19.1 | 19.1

19.2 | 19.2

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{10\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-12}}} = \frac{10^7}{2\pi} \text{ Hertz}$$

19.3 | 19.3

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2} = \sqrt{377^2 + (2\pi\cdot 60\cdot 1)^2} = \sqrt{377^2 + 377^2} = 377\sqrt{2} \text{ Ohm}$$

19.4 | 19.4

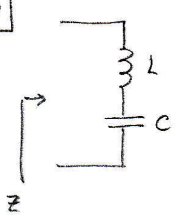
$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2} = \frac{V}{I} \; ; \; \sqrt{\left(\frac{10}{0{,}3}\right)^2 - 20^2} = 2\pi\cdot 60\cdot L \; ; \; L = \frac{1}{2\pi\cdot 60}\sqrt{\left(\frac{10}{0{,}3}\right)^2 - 20^2} =$$

$$L = 0{,}0707 \cong 71 \text{ mH}$$

19.5

$$2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; ; \; C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{(2\pi\cdot 10^4)^2\cdot 7{,}6\cdot 10^{-2}} = 3{,}33 \text{ nF} = 3{,}33\cdot 10^{-3} \mu\text{F}$$

19.6 | 19.6

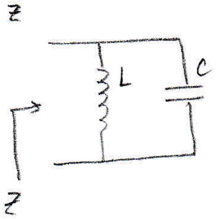


$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

$\omega \to 0 \quad Z \to \infty$

$\omega \to \infty \quad Z \to \infty$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z = 0$



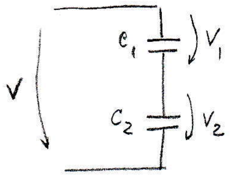
$$Z = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$\omega \to 0 \quad Z \to 0$

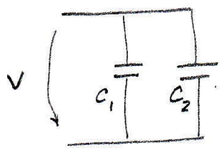
$\omega \to \infty \quad Z \to 0$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z = \infty$

19.7 | 19.7



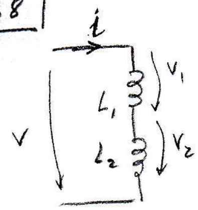
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \; ; \; C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



$$Q_1 = C_1 V \qquad Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V \equiv C_{eq} V \quad \text{con} \quad C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$Q_2 = C_2 V$$

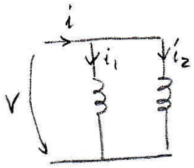
19.8 | 19.8



$$V = V_1 + V_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad \text{con} \quad L_{eq} = L_1 + L_2$$

$$V_1 = L_1 \frac{di}{dt}$$

$$V_2 = L_2 \frac{di}{dt}$$

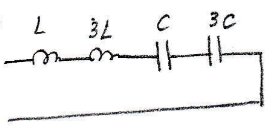


$$V = L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad \frac{di_1}{dt} = \frac{V}{L_1} \qquad \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = V\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) ; \; \frac{di}{dt} = V \cdot \frac{1}{L_{eq}} \quad \text{con}$$

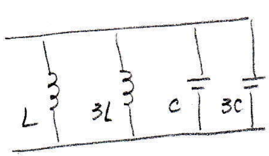
$$V = L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad \frac{di_2}{dt} = \frac{V}{L_2} \qquad \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \; ; \; L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

$$i = i_1 + i_2$$

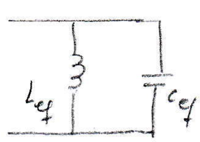
19.9 | 19.9



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{(L + 3L) \dfrac{C \cdot 3C}{C + 3C}}} = \frac{1}{\sqrt{4L \cdot \dfrac{3C}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$$



$\equiv$



$$L_{eq} = \frac{L \cdot 3L}{L + 3L} = \frac{3}{4} L \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} L \cdot 4C}} = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

$$C_{eq} = C + 3C = 4C$$

19.10 | 19.10

RC série $\quad Z = RC \qquad \dfrac{V}{\frac{Q}{T}} \cdot \dfrac{Q}{V} = T$

LC série $\quad Z = \sqrt{LC} \qquad \sqrt{\dfrac{V}{\frac{Q}{T^2}} \cdot \dfrac{Q}{V}} = \sqrt{T^2} = T$

RL série $\quad Z = \dfrac{L}{R} \qquad \dfrac{\frac{V}{Q/T^2}}{V/Q/T} = \dfrac{VT^2/Q}{VT/Q} = T$

19.1 19.1

9.2 19.2

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{10\cdot10^{-3}\cdot10^{-12}}}=\frac{10^{7}}{2\pi}\ \text{Hertz}$$

9.3 19.3

$$Z=\sqrt{R^2+(2\pi f L)^2}=\sqrt{377^2+(2\pi\cdot60\cdot1)^2}=\sqrt{377^2+377^2}=377\sqrt{2}\ \text{Ohm}$$

9.4 19.4

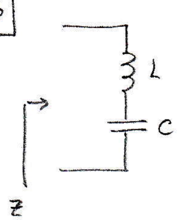
$$Z=\sqrt{R^2+(2\pi f L)^2}=\frac{V}{I}\ ;\ \sqrt{\left(\frac{10}{0,3}\right)^2-20^2}=2\pi\cdot60\cdot L\ ;\ L=\frac{1}{2\pi\cdot60}\sqrt{\left(\frac{10}{0,3}\right)^2-20^2}=$$

$$L=0,0707\cong71\ \text{mH}$$

9.5

$$2\pi f=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ ;\ C=\frac{1}{(2\pi f)^2L}=\frac{1}{(2\pi\cdot10^4)^2\cdot7,6\cdot10^{-2}}=3,33\ \text{nF}=3,33\cdot10^{-3}\ \mu\text{F}$$

9.6 19.6

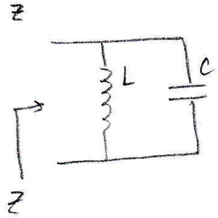


$$Z=j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=j\,\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}$$

$\omega\to0\quad Z\to\infty$

$\omega\to\infty\quad Z\to\infty$

$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad Z=0$



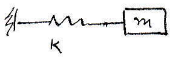
$$Z=\frac{j\omega L\cdot\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega L}{1-\omega^2LC}$$

$\omega\to0\quad Z\to0$

$\omega\to\infty\quad Z\to0$

$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad Z=\infty$

19.12 **19.12**

a) 

$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x}$; $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ou $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = 0$ com $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

b) $x = e^{\alpha t}$ $\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}$; $\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ e, substituindo e simplificando, vem: $\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$

cujas raízes são: $\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right)$ e se $\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$, isto é, $\gamma < 2\omega_0$ vem:

$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2-\gamma^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega$ com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

A solução $x(t) = K_1 e^{+\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$ com K_1 e K_2 complexos conjugados do tipo $K_1 = \frac{A}{2} - j\frac{B}{2}$

Então $K_1 e^{\alpha_1 t}$ e $K_2 e^{\alpha_2 t}$ são complexos conjugados e a sua soma é o dobro da parte real de um deles. Vem $x(t) = 2\,R_e\left[K_1 e^{\alpha_1 t}\right] = 2\,R_e\left[\left(\frac{A}{2} - j\frac{B}{2}\right) e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{j\omega t}\right] =$

$= 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} R_e\left[\left(\frac{A}{2} - j\frac{B}{2}\right)(\cos\omega t + j\operatorname{sen}\omega t)\right] = 2e^{\frac{\gamma}{2}t} R_e\left[\frac{A}{2}\cos\omega t + \frac{B}{2}\operatorname{sen}\omega t + j\left(\frac{A}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{B}{2}\cos\omega t\right)\right] =$

$= 2e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\frac{A}{2}\cos\omega t + \frac{B}{2}\operatorname{sen}\omega t\right] = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t\right]$

c) Se $\gamma > 2\omega_0$ a solução é do tipo: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\right]$

) $x(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$; $\dot{x}(t) = \alpha_1 K_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 K_2 e^{\alpha_2 t}$ em que $\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\omega$ e $\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\omega$

$K_1 = \frac{A}{2} - j\frac{B}{2}$ e $K_2 = \frac{A}{2} + j\frac{B}{2}$

$x(t=0) = x_0 = K_1 + K_2 = \frac{A}{2} - j\frac{B}{2} + \frac{A}{2} + j\frac{B}{2} = A \Rightarrow A = x_0$

$\dot{x}(t=0) = V_0 = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 = 2\,R_e(\alpha_1 K_1) = 2\,R_e\left(-\frac{\gamma}{2} + j\omega\right)\left(\frac{A}{2} - j\frac{B}{2}\right) = -\frac{\gamma}{2}A + \omega B$ ou

$\omega B = V_0 + \frac{\gamma}{2}x_0$; $B = \frac{V_0}{\omega} + \frac{\gamma}{2}\frac{x_0}{\omega} = \frac{2V_0 + \gamma x_0}{2\omega} = \frac{2V_0 + \gamma x_0}{2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{2V_0 + \gamma x_0}{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}$

9.13 | 19.13

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}=0 \quad ; \quad \ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}=0 \quad \text{ou se } \xi=\dot{x} \quad \dot{\xi}+\frac{\gamma}{m}\xi=0$$

Seja $\xi=e^{\alpha t}$ $\dot{\xi}=\alpha e^{\alpha t}$ e substituindo: $\alpha+\frac{\gamma}{m}=0$ donde $\alpha=-\frac{\gamma}{m}$ e

então, em geral $\xi=C_1 e^{\alpha t}$ em que C_1 é tal que para $t=0$ $\dot{\xi}=V_0=C_1$ e

vem $\boxed{\xi=\dot{x}(t)=V_0\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}}$ e, integrando temos a posição:

$$x(t)=-\frac{m}{\gamma}V_0\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}+C_2$$ e C_2 é tal que para $t=0$ $x(0)=x_0$ e

vem $x_0=-\frac{m}{\gamma}V_0+C_2$ donde $C_2=x_0+\frac{m}{\gamma}V_0$ o que dá para $x(t)$:

$$x(t)=-\frac{m}{\gamma}V_0\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}+\frac{m}{\gamma}V_0+x_0$$, que, resolvida em ordem a $e^{-\frac{\gamma}{m}t}$, vem:

$$e^{-\frac{\gamma}{m}t}=-\frac{\gamma}{mV_0}\left(x-x_0-\frac{m}{\gamma}V_0\right)$$ e multiplicado por V_0 dá a velocidade

$$\boxed{\dot{x}(t)=-\frac{\gamma}{m}\left(x-x_0-\frac{m}{\gamma}V_0\right)=V_0-\frac{\gamma}{m}(x-x_0)}$$

19.14 | 19.14

Ver!

Provar que $C=0$!

$$m\ddot{\ell}+m\gamma\dot{\ell}=mg\,\text{sen}\,\theta \quad ; \quad \ddot{\ell}+\gamma\dot{\ell}=g\,\text{sen}\,\theta$$

a) A velocidade terminal V_∞ dá-se quando a aceleração $\ddot{\ell}$ for nula. Então

$$\gamma\dot{\ell}_\infty=g\,\text{sen}\,\theta \quad \text{pelo que} \quad V_\infty=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}$$

b) $\ddot{\ell}+\gamma\dot{\ell}=g\,\text{sen}\,\theta$; $\frac{d}{dt}(\dot{\ell}+\gamma\ell)=g\,\text{sen}\,\theta$; $\dot{\ell}+\gamma\ell=g(\text{sen}\,\theta)\,t+C$: eq. dif. 1ª ordem

Seja $\ell_h=Ae^{-\gamma t}$; $\dot{\ell}_h=-\gamma Ae^{-\gamma t}$ e, de facto, $-\gamma Ae^{-\gamma t}+\gamma Ae^{-\gamma t}=0$

Seja $\ell_f=at+b$; $\dot{\ell}_f=a$ donde $a+a\gamma t+b\gamma=g(\text{sen}\,\theta)\,t+C$, o que implica que

$a\gamma=g\,\text{sen}\,\theta$ ou $a=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}$ e $a+b\gamma=C_1$ ou $b=\frac{C-a}{\gamma}=-\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}+\frac{C}{\gamma}$

Então $\ell=\ell_h+\ell_f=Ae^{-\gamma t}+\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}t-\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}+\frac{C}{\gamma}$

Mas para $t=0$ $\ell=0$ e $\dot{\ell}=0$ e vem:

19.14 Contin. Contin. 19.14

$\ell(t=0)=0=A-\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}+\frac{c}{\gamma}$ donde $A=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}-\frac{c}{\gamma}$ e substituindo em $\ell(t)$ dá:

$$\ell(t)=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}\cdot e^{-\gamma t}+\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}t-\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}\left[t+\frac{1}{\gamma}\left(e^{-\gamma t}-1\right)\right] \quad e$$

$$\dot{\ell}(t)=-\gamma\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma^2}e^{-\gamma t}+\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)=V_\infty\left(1-e^{-\gamma t}\right)$$

19.15 19.15

Velocidade inicial após a entrada na água:

$$\frac{1}{2}mgh=\frac{1}{2}mv_i^2 \qquad v_i=\sqrt{gh}$$

Somatório das forças que actuam no corpo de massa m:

$$m\ddot{z}+\frac{1}{3}\dot{z}+\frac{1}{2}mg=mg\;;\quad \ddot{z}+\frac{1}{3m}\dot{z}=\frac{1}{2}g\;;\text{ e } m=1 \text{ vem:}$$

$$\ddot{z}+\frac{1}{3}\dot{z}=\frac{1}{2}g\;;\quad \frac{d}{dt}\left(\dot{z}+\frac{1}{3}z\right)=\frac{1}{2}g\;;\quad \dot{z}+\frac{1}{3}z=\frac{1}{2}gt+C$$

Solução homogénea: $z_h=Ae^{-\frac{1}{3}t}$

" forçada $z_f=at+b$ tal que $\dot{z}_f=a$ e $a+\frac{1}{3}at+\frac{1}{3}b=\frac{1}{2}gt+C$ donde

$\frac{1}{3}a=\frac{1}{2}g$ ou $a=\frac{3}{2}g$ e $a+\frac{1}{3}b=C$; $b=3C-3a=3C-\frac{9}{2}g$

Solução total: $z=z_h+z_f=Ae^{-\frac{1}{3}t}+\frac{3}{2}gt+3C-\frac{9}{2}g$

Cond. iniciais: $z(0)=0=A+3C-\frac{9}{2}g$;

$\dot{z}=-\frac{1}{3}Ae^{-\frac{1}{3}t}+\frac{3}{2}g$ e $\dot{z}(0)=\sqrt{gh}=-\frac{A}{3}+\frac{3}{2}g \Rightarrow A=\frac{9}{2}g-3\sqrt{gh}$ que;

substituindo em $z(0)=0$ dá $\frac{9}{2}g-3\sqrt{gh}+3C-\frac{9}{2}g=0 \Rightarrow C=\sqrt{gh}$

e então: $z=\left(\frac{9}{2}g-3\sqrt{gh}\right)e^{-\frac{t}{3}}+3\sqrt{gh}-\frac{9}{2}g+\frac{3}{2}gt$

Finalmente $z(t=3)=\left(\frac{9}{2}g-3\sqrt{gh}\right)e^{-1}+3\sqrt{gh}-\frac{9}{2}g+\frac{9}{2}g=\left(\frac{9}{2}g-3\sqrt{gh}\right)e^{-1}+3\sqrt{gh}$

que, com $g=9{,}8$ e $h=20$ m dá $z(t=3)=\underline{\underline{42{,}77\text{ m}}}$

9.16 19.16

Ver www.feynmanlectures.info/solutions/forced_pendulum_sol_1.html

19.17 | 19.17

Sem amortecimento e em torno da posição de equilíbrio: $m\ddot{z}+kz=0$; $\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi$ pois $T_0=\frac{10}{10}=1$. Então $\frac{k}{m}=\omega_0^2$; $k=m\cdot\omega_0^2=5\cdot4\pi^2=20\pi^2$

Com amortecimento e em torno da posição de equilíbrio: $m\ddot{z}+m\gamma\dot{z}+kz=0$ donde:

$\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\frac{k}{m}z=0$ cuja solução é: $z(t)=e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$ e em que

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$ e se desconhece o γ e $\omega_0=2\pi\ s^{-1}$

Mas $T=2\pi\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}$ e em $10\cdot T$ a amplitude cai para metade. Então:

$$e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}10}=\frac{1}{2};\quad e^{\frac{\gamma}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}10}=2;\quad \frac{\pi\cdot10\cdot\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}=\ln2;\quad \frac{\gamma^2\cdot10^2\cdot\pi^2}{(2\pi)^2-\frac{\gamma^2}{4}}=(\ln2)^2$$

$$\gamma^2\cdot10^2\cdot\pi^2=(\ln2)^2\left[(2\pi)^2-\frac{\gamma^2}{4}\right];\quad \gamma^2\left[10^2\cdot\pi^2+\frac{1}{4}(\ln2)^2\right]=(\ln2)^2(2\pi)^2$$

$$\gamma=\frac{(\ln2)\cdot2\pi}{\sqrt{10^2\pi^2+\frac{1}{4}(\ln2)^2}}=0{,}138621 \quad \text{pelo que} \quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\sqrt{(2\pi)^2-\frac{0{,}138621^2}{4}}=6{,}2828$$

$$\text{e } T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{6{,}2828}=1{,}00006\ s$$

e a equação inicial, com valores numéricos, vem: $5\ddot{z}+0{,}6931\dot{z}+20\cdot\pi^2z=0$

c) $e^{-\frac{\gamma}{2}T_1}=\frac{0{,}05}{0{,}2}=\frac{1}{4}$; $\frac{\gamma}{2}T_1=\ln4$; $T_1=\frac{2\cdot\ln4}{\gamma}=\frac{2\ln4}{0{,}138621}=20{,}00$

nº ciclos para a amplitude cair de 0,2 m para 0,05 m é $N_1=\frac{T_1}{T}=\frac{20{,}00121}{1{,}00006}=$ 20,0000 ciclos

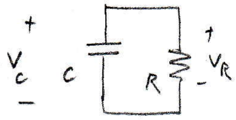
$e^{-\frac{\gamma}{2}T_2}=\frac{0{,}02}{0{,}2}=\frac{1}{10}$ $\quad T_2=\frac{2\ln10}{0{,}138621}=33{,}221$

nº ciclos para a amplitude cair de 0,2 m para 0,02 m é $N_2=\frac{T_2}{T}=33{,}219$ ciclos

d)

19.18

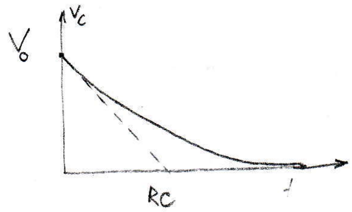
19.18



$i_c = C\frac{dV_c}{dt}$; $V_R = V_c = -Ri_c = -RC\frac{dV_c}{dt}$; $RC\frac{dV_c}{dt}+V_c=0$; $\frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{RC}V_c=0$

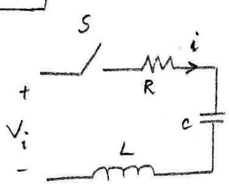
Integrando: $V_c = A e^{-\frac{t}{RC}}$ e $V_c(t=0)=V_0=A$ pelo que

$$V_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



19.19

19.19



$V_i = Ri + L\frac{di}{dt} + V_c$ e $i = C\frac{dV_c}{dt}$ vem: $LC\frac{d^2V_c}{dt} + RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = V_i$

$\frac{d^2V_c}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}V_i$ e há três casos:

Caso 1: $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} < 0$ subamortecido

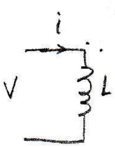
caso 2: $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} = 0$ amortecido criticamente

caso 3: $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} > 0$ sobreamortecido

19.20

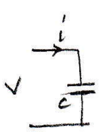
19.20

a)



$V = L\frac{di}{dt}$ $V = V_0\cos\omega t$; $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}V_0\cos\omega t$; $i(t) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t + C$ e em

$t=0$ $i(t=0) = 0 = C$ pelo que $i(t) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$



$i = C\frac{dV_c}{dt}$; $i = C\frac{d\,V_0\cos\omega t}{dt}$; $i(t) = -C V_0\omega\sin\omega t$

b) $v = V_0\cos\omega t = \mathbb{R}_e\{V_0 e^{i\omega t}\}$ $i(t) = \mathbb{R}_e\{I_0 e^{i\omega t}\}$ e, em vez de trabalharmos com as funções $v(t)$ e $i(t)$ vamos trabalhar com as funções complexas

$V = V_0 e^{i\omega t}$ e $I = V_0 e^{i\omega t}$.

Então $L\frac{dI}{dt} = V$; $L\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{i\omega t}\right) = V_0 e^{i\omega t}$; $L I_0 i\omega e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$ ou

ainda $\frac{V_0}{I_0} = i\omega L = Z_L$ ou $I_0 = \frac{V_0}{i\omega L}$ donde $i(t) = \mathbb{R}_e\left\{\frac{V_0}{i\omega L}e^{i\omega t}\right\} =$

$= \mathbb{R}_e\left\{\frac{V_0}{\omega L}\frac{1}{i}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right\} = \mathbb{R}_e\left\{\frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t - i\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t\right\} = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$

e que é o resultado para $i(t)$ obtido atrás.

$\boxed{19.20}$ Contin. Contin. $\boxed{19.20}$

Para o caso do condensador $i = C\dfrac{dv}{dt}$ e $I_0 e^{i\omega t} = C\dfrac{d(V_0 e^{i\omega t})}{dt}$ ou

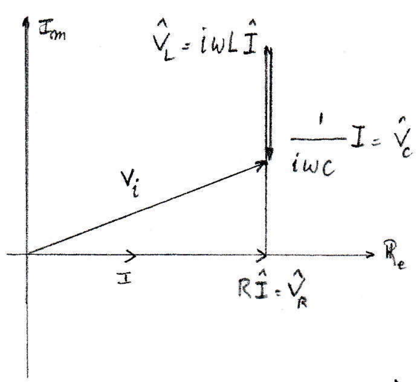
$I_0 e^{i\omega t} = C V_0 i\omega e^{i\omega t}$ pelo que $I_0 = i\omega C V_0$ ou $\dfrac{V_0}{I_0} = \dfrac{1}{i\omega C} = Z_C$

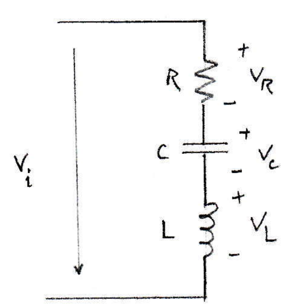
Então $i(t) = R_e\{I_0 e^{i\omega t}\} = R_e\{i\omega C V_0 e^{i\omega t}\} = R_e\{\omega C V_0\, i(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t)\} =$

$= R_e\{-\omega C V_0\,\mathrm{sen}\,\omega t + \omega C V_0\, i\cos\omega t\} = -\omega C V_0\,\mathrm{sen}\,\omega t$ que é o resultado já obtido.

Nota: o cálculo feito com funções complexas permite obter com comodidade o valor da corrente em regime forçado, isto é, depois de terminado o regime transitório. Por outro lado a excitação do circuito (neste caso só com um elemento) deve ser considerada sinusoidal pura. Se não forem estes os casos devemos usar outros métodos: a integração da eq. diferencial directamente ou o uso da transformação de Laplace que, entes sim, nos dão a resposta desde $t=0$ a $t=+\infty$, bem como não impõem nenhuma restrição à função de excitação do circuito se estas tiverem formas convencionais (degrau, rampa, sinusoide, sinusoide amortecida, etc)

$\boxed{19.21}$ $\boxed{19.21}$





Na ressonância $\hat{V}_L = \hat{V}_C$ ou seja $\hat{V}_i \equiv \hat{V}_R$ o que acontece se $i\omega L\hat{I} = -\dfrac{1}{i\omega C}\hat{I}$ ou

$-\omega^2 LC = -1$; $\omega^2 LC = 1$

19.23 **19.23**

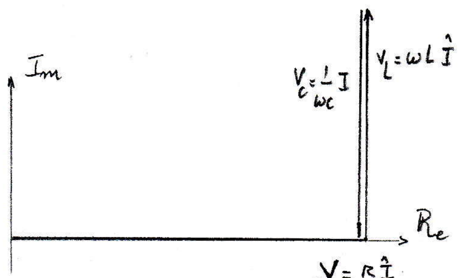
$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\omega L = 25 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 10^2\ \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{25 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-7}} = 10^2\ \Omega \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

a) Então $|Z| = \sqrt{160^2} = 160\ \Omega$ pelo que $I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{10}{160} = \frac{1}{16}$ A

b) $\delta = \arg Z = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \dfrac{0}{R} = 0$

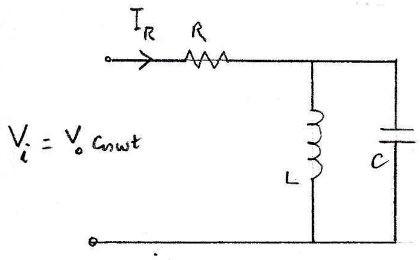


$$V_R = R \cdot I = 160 \cdot \frac{1}{16} = 10 \text{ volt}$$

$$V_L = \omega L I = 10^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{100}{16} \text{ volt} = 6{,}25 \text{ volt}$$

$$V_C = \frac{1}{\omega C} I = 10^2 \frac{1}{16} = \frac{100}{16} \text{ volt} = 6{,}25 \text{ volt}$$

19.24 **19.24**



$$Z = R + \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R + \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{\frac{1-\omega^2 LC}{j\omega C}} = R + j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

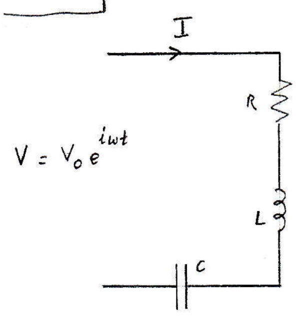
a) Se $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ então $Z = R + j\infty$ $\quad |Z| = \infty$ e $I_R = \frac{V_0}{|Z|} = 0$

b) Toda a tensão V_i aparece aos terminais de L, pois não há queda de tensão em R e então:

$$I_{L_{max}} = \frac{V_0}{\omega L} = \frac{V_0}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, V_0 \quad \text{que é igual à}$$

corrente no condensador: $I_{C_{max}} = \dfrac{V_0}{\frac{1}{\omega C}} = \omega C V_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} C V_0 = \sqrt{\dfrac{C}{L}}\, V_0$

19.25 **19.25**



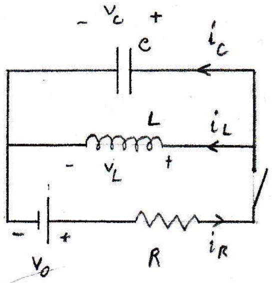
a) $I_1 = \dfrac{V_0}{\left|R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right|} = \dfrac{V_0}{R} \Rightarrow \omega L = \dfrac{1}{\omega C_1}$ ou $C_1 = \dfrac{1}{\omega^2 L}$

b) $\arg \dfrac{V_0}{I_2} = 45^\circ = \arg\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C_2}}{R}$

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C_2}}{R} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \quad \omega L - \frac{1}{\omega C_2} = R; \quad \frac{1}{\omega C_2} = \omega L - R; \quad C_2 = \frac{1}{\omega^2 L - \omega R}$$

e como $\omega^2 = \dfrac{1}{LC_1}$ vem $C_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1} - \omega R} = \dfrac{C_1}{1 - \omega R C_1}$

19.28 19.28



S fechado para $t<0$

L é um curto circuito

C é um circuito aberto

Então $i_R = i_L = \frac{V_0}{R}$

S abre em $t=0$. A corrente que circulava em L, através de R, passa a circular através do condensador C. Podemos escrever:

$V_L = V_C$; $L\frac{di_L}{dt} = V_C$ e $i_C = C\frac{dV_C}{dt} = -i_L$ que substituindo dá: $-LC\frac{d^2V_C}{dt^2} = V_C$ ou

$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}V_C = 0$ cuja solução é do tipo $V_C = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$, com $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

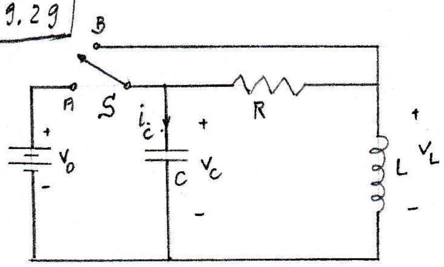
Condições iniciais: $t=0$ $V_C = 0 = A$ pelo que $V_C = B\,\text{sen}\,\omega t$. Por outro lado:

$t=0$ $i_C = -i_L = -\frac{V_0}{R} = C\frac{dV_C}{dt} = C\omega B$ ou $B = -\frac{V_0}{RC\omega}$ e então

$V_C = -\frac{V_0}{RC\omega}\,\text{sen}\,\omega t$. Para $\omega t = \frac{\pi}{2}$, V_C é máximo e igual a $\frac{V_0}{RC\omega}$ e

assim: $V_{C_{MAX}} = \frac{V_0}{RC\omega} = \frac{V_0}{RC\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{V_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

19.29 19.29



S na posição A para $t<0$:

$V_C = V_0$ e $i_C = 0$

$V_L = 0$ e $i_L = \frac{V_0}{R}$

S na posição B para $t>0$: este caso é semelhante ao anterior mas mudam as condições iniciais. Então:

$R = 1\Omega$

$C = 10^3\mu F$

$L = 10^{-3} H$

$V_0 = 10$ volt

$V_C = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$

$t=0$ $V_C = 10 = A$ e então $V_C = 10\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$

$i_C = C\frac{dV_C}{dt} = -10\omega C\,\text{sen}\,\omega t + B\omega C\cos\omega t$ e $t=0$ $i_C = -i_L = -\frac{V_0}{R} = -10$

$-10 = B\omega C$ donde $B = -\frac{10}{\omega C} = -\frac{10}{10^{-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10^{-3}\cdot 10^{-3}}}} = -10$ e então

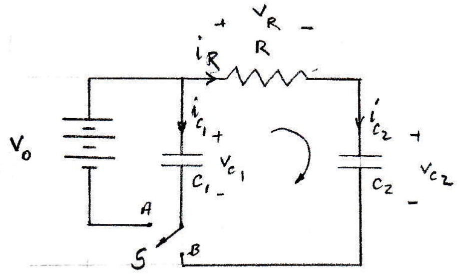
$V_C = 10\cos\omega t - 10\,\text{sen}\,\omega t = 10\left(\cos\omega t - \frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\text{sen}\,\omega t\right) = \frac{10}{\cos\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\omega t - \text{sen}\frac{\pi}{4}\text{sen}\,\omega t\right)$

$V_C = 10\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

Assim o valor máximo de V_C é: $V_{C_{MAX}} = 10\sqrt{2}$ volt que se verifica sempre que

$\omega t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $t_k = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$

19.26 | 19.26



$V_R + V_{C_2} - V_{C_1} = 0$ $\qquad i_{C_1} = C_1 \dfrac{dV_{C_1}}{dt}$ $\qquad$ e $i_{C_1} = -i_{C_2} = -i_R$

$R \cdot i_R + V_{C_2} - V_{C_1} = 0$ $\qquad i_{C_2} = C_2 \dfrac{dV_{C_2}}{dt}$ $\qquad -i_{C_1} = i_{C_2} = i_R = i$

$i_R = \dfrac{V_R}{i_R}$

$R\dfrac{di_R}{dt} + \dfrac{dV_{C_2}}{dt} - \dfrac{dV_{C_1}}{dt} = 0$

$R\dfrac{di_R}{dt} + \dfrac{i_{C_2}}{C_2} - \dfrac{i_{C_1}}{C_1} = 0$; $R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C_2} - \dfrac{-i}{C_1} = 0$; $R\dfrac{di}{dt} + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) i = 0$

Fazendo $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ vem: $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{RC} i = 0$ que vamos integrar.

$i = A e^{-\frac{t}{RC}}$ $\quad \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{A}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ $\quad -\dfrac{A}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \dfrac{1}{RC} A e^{-\frac{t}{RC}} = 0$ e portanto a solução é do tipo $i = A e^{-t/RC}$

$t = 0$ $\quad i(t=0) = \dfrac{V_0}{R}$ pois no instante em que S passa de A a B $V_{C_2} = 0$

$A = \dfrac{V_0}{R}$ e $i = \dfrac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

$p(t) = R \cdot i^2$ que é a potência instantânea dissipada em R. A energia total dissipada em R é pois $E = \int_0^\infty p(t)\,dt = \int_0^\infty R \dfrac{V_0^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt =$

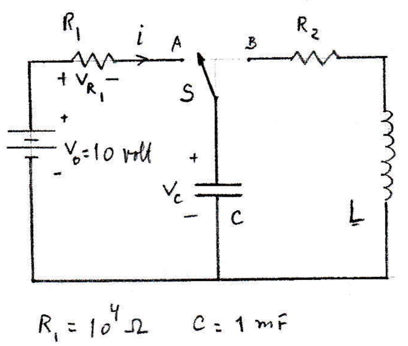
$= \dfrac{V_0^2}{R}\left(-\dfrac{RC}{2}\right)\left(e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^\infty\right) = \dfrac{V_0^2}{R}\left(-\dfrac{RC}{2}\right)\left[0 - 1\right] = \dfrac{V_0^2}{R}\dfrac{RC}{2} = \dfrac{1}{2} C V_0^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2$

b) Quando a corrente i se torna nula então $V_{C_1} = V_{C_2}$

A carga total nos condensadores é a mesma que no início $Q = C_1 V_0$

$C_1 V_0 = Q_1 + Q_2 = C_1 V_{C_1} + C_2 V_{C_2} = (C_1 + C_2) V_{C_1}$ $\qquad V_{C_1} = V_{C_2} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} V_0$

19.27 | 19.27



$R_1 = 10^4\,\Omega$ $\qquad C = 1\,mF$

$R_2 = 10^3\,\Omega$ $\qquad L = 10\,H$

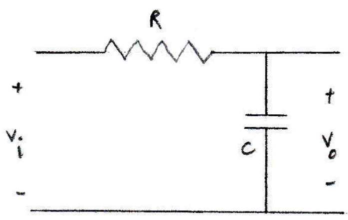
a) $V_0 = R_1 i + V_C$ $\quad i = C\dfrac{dV_C}{dt}$ $\quad RC\dfrac{dV_C}{dt} + V_C = V_0$; $\dfrac{dV_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}V_C = \dfrac{1}{RC}V_0$

que integrando dá $V_C = 10\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

e para atingir 8 volt vem $10\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}T}\right) = 8$ ou

$T = RC \ln 5 = 10^4 \cdot 10^{-3} \ln 5 = 16{,}1\,s$

b) No instante em que S comuta de A para B a corrente que se estabelece é nula pois $V_L = L\dfrac{di}{dt}$ e se i, por absurdo passasse de $i = 0$ a um valor finito, então $\dfrac{di}{dt} = \infty$, V_L seria ∞ o que não acontece.



$R = 10^3\,\Omega$

$C = 10\,\mu F$

$$V_o(\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} V_i(\omega) = \frac{1}{1 + i R C \omega} V_i(\omega)$$

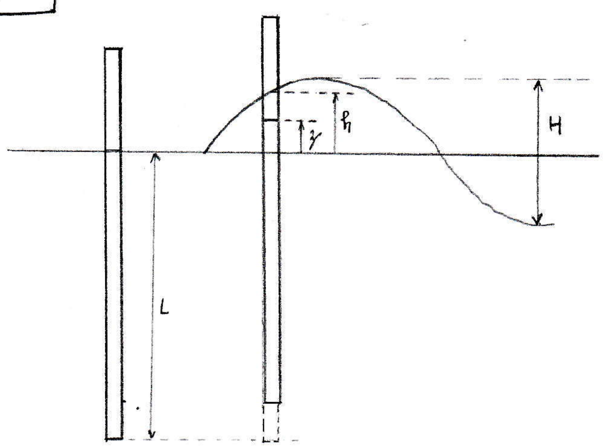
Se V_i é uma tensão contínua então $\omega = 0$ e $V'_{DC} = V_{DC}$

Se V_i é alternada sinusoidal de frequência 120 Hz vem

$$V'_{AC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} V_{AC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 120)^2}} V_{AC} = 0{,}1315\, V_{AC} = \frac{1}{7{,}6} V_{AC}$$

Isto é, a componente contínua na entrada aparece na saída sem atenuação e a componente alterna na entrada aparece na saída atenuada de 7,6 vezes.

9.31 19.31



O peso da barra é igual ao peso do volume de água deslocada, isto é, $Mg = \rho_{H_2O} A \cdot L \cdot g$ em que M é a massa total da barra, A é a secção recta da barra, L é o comprimento da barra que está submerso e ρ_{H_2O} é a densidade da água.

Assim vem: $M = \rho_{H_2O} \cdot A \cdot L$

A força adicional com que a onda impele a barra para cima é: $F = \rho_{H_2O} \cdot A \cdot (h - z) g$

e então: $M\ddot{z} - \rho_{H_2O} A (h - z) g = 0$; $M\ddot{z} + \rho_{H_2O} A g z = \rho_{H_2O} A h g$; $\rho_{H_2O} A \cdot L \cdot \ddot{z} + \rho_{H_2O} A g z = \rho_{H_2O} A h g$

que, simplificando, dá: $L\ddot{z} + g z = h g$ ou $\ddot{z} + \frac{g}{L} z = \frac{g}{L} h$

Fazendo $\frac{g}{L} = \omega^2$ e $h = \frac{H}{2} \operatorname{sen} \omega_1 t$ vem: $\ddot{z} + \omega^2 z = \omega^2 \frac{H}{2} \operatorname{sen} \omega_1 t$ com $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

que vamos integrar. Seja $z_h = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ e $z_p = a \cos \omega_1 t + b \operatorname{sen} \omega_1 t$

$\dot{z}_p = -a\omega_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + b\omega_1 \cos \omega_1 t$; $\ddot{z}_p = -a\omega_1^2 \cos \omega_1 t - b\omega_1^2 \operatorname{sen} \omega_1 t$ que, substituído

na equação diferencial dá: $-a\omega_1^2 \cos \omega_1 t - b\omega_1^2 \operatorname{sen} \omega_1 t + \omega^2 a \cos \omega_1 t + \omega^2 b \operatorname{sen} \omega_1 t =$

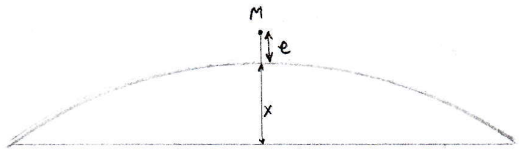
$$= \omega^2 \frac{H}{2} \operatorname{sen} \omega_1 t$$

$(-a\omega_1^2 + \omega^2 a) \cos \omega_1 t + (-b\omega_1^2 + b\omega^2) \operatorname{sen} \omega_1 t = \omega^2 \frac{H}{2} \operatorname{sen} \omega_1 t$ pelo que:

$-a(\omega_1^2 - \omega^2) = 0$ o que dá $a = 0$

$-b(\omega_1^2 - \omega^2) = \omega^2 \frac{H}{2}$ o que dá $b = -\frac{\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \frac{H}{2}$

19.32 | 19.32



a) $M\ddot{x}+kx=0$; $\ddot{x}+\frac{k}{M}x=0$

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}$

b) Sobre M actuam duas forças: a força de reacção da flexão da barra e a força centrífuga que estão em equilíbrio quando ω é constante.
Então vem: $kx=M(x+e)\omega^2$ donde se tira $x=\frac{e\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$

c) Quando ω atingir ω_0 a amplitude x vem ∞ e esse valor de ω é o $\omega_{\text{crítico}}=\omega_0$

d) O $\omega_{\text{crítico}}$ dá-se para $\omega=\omega_0$ e não depende da excentricidade e

e) Se ω ultrapassa ω_0, x vem negativo e oposto a e. Quando $x=e$ a massa M está situada sobre a linha que liga os apoios

---

19.33 | 19.33

$m\ddot{x}+m\gamma\dot{x}+kx=F(t)$ ou $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}$ com $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

A solução é a soma da solução homogenea x_h e da solução particular x_p. A solução homogenea é a solução de $\ddot{x}_h+\gamma\dot{x}_h+\omega_0^2x_h=0$ que é do tipo $x_h=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$ com s_1 e s_2 soluções de $s^2+\gamma s+\omega_0^2=0$ e que são $s_{1,2}=-\frac{\gamma}{2}\pm j\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$.

A solução particular depende, como o nome indica, de cada caso particular. Seja então

1) $F(t)=F_0$ para $t\geq 0$ e $F(t)=0$ para $t<0$.
$x_p=X_p$ é tal que $\omega_0^2X_p=\frac{F_0}{m}$ e portanto $X_p=\frac{1}{\omega_0^2}\frac{F_0}{m}=\frac{m}{k}\frac{F_0}{m}=\frac{F_0}{k}$

Solução total: $x=x_h+x_p=\frac{F_0}{k}+Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$

Condições iniciais: $x(t=0)=x_0$ e $\dot{x}(t=0)=0$ e vem:

19,31 Contin. Contin. 19.31

Então: $z = z_h + z_f = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}\,\text{sen}\,\omega_1 t$

Condições iniciais: em $t=0$ $z=0$ e $\dot z = 0$

$z(t=0) = 0 = A$ e então $A=0$

$z = B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}\,\text{sen}\,\omega_1 t$ e $\dot z = B\omega\cos\omega t + \frac{\omega^2\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}\cos\omega_1 t$

$\dot z(t=0) = 0 = B\omega + \frac{\omega^2\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}$ ou $B = -\frac{\omega\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}$ vindo, finalmente;

$z = -\frac{\omega\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}\,\text{sen}\,\omega t + \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2}\,\text{sen}\,\omega_1 t$ em que:

$$\frac{\omega\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2} = \frac{\sqrt{\frac{g}{L}}\,\frac{2\pi}{T}}{\frac{g}{L}-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\frac{H}{2}$$

e

$$\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2} = \frac{\frac{g}{L}}{\frac{g}{L}-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\frac{H}{2} = \frac{H}{2\left(1-\frac{L}{g}\frac{4\pi^2}{T^2}\right)} = \frac{H}{2-\frac{8\pi^2 L}{T^2 g}}$$

e assim a amplitude da oscilação forçada, e que é a única que a solução do livro considera, é: $\frac{H}{2-\frac{8\pi^2 L}{gT^2}} = A$

b) Fazendo $H = 10$ ft; $L = 100$ ft; $T = 5$ s e tendo em conta que $g = 9{,}8\,m\,s^{-2} = 32{,}15\,ft\,s^{-2}$

Vem: $A = \frac{10}{2-\frac{8\pi^2 100}{32{,}15\cdot 5^2}} = -1{,}27 \simeq -1{,}3$ ft

c) Para que a onda não cubra a barra então o comprimento fora de água deve ser a amplitude da onda $\frac{H}{2} = 5$ ft mais a amplitude do movimento da barra 1,3 ft, isto é, $5+1{,}3$ ft $= 6{,}3$ ft. O comprimento total é pois $L + 6{,}3$ ft $= 106{,}3$ ft

Mas, de facto, a amplitude máxima que o movimento da barra ~~pode~~ ter é: $\frac{\omega\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2} + \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2} = \frac{\omega(\omega_1+\omega)}{\omega^2-\omega_1^2}\frac{H}{2} = \frac{\omega}{\omega-\omega_1}\frac{H}{2} = \frac{H}{2-\frac{4\pi\sqrt{L}}{T\sqrt{g}}} = -4{,}11$ ft

e o comprimento total da barra deveria ser: $100+5+4{,}11 = 109{,}11$ ft

19.33 Contin. — Contin. 19.33

2) Impulso J em $t=0$. $F = m\cdot\ddot{x}$ $\int_{0^-}^{0^+} F = J = m\cdot\dot{x}(t=0)$ ou $\dot{x}(t=0^+) = \frac{J}{m}$

Não há solução particular. A solução homogénea é pois:

$x = x_h = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$ e $\dot{x} = A s_1 e^{s_1 t} + B s_2 e^{s_2 t}$ e para $t = 0^+$

Vem $x(t=0^+) = 0$ e $\dot{x}(t=0) = \frac{J}{m}$ pelo que:

$0 = A + B$ $\frac{J}{m} = As_1 + Bs_2$; $B = -A$ e $\frac{J}{m} = As_1 - As_2 = A(s_1 - s_2)$

ou $A = \frac{1}{s_1 - s_2}\frac{J}{m}$ e $B = -\frac{1}{s_1 - s_2}\frac{J}{m}$ e vem para $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\frac{J}{m} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{j\omega_\gamma t} - \frac{1}{s_1 - s_2}\frac{J}{m} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-j\omega_\gamma t} =$$

$$= \frac{1}{s_1 - s_2}\frac{J}{m} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[e^{j\omega_\gamma t} - e^{-j\omega_\gamma t}\right] = \frac{1}{j2\omega_\gamma}\frac{J}{m} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\omega_\gamma t + j\,\mathrm{sen}\,\omega_\gamma t - \cos\omega_\gamma t + j\,\mathrm{sen}\,\omega_\gamma t\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{j}\cancel{2}\omega_\gamma}\frac{J}{m} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\cancel{2}\cancel{j}\,\mathrm{sen}\,\omega_\gamma t = \frac{J}{m}\frac{1}{\omega_\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\mathrm{sen}\,\omega_\gamma t \quad \text{c.q.d}$$

3) $F(t) = F_0\cos\omega_0 t$, $t > 0$ e 0 se $t < 0$

A eq. diferencial vem: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t$ $\quad t > 0$.

A solução homogénea é a mesma que nos casos anteriores.

A solução particular é, neste caso, do tipo $x_p = a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

com a e b constantes a determinar. Então vem

$x_p = a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$; $\dot{x}_p = -a\omega_0\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t$;

$\ddot{x}_p = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$ e substituindo dá:

$-a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t - \gamma a\omega_0\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + \gamma b\omega_0\cos\omega_0 t + a\omega_0^2\cos\omega_0 t +$

$+ b\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t$ e reagrupando as parcelas em

$\cos\omega_0 t$ e $\mathrm{sen}\,\omega_0 t$ vem:

$-\cancel{a\omega_0^2} + \gamma b\omega_0 + \cancel{a\omega_0^2} = \frac{F_0}{m}$ e $-\cancel{b\omega_0^2} - \gamma a\omega_0 + \cancel{b\omega_0^2} = 0 \Rightarrow a = 0$

$$b = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\gamma\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}} = \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}$$

$\dot{x} = A\beta_1 e^{\beta_1 t} + B\beta_2 e^{\beta_2 t}$ e portanto $x_0 = A + B + \frac{F_0}{k}$ e $A\beta_1 + B\beta_2 = 0$

$B = -A - \frac{F_0}{k} + x_0$; $A\beta_1 + \left(-A - \frac{F_0}{k} + x_0\right)\beta_2 = 0$; $A(\beta_1 - \beta_2) = \left(\frac{F_0}{k} - x_0\right)\beta_2$ ou

$A = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{F_0}{k} - x_0\right)$ e $B = -\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{F_0}{k} - x_0\right) - \left(\frac{F_0}{k} + x_0\right) = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right) + \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)$

$$B = \left[\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + 1\right]\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right) = \frac{\beta_2 + \beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)$$

e a solução final é: $x = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{F_0}{k} - x_0\right)e^{\beta_1 t} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)e^{\beta_2 t} + \frac{F_0}{k}$

$$x = \frac{F_0}{k} - \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\left[\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}e^{\beta_1 t} - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}e^{\beta_2 t}\right]$$

Ora: $\beta_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\omega_\gamma$ e $\beta_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\omega_\gamma$ com $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$$\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\omega_\gamma}{-\frac{\gamma}{2} + j\omega_\gamma + \frac{\gamma}{2} + j\omega_\gamma} = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\omega_\gamma}{j2\omega_\gamma} = -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{\gamma}{2}}{j2\omega_\gamma} = -\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}$$

$\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = +\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}$ e substituindo em $x(t)$ vem:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\left[\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{j\omega_\gamma t} - \left(+\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-j\omega_\gamma t}\right] =$$

$$= \frac{F_0}{k} - \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{j\omega_\gamma t} - \left(+\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{-j\omega_\gamma t}\right] =$$

$$= \frac{F_0}{k} - \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot 2 \cdot \mathcal{R}\left[\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{j\omega_\gamma t}\right] =$$

$$= \frac{F_0}{k} - \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot 2 \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos\omega_\gamma t - \frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right] =$$

$$= \frac{F_0}{k} + \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\omega_\gamma t + \frac{\gamma}{2\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right]$$ c.q.d.

19.33 Contin. — Contin. 19.33

A solução particular é pois $x_p = \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}} \operatorname{sen} \omega_0 t$

A solução total é: $x = x_h + x_p = A e^{\beta_1 t} + B e^{\beta_2 t} + \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}} \operatorname{sen}\omega_0 t$

Condições iniciais: $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$ e então:

$A + B = x_0$; $A\beta_1 + B\beta_2 + \frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}} = 0$ pelo que: $B = -A + x_0$

$$A\beta_1 + (-A + x_0)\beta_2 = -\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}} ; \quad A(\beta_1 - \beta_2) = -x_0\beta_2 - \frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}} ; \quad A = -x_0 \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}$$

$$B = -A + x_0 = +x_0\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + x_0 + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}} = x_0\left[1 + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right] + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}$$

$\beta_1 - \beta_2 + \beta_2$

$$B = x_0\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}$$

$$A = -x_0\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}$$

e vem para solução final:

$$x = \left(-x_0\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}\right)e^{\beta_1 t} + \left(x_0\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}\right)e^{\beta_2 t} + \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

$$= \left[\left[-x_0\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{j\omega_\gamma t} + x_0\left(+\frac{1}{2} + j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{-j\omega_\gamma t}\right] + \left[-\frac{1}{j2\omega_\gamma}e^{j\omega_\gamma t} + \frac{1}{j2\omega_\gamma}e^{-j\omega_\gamma t}\right]\frac{F_0\omega_0}{\gamma\sqrt{km}}\right]e^{-\frac{\gamma}{2}t} +$$

$$+ \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[x_0 \cdot 2\,\Re\left[\left(\frac{1}{2} - j\frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\right)e^{j\omega_\gamma t}\right] + \frac{F_0}{\gamma m}2\cdot\Re\left[\frac{-1}{j2\omega_\gamma}e^{j\omega_\gamma t}\right]\right] + \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

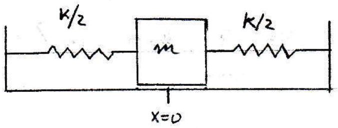
$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[x_0 \cdot 2\left(\frac{1}{2}\cos\omega_\gamma t + \frac{\gamma/2}{2\omega_\gamma}\operatorname{sen}\omega_\gamma t\right) + 2\cdot\frac{F_0}{\gamma m}\cdot\left(-\frac{1}{2\omega_\gamma}\operatorname{sen}\omega_\gamma t\right)\right] + \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t =$$

$$= \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[x_0\cos\omega_\gamma t + \frac{\gamma x_0}{2\omega_\gamma}\operatorname{sen}\omega_\gamma t - \frac{F_0}{\gamma m}\frac{1}{\omega_\gamma}\operatorname{sen}\omega_\gamma t\right] =$$

$$= \frac{F_0}{\gamma\sqrt{km}}\operatorname{sen}\omega_0 t + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[x_0\cos\omega_\gamma t - \frac{1}{\omega_\gamma}\left[\frac{F_0}{\gamma m} - \frac{\gamma}{2}x_0\right]\operatorname{sen}\omega_\gamma t\right]$$

c.q.d.

19.34 | 19.34



$m\ddot{x}+\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)x = mg\mu$; $\ddot{x}+\frac{k}{m}x = g\mu$

$x_h = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$

a) $x_f = x_{f_0}$ tal que ; $\frac{k}{m}x_{f_0} = g\mu$; $x_{f_0} = \frac{mg\mu}{k}$

Então $x = x_h + x_f = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t + \frac{mg\mu}{k}$

Condições iniciais: $t=0$ $x=A$ e $\dot{x}=0$ e então: $x(t=0) = A = a + \frac{mg\mu}{k}$ ou $a = A - \frac{mg\mu}{k}$

e também $\dot{x} = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t$ e $\dot{x}(t=0) = 0 = b\omega$ ou $b=0$

Assim: $x = \left(A - \frac{mg\mu}{k}\right)\cos\omega t + \frac{mg\mu}{k}$

// //

19.35 | 19.35

$m\ddot{x} = -qE - \alpha\dddot{x}$; $\dddot{x} + \frac{m}{\alpha}\ddot{x} = -\frac{q}{\alpha}E_0\cos\omega t$. Fazendo $\ddot{x} = z$ vem: $\dot{z} + \frac{m}{\alpha}z = -\frac{q}{\alpha}E_0\cos\omega t$

A solução homogénea é do tipo $e^{-\frac{m}{\alpha}t}$ e se $\alpha>0$ então esta tende para zero quando t tende para infinito. Subsiste, se t suficientemente grande, a solução forçada que é do tipo: $z_f = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$, em que a e b são incógnitas para determinar.

$\dot{z}_f = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t$ e substituindo na eq. dif. vem, com $\omega_1^2 = \frac{m}{\alpha}$

$-a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t + \omega_1^2 a\cos\omega t + \omega_1^2 b\,\text{sen}\,\omega t = -\frac{q}{\alpha}E_0\cos\omega t$ pelo que:

$-a\omega + \omega_1^2 b = 0$ pelo que $b = a\frac{\omega}{\omega_1^2}$ que substituindo em:

$b\omega + \omega_1^2 a = -\frac{q}{\alpha}E_0$ vem: $a\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \omega_1^2\right) = -\frac{q}{\alpha}E_0$ pelo que: $a = -\frac{q}{\alpha}E_0\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}$

e $b = -\frac{q}{\alpha}E_0\frac{\omega}{\omega_1^2}\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}$. Assim temos $z_f = -\frac{q}{\alpha}E_0\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}\left(\cos\omega t + \frac{\omega}{\omega_1^2}\text{sen}\,\omega t\right)$

e, fazendo $\text{tg}\,\phi = \frac{\omega}{\omega_1^2}$ vem: $z_f = \underbrace{-\frac{q}{\alpha}E_0\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}}_{a}\left(\cos\omega t + \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi}\text{sen}\,\omega t\right) =$

$= \frac{a}{\cos\phi}\left(\cos\omega t\cdot\cos\phi + \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\phi\right) = \frac{a}{\cos\phi}\cos(\omega t-\phi)$ que integrada duas vezes

dá: $\dot{x} = -\frac{a}{\cos\phi}\frac{1}{\omega}\text{sen}(\omega t-\phi) + C_1$ e $x = -\frac{a}{\cos\phi}\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t-\phi) + C_1 t + C_2$

Considerando condições iniciais nulas vem para a amplitude em regime permanente:

$$A = -\frac{a}{\cos\phi}\frac{1}{\omega^2} = \frac{q}{\alpha}E_0\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}}}\frac{1}{\omega^2} = \frac{qE_0}{\alpha}\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1^2}\right)^2}}{\omega^2} =$$

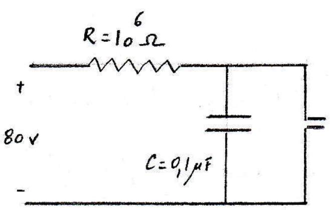
$$= \frac{qE_0}{\alpha}\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^4}\frac{\sqrt{\omega_1^4+\omega^2}}{\omega_1^2\omega^2} = \frac{qE_0}{\alpha}\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\omega_1^4}} = \frac{qE_0}{\alpha}\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\frac{m^2}{\alpha^2}}} =$$

$$= \frac{qE_0}{\alpha}\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\sqrt{m^2+\alpha^2\omega^2}} = \frac{qE_0}{\omega^2\sqrt{m^2+\alpha^2\omega^2}}$$

e para a fase $\phi = arctg\frac{\omega}{\omega_1^2} = arctg\frac{\omega}{\frac{m}{\alpha}} = arctg\frac{\omega\alpha}{m}$

// //

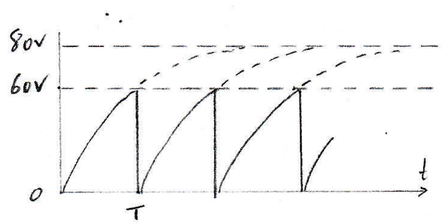
19.36 19.36



$$V_c = 80\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

em $t=T$ V_c atinge a tensão de condução do tubo neon:

$$80\left(1-e^{-\frac{T}{RC}}\right) = 60 \quad \text{ou} \quad e^{-\frac{T}{RC}} = 1-\frac{60}{80} = \frac{1}{4}; \quad e^{\frac{T}{RC}} = 4$$



$$T = RC\ln 4 = 10^6\cdot 0,1\cdot 10^{-6}\ln 4 = 0,1\cdot\ln 4 = 0,1386\,s$$

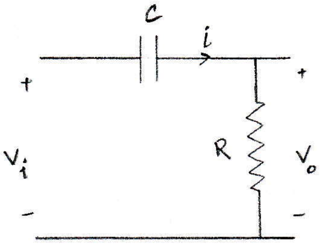
e a frequência $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1386} = 7,21$ ciclos s^{-1}

// //

19.37 19.37

a) $i = C\frac{dV_c}{dt}$ $V_o = R\cdot i = RC\frac{dV_c}{dt}$ $V_i - V_o = V_c$ e se $|V_o| << |V_i|$

vem $V_i \simeq V_c$ e $V_o = RC\frac{dV_i}{dt}$



b) $RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = V_i$ Mas $V_i - V_c = V_o$ ou $V_c = V_i - V_o$ pelo que:

$$RC\frac{dV_i}{dt} - RC\frac{dV_o}{dt} + \cancel{V_i} - V_o = \cancel{V_i}\ ; \quad \frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{RC}V_o = \frac{dV_i}{dt}$$

$V_i = V\cos\omega t$

A solução homogénea $e^{-\frac{t}{RC}}$ tende para zero com t a tender para ∞.

$\frac{dV_i}{dt} = -V\omega\,sen\,\omega t$

Vamos calcular a solução forçada:

19.40 Contin. 2 — Contin 2 19.40

Portanto temos: $i(t) = 2,109 \cdot e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \cos(44,5 \cdot 10^3 t - 18,55^\circ)$

Cálculo de $V_L = L \dfrac{di}{dt}$

$$V_L = 2 \cdot 10^{-3} \left[-1,5 \cdot 10^3 \cdot 2,109\, e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \cos(44,5 \cdot 10^3 t - 18,55^\circ) - 2,109\, e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \cdot 44,5 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(44,5 \cdot 10^3 t - 18,55^\circ) \right]$$

$$= -2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 2,109 \cdot e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \left[\cos(44,5 \cdot 10^3 t - 18,55^\circ) + \frac{44,5}{1,5} \text{sen}(44,5 \cdot 10^3 t - 16,55^\circ) \right]$$

e fazendo $\text{tg}\,\beta = \dfrac{44,5}{1,5}$ donde $\beta = \text{arctg} \dfrac{44,5}{1,5} = 88^\circ$ e $\dfrac{1}{\cos\beta} = 28,65$

Vem então para $V_L(t) =$

$$= -2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 2,109 \cdot e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \frac{1}{\cos\beta} \cos(44,5 \cdot 10^3 t - 18,55^\circ - 88^\circ) =$$

$$= -181,3\, e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \cos(44,5 \cdot 10^3 t - 106,55^\circ) = 181,3\, e^{-1,5 \cdot 10^3 t} \cos(44,5 \cdot 10^3 t - 16,55 - 90) =$$

$$= -181,3 \cdot e^{-1,5 \cdot 10^3 t}\, \text{sen}(44,5 \cdot 10^3 t - 16,55^\circ)$$

Notar que em $t = 0$ $V_L = -51,64$ volt. Isto é V_L passa bruscamente

de $V_L(t = 0^-) = 0$ para $\underline{\underline{V_L = -51,64 \text{ volt}}}$. a)

Admitindo que $V_{L_{max}}$ se daria para $\frac{1}{4}$ do período de oscilação

Vem: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $T = \dfrac{2\pi}{44,5 \cdot 10^3} = 141,1 \cdot 10^{-6}$ s $= 141,1\ \mu$seg

$t = \dfrac{T}{4} = \underline{\underline{35\ \mu\text{seg}}}$ e V_L vale então: b)

$$V_L = 181,3 \cdot e^{-1,5 \cdot 10^3 \cdot 35 \cdot 10^{-6}}\, \text{sen}(90 - 16,55^\circ) = 165 \text{ volt} \quad \text{c)}$$

O efeito multiplicador de tensão do transformador produz nos terminais da vela uma tensão que atinge $165 \cdot 100 = \underline{\underline{16,5}}$ Kvolt

$\boxed{19.40}$ contin. Contin. $\boxed{19.40}$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{2\cdot 10^{-3}} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2\cdot 10^{-3}}\right)^2 - 4\frac{1}{0{,}25\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-3\cdot 10^3 \pm \sqrt{(3\cdot 10^3)^2 - \frac{4}{0{,}5\cdot 10^{-9}}}\right) = \frac{1}{2}\left(-3\cdot 10^{+3} \pm \sqrt{\cancel{9\cdot 10^6} - 8\cdot 10^9}\right) \simeq$$

$$= -1{,}5\cdot 10^3 \pm j\,\frac{1}{2}\cdot 89442 = -1{,}5\cdot 10^3 \pm j\, 44{,}7\cdot 10^3 = (-1{,}5 \pm j\,44{,}7)\,10^3$$

Condições iniciais: $i(t=0) = 2 = A + B$ ou $B = 2 - A$

$$\frac{di}{dt}(t=0) = A\beta_1 + B\beta_2 = -\frac{1}{L}V_C(t=0) - \frac{R}{L}(A+B) + \frac{1}{L}12 = -\frac{1}{L}\cdot 0 - \cancel{\frac{R}{L}2} + \cancel{\frac{12}{L}} = 0$$

$A\beta_1 + (2-A)\beta_2 = 0$; ou $A(\beta_1 - \beta_2) = -2\beta_2$ $\quad A = \dfrac{-2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}$ e

$$B = 2 - A = 2 - \frac{-2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{2\beta_1 - \cancel{2\beta_2} + \cancel{2\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$$

Substituindo em A e B β_1 e β_2 pelos valores obtidos, vem:

$A = 1 - j\,0{,}3356$ e $B = 1 + j\,0{,}3356$ pelo que:

$$i(t) = (1 - j\,0{,}3356)\,e^{(-1{,}5 + j\,44{,}7)10^3 t} + (1 + j\,0{,}3356)\,e^{(-1{,}5 - j\,44{,}7)10^3 t} =$$

$$= 2\cdot \text{Real}\left[(1 - j\,0{,}3356)\,e^{(-1{,}5 + j\,44{,}7)10^3 t}\right] =$$

$$= 2\cdot \text{Real}\left[(1 - j\,0{,}3356)\,e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\left(\cos 44{,}7\cdot 10^3 t + j \operatorname{sen} 44{,}7\cdot 10^3 t\right)\right] =$$

$$= 2\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\left(\cos 44{,}7\cdot 10^3 t + 0{,}3356 \operatorname{sen} 44{,}7\cdot 10^3 t\right) =$$

$$= 2\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\left(\cos 44{,}7\cdot 10^3 \cdot t + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen} 44{,}7\cdot 10^3 t\right) \quad \text{com } \operatorname{tg}\alpha = 0{,}3356$$

donde $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}3356 = 18{,}55^\circ$ e $\cos\alpha = 0{,}948$ e vem,

$$i(t) = 2\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\cdot \frac{1}{\cos 18{,}55}\left(\cos(44{,}7\cdot 10^3 t)\cos 18{,}55 + \operatorname{sen} 18{,}55 \cdot \operatorname{sen}(44{,}7\cdot 10^3 t)\right)$$

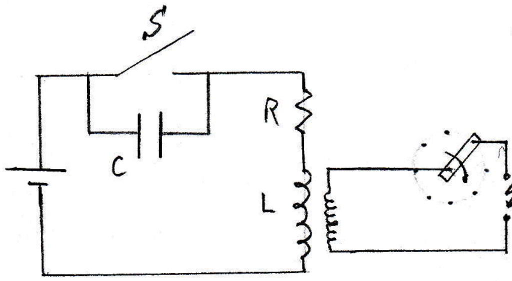
$$= 2\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\cdot 1{,}0548 \cdot \cos(44{,}7\cdot 10^3 t - 18{,}55^\circ) = 2{,}109\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^3 t}\cos(44{,}7\cdot 10^3 t - 18{,}55^\circ)$$

Verificação: em $t=0$ $i=2$ e fazendo $t=0$ vem, de facto, $i=2$

19.40

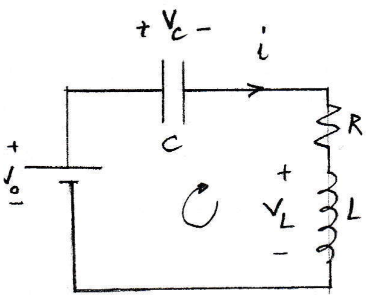
19.40

$\frac{4200\,rpm}{60\,s} = 70\,rps$ 1 rotação em $\frac{1}{70}\,s$



Cada contacto do "distribuidor" das velas está fechado durante $\Delta T = \frac{1}{70 \cdot 8} \simeq 1,7857\,ms$

A constante de tempo do circuito é dada por $\tau = \frac{L}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{6} = 0,33 \cdot 10^{-3}\,s = 0,33\,ms$



Enquanto S está fechado a corrente no primário é dada por: $i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

e para t suficiente $i_{final} = \frac{V_0}{R} = \frac{12}{6} = 2A$.

Quando S abre o circuito é o da figura 2 com $i(t=0) = i_0 = 2A$ e $V_C(t=0) = 0$

Equação de equilíbrio do circuito:

$-V_0 + V_C + Ri + V_L = 0$ $\quad V_L = -Ri - V_C + V_0$ mas $V_L = L\frac{di}{dt}$ e $i = C\frac{dV_c}{dt}$

e vem $\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}V_C + \frac{1}{L}V_0$ e derivando vem: $\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di}{dt} - \frac{1}{L}\frac{1}{C}i$

ou seja $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$. Notar que $\frac{dV_0}{dt} = 0$ pois $V_0 = $ constante $= 12\,V$

A integração desta equação com as condições iniciais $i(t=0) = 2A$ e $V_C(t=0) = 0$ e sabendo que $V_L = L\frac{di}{dt}$ obtemos $V_L(t)$.

Seja $i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$. Derivando 2 vezes e substituindo na equação diferencial vem:

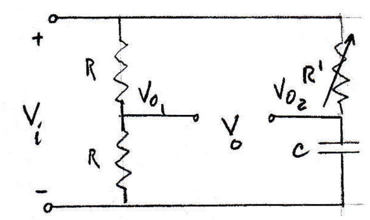
$$As_1^2 e^{s_1 t} + Bs_2^2 e^{s_2 t} + \frac{R}{L}As_1 e^{s_1 t} + \frac{R}{L}Bs_2 e^{s_2 t} + \frac{1}{LC}Ae^{s_1 t} + \frac{1}{LC}Be^{s_2 t} = 0$$ e

agrupando: $A\left(s_1^2 + \frac{R}{L}s_1 + \frac{1}{LC}\right)e^{s_1 t} + B\left(s_2^2 + \frac{R}{L}s_2 + \frac{1}{LC}\right)e^{s_2 t} = 0$

o que impõe $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$ com $s = s_1$ ou s_2

19.39

19.39



$$V_{0_1} = \frac{V_i}{2R} R$$

$$V_{0_2} = \frac{V_i}{R' + Z_c} \cdot Z_c \quad \text{com } Z_c = \frac{1}{i\omega C}$$

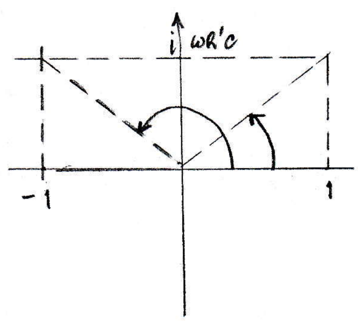
$$V_0 = V_{0_1} - V_{0_2} = \frac{R}{2R} V_i - \frac{Z_c}{R' + Z_c} V_i$$

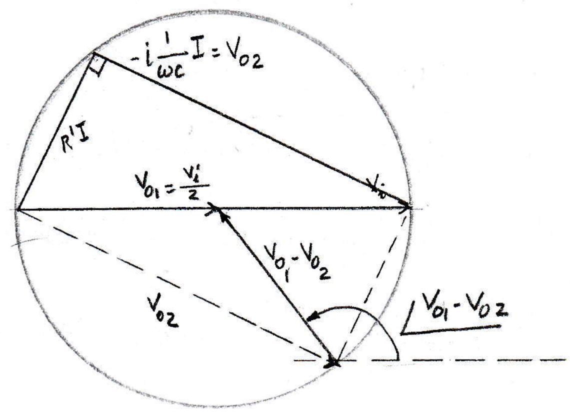
$$V_0 = V_i \left[\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R' + \frac{1}{i\omega C}} \right] = V_i \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + i\omega R'C} \right] = V_i \frac{1 + i\omega R'C - 2}{2(1 + i\omega R'C)} = V_i \frac{1}{2} \frac{-1 + i\omega R'C}{1 + i\omega R'C}$$

Então: $|V_0| = \frac{1}{2} |V_i|$

$$\angle V_0 - \angle V_i = \angle \frac{-1 + i\omega R'C}{1 + i\omega R'C} = \angle(-1 + i\omega R'C) - \angle(1 + i\omega R'C) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg} \omega R'C - \operatorname{arctg} \omega R'C = \pi - 2 \operatorname{arctg} \omega R'C$$

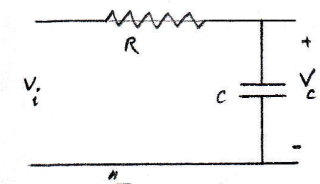




Notar que a impedância de $Z_c = \frac{1}{i\omega C}$ no caso em que estamos a supôr que V_i é um sinal sinusoidal puro e só estamos interessados em conhecer as diversas tensões e correntes no circuito em regime forçado, isto é, depois de se extinguir o regime natural.

19.38

19.38



circuito "Integrador"

$V_i = Ri + V_c = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$ e $V_c = V_0$ e vem:

$$\frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{RC}V_0 = \frac{1}{RC}V_i \quad \text{e} \quad V_i = V\cos\omega t$$

Depois de extinto o regime natural fica o regime forçado V_{0f} que, mais uma vez, vamos calcular. $V_{0f} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

e $\dot{V}_{0f} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$ e substituindo vem:

$$-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t + \frac{a}{RC}\cos\omega t + \frac{b}{RC}\sin\omega t = \frac{V}{RC}\cos\omega t \quad \text{donde:}$$

$-a\omega + \frac{b}{RC} = 0$ o que dá $b = a\omega RC$

$b\omega + \frac{a}{RC} = \frac{V}{RC}$ o que dá $a = \frac{V}{1+(\omega RC)^2}$ e $b = \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}V$ e vem:

$$V_{0f} = \frac{V}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t\right] \quad \text{e fazendo } \operatorname{tg}\phi = \omega RC \text{ e } \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\phi}}$$

$$V_{0f} = \frac{V}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos\omega t + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\omega t\right] = \frac{V}{1+(\omega RC)^2}\frac{1}{\cos\phi}\left[\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi\right] =$$

$$= \frac{V}{1+(\omega RC)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega RC)^2}\cos(\omega t - \phi) = \frac{V}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

1º caso: $\omega RC \ll 1$ ou $\omega \ll \frac{1}{RC}$ vem: $\operatorname{tg}\phi \simeq 0$ $\phi = 0°$ $V_{0f} = V\cos\omega t$, isto é, a saída V_0 coincide com a entrada V_i. Diz-se que o condensador actua como um circuito aberto pois a corrente é nula.

2º caso: $\omega RC \gg 1$ ou $\omega \gg \frac{1}{RC}$. Então $V_{0f} = \frac{V}{\omega RC}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ pois $\operatorname{tg}\phi = \infty$ e $\phi \simeq \frac{\pi}{2}$ e vem $V_{0f} = \frac{1}{RC}\frac{V}{\omega}\sin\omega t = \frac{1}{RC}\int_0^t V\cos\omega t\, dt$ ou seja $V_{0f} \simeq \frac{1}{RC}\int_0^t V_i(\tau)\,d\tau$, isto é, a saída V_0 é proporcional ao integral do sinal de entrada.

19.37 19.37

$V_{o_f} = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t \qquad \dot V_{o_f} = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t$ e substituindo na eq. dif.:

$$-a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t + \frac{1}{RC}a\cos\omega t + \frac{1}{RC}b\,\text{sen}\,\omega t = -V\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

$-a\omega + \frac{b}{RC} = -V\omega$ e $b\omega + \frac{1}{RC}a = 0$ e daqui vem: $b = -\frac{a}{\omega RC}$

$$-a\omega + \frac{1}{RC}\left(-\frac{a}{\omega RC}\right) = -V\omega;\quad a\left[\omega + \frac{1}{\omega(RC)^2}\right] = V\omega;\quad a = \frac{V\omega}{\omega + \frac{1}{\omega(RC)^2}} = \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}$$

e $b = -\frac{1}{\omega RC}\,\frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2} = -\frac{V\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$ e vem para V_{o_f}:

$$V_{o_f} = \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}\cos\omega t - \frac{V\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\sin\omega t = \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos\omega t - \frac{1}{\omega RC}\sin\omega t\right]$$

Fazendo $\text{tg}\,\phi = \frac{1}{\omega RC}$ vem: $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega RC)^2}}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$

$$V_{o_f} = \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos\omega t - \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\omega t\right] = \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}\,\frac{1}{\cos\phi}\left[\cos\omega t\cos\phi - \sin\phi\sin\omega t\right] =$$

$$= \frac{V(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}{\omega RC}\cos(\omega t+\phi) = \frac{V\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t+\phi)$$

Caso 1º: $\omega RC >> 1$ então $\text{tg}\,\phi = 0$ e $V_{o_f} \cong V\cos\omega t \equiv V_i$, isto é, a saída V_{o_f} é igual à entrada, a tensão no condensador é nula e por isso diz-se que, se a frequência do sinal de entrada fôr suficientemente grande é um curto circuito.
$\omega RC >> 1 \Rightarrow \omega >> \frac{1}{RC}$, então o condensador é um curto circuito.

Caso 2º: $\omega RC << 1$ então $\text{tg}\,\phi = \infty$ $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $V_{o_f} \simeq V\omega RC\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= RC\left(-V\omega\sin\omega t\right) = RC\frac{dv_i}{dt}$$

Isto é se a frequência ω do sinal de entrada for suficientemente pequena $\omega RC << 1 \Rightarrow \omega << \frac{1}{RC}$, então o sinal de saída é proporcional, depois de passado o regime transitório, à derivada do sinal de entrada.