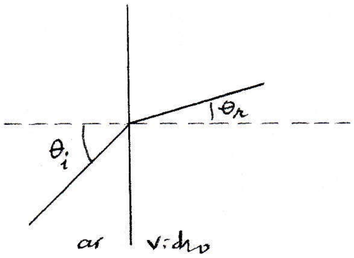
23.1 **23.1**

O índice de refracção é dado por: $n = 1 + \dfrac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}$. Por outro lado

$\omega_{luz\ azul} > \omega_{luz\ vermelha}$ o que implica que $n_{luz\ azul} > n_{luz\ vermelha}$



e $\operatorname{sen}\theta_i = n_{vidro} \cdot \operatorname{sen}\theta_r$ em que se tomou $n_{ar} = 1$

Assim, se n aumenta θ_r diminui, o que significa que o raio é tanto mais desviado quanto maior for n_{vidro}. Por isso o raio da luz azul é mais desviado que o raio de luz vermelha.

// //

23.2 **23.2**

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1,56 \cdot 10^{-10}} = 1,208 \cdot 10^{19}\ \text{rad s}^{-1}$$

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m_e(\omega_0^2-\omega^2)} \simeq 1 + \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}$$ pois $\omega_0 << \omega$ no alumínio

$m_e = 0,511\ \frac{MeV}{c^2} = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg

$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$

Falta conhecer N que é o nº de cargas por unidade de volume. Para isso:

densidade do Al: $2697\ kg\ m^{-3}$

massa molar do Al: $27\ g\ mol^{-1}$.

1 mole contem $6,022 \cdot 10^{23}$ átomos

nº de cargas por átomo: 3

e então: $N'\frac{\text{átomos}}{\text{un. de volume}} = 2697 \cdot 10^{3} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{27}\ \frac{\text{átomos}}{m^3} = 6,015 \cdot 10^{28}$ átomos m^{-3}

e finalmente N, em nº cargas por un. de volume $= 3 \cdot 6,015 \cdot 10^{28}$ cargas m^{-3}

e então: $$n = 1 - \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{3 \cdot 6,015 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (1,208 \cdot 10^{13})^2} = \underline{\underline{0,999998}}$$

Nota: na solução $n = 0,9999916$! Precisão no uso das constantes?

23.3

$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}$ e como na ionosfera está tudo ionizado vem $\omega_0 = 0$

e então $n = 1 - \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} = 0{,}9$ ou $\frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} = 0{,}1$ e $N = 0{,}1 \cdot 2\varepsilon_0 m_e \omega^2 \frac{1}{q_e^2}$

pelo que: $N = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 8{,}815 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (2\pi \cdot 10^8)^2 \frac{1}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2} = 2{,}5 \cdot 10^7 \frac{\text{electrons}}{\text{cm}^3}$

23.4

a) $E = E_0 e^{i\omega(t - n\frac{z}{c})}$ e se $n = n' - in''$ vem:

$$E = E_0 e^{i\omega(t - n'\frac{z}{c} + in''\frac{z}{c})} = E_0 e^{-\omega n''\frac{z}{c}} e^{i\omega(t - n'\frac{z}{c})}$$

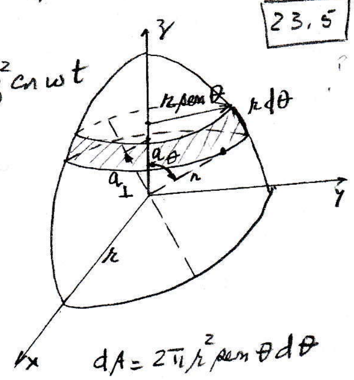
b) Se $\omega = \omega_0$ então $n - 1 = \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{i\gamma\omega} = -i \underbrace{\frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\gamma\omega}}_{n''}$ e então:

$$E = E_0 e^{-\omega n''\frac{z}{c}} e^{i\omega(t - n'\frac{z}{c})} \quad \text{e} \quad I = E_0^2 = e^{-\omega n''\frac{z}{c}} e^{i\omega(t - n'\frac{z}{c})} e^{-\omega n''\frac{z}{c}} e^{-i\omega(t - n'\frac{z}{c})} =$$

$$I = I_0 e^{-2\cancel{\omega}\frac{N q_e^2}{\cancel{2}\varepsilon_0 m}\frac{z}{\gamma\cancel{\omega} c}} = I_0 e^{-\frac{N q_e^2}{\varepsilon_0 m \gamma}\frac{z}{c}}$$

Nota: na solução falta o z!

23.5 (da pg 32.2 FLP)



$dA = 2\pi r^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta$

$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} a(t - \frac{r}{c}) \cdot \text{sen}\,\theta$ $\quad x = x_0 \cos\omega t;\ \dot{x} = -x_0\omega_0 \,\text{sen}\,\omega t;\ \ddot{x} = -x_0\omega_0^2 \cos\omega t$

$S = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c \frac{q^2 x_0^2 \omega_0^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 c^4 r^2} \text{sen}^2\theta \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})$ em W/m^2

$$= \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{16\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{\cancel{r^2}} \int_0^\pi \text{sen}^2\theta \; \cancel{2\pi} \cancel{r^2} \,\text{sen}\,\theta\, d\theta \; \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega(t - \frac{r}{c})\, dt}$$

$$\overline{P} = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \int_0^\pi \text{sen}^3\theta\, d\theta \cdot \frac{1}{2} = \frac{q^2 x_0^2 \omega_0^4}{16\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{q^2 x_0^2 \omega_0^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Logo a potência média total radiada é $\overline{P} = \frac{q^2 x_0^2 \omega_0^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$ em W

b) $\gamma = \dfrac{\omega_0}{Q}$ e $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}$ e $e^2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$ e $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

Substituindo vem para $\gamma = \omega \dfrac{\cancel{4\pi} q^2}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \cdot 3 \cdot \dfrac{2\pi c}{\omega} \cdot m \cdot c^2} = \dfrac{\omega^2 q^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3}$

c) $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ e derivando vem: $d\lambda = -\dfrac{2\pi c}{\omega^2} d\omega$ ou $2d\lambda = -\dfrac{2\pi c}{\omega^2} 2d\omega$ e

fazendo $L_\lambda = 2d\lambda$ e $L_\omega = 2d\omega$ $L_\lambda = -\dfrac{2\pi c}{\omega^2} L_\omega$ Mas $\gamma = 2\Delta\omega = L_\omega$ pelo que

$L_\lambda = -\dfrac{2\pi c}{\omega^2}\gamma = 1{,}18 \cdot 10^{-4}$ Å (pg 32.4 FLP)