estes tempos $\frac{T}{4}$ devem

ser iguais e vem: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$ ou $\frac{R}{g}=\frac{m}{2k}$ ou $m=\frac{2kR}{g}$

Nota: molas em série: 

$F=k_1x_A \qquad k_1=\frac{F}{x_A}$

$F=k_2(x_B-x_A)=k_2\left(x_B-\frac{F}{k_1}\right)$

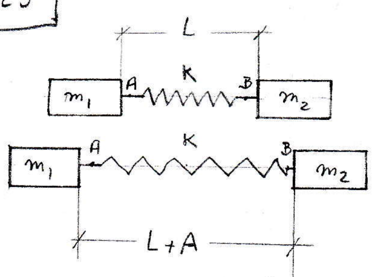
$F\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)=k_2x_B\ ;\ F=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x_B$

pelo que as duas molas $k_1$ e $k_2$ são equivalentes a uma única mola

de valor $k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ ou $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$.

---

**17.25** **17.25**



$m_1\ddot{x}_A+k(x_A-x_B)=0 \qquad \ddot{x}_A+\frac{k}{m_1}(x_A-x_B)=0$

$m_2\ddot{x}_B+k(x_B-x_A)=0 \qquad \ddot{x}_B-\frac{k}{m_2}(x_A-x_B)=0$ e, subtraindo, vem:

$\ddot{x}_B-\ddot{x}_A-\frac{k}{m_2}(x_A-x_B)-\frac{k}{m_1}(x_A-x_B)=0$ ou $\ddot{x}_B-\ddot{x}_A+k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(x_B-x_A)=0$

a) o período de oscilação é: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ com $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

b) O período de um oscilador simples é dado por $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

c) os períodos nos dois casos serão iguais se m no oscilador simples fôr

igual à massa reduzida $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ do primeiro caso.

17.22 17.22

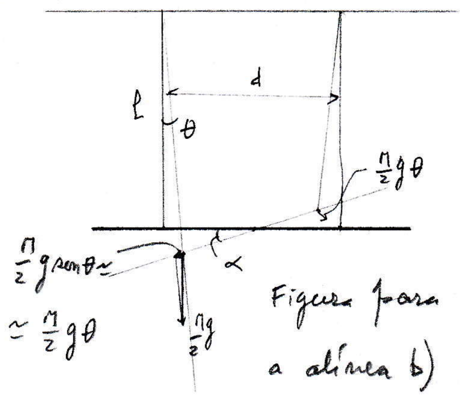



Figura para a alínea b)

a) $M\ell^2\ddot\theta + Mg\theta\ell = 0$

$$\omega^2 = \frac{Mg\ell}{M\ell^2} = \frac{g}{\ell} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

b) $\alpha \cdot \frac{d}{2} \cong \theta \cdot \ell \qquad \theta = \alpha\frac{d}{2\ell}$

$$I\ddot\alpha + 2\cdot\frac{M}{2} g \frac{d}{2}\theta = 0 \qquad I = \frac{1}{12} M L^2$$

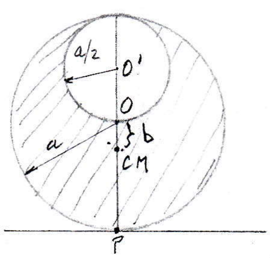
$$\frac{1}{12} M L^2 \ddot\alpha + 2\frac{M}{2} g \frac{d}{2}\frac{d}{2\ell}\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2\frac{M}{2} g \frac{d^2}{4\ell}}{\frac{1}{12} M L^2} = \frac{\frac{Mgd^2}{4\ell}}{\frac{1}{12} M L^2} = \frac{12 g d^2}{4L^2\ell} = 3\frac{d^2}{L^2}\frac{g}{\ell} \qquad \omega = \sqrt{3}\frac{d}{L}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$T = 2\pi \frac{L}{\sqrt{3}\, d}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

---

17.23 17.23




No problema 14.10 viu-se que a distância do centro de massa ao eixo ⊥ ao plano e que passa em O era dado por:

$$b = \frac{(a/2)^3}{a^2 - (a/2)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} a = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} a = \frac{4}{3\cdot 8} a = \frac{1}{6} a$$

Quando o cilindro se desloca do ponto de equilíbrio sofre um torque que é igual a: $\tau = Mg \,\text{sen}\,\theta \frac{1}{6} a \simeq Mg\frac{1}{6} a\theta$

e $I_P\ddot\theta + Mg\frac{1}{6} a\theta = 0$ em que temos de calcular $I_P$:

$$I_P = I_{O\,\text{sólido}} + \pi a^2\rho a^2 - I_{O'\,\text{oca}} - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\rho\left(a + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi a^2\rho a^2 + \pi a^2\rho a^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\rho\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi a^2\rho\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2 =$$

$$= \pi\rho a^4\left[\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{32} - \frac{9}{16}\right] = \pi\rho a^4 \frac{16 + 32 - 1 - 18}{32} = \pi\rho a^4\frac{29}{32}$$

Cálculo da massa no CM: $\rho\left[\pi a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \pi\rho a^2\left[1 - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{4}\pi\rho a^2$

Então: $\frac{29}{32}\pi\rho a^4\ddot\theta + \frac{3}{4}\pi\rho a^2\frac{1}{6} a g\theta = 0$

$$\omega^2 = \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{6}\pi\rho a^3 g}{\frac{29}{32}\pi\rho a^4} = \frac{\frac{1}{8} g}{\frac{29}{32} a} = \frac{32}{8\cdot 29}\frac{g}{a} \quad \text{ou } \omega = 2\sqrt{g/29a} \quad \text{pelo que o}$$

período é dado por $T = 2\pi\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29a}{g}} = \pi\sqrt{29a/g}$