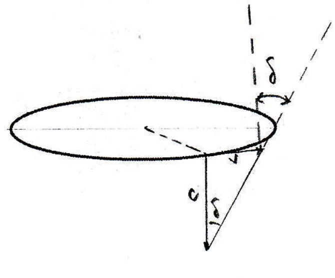


$$\operatorname{tg}\delta = \frac{v}{c}$$

Mas $v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T} R$ ou $R = \frac{1}{2\pi} \cdot v \cdot T = \frac{1}{2\pi} c \cdot \operatorname{tg}\delta \cdot T$

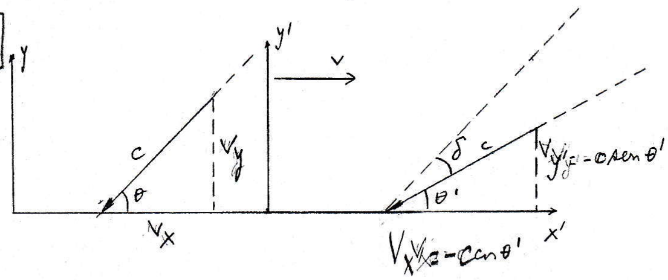
$$\operatorname{tg}\delta \simeq \delta \text{ (em radianos)} = 20{,}5 \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \text{ radianos}$$

$$T = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ segundos}$$

Então $R = \frac{1}{2\cancel{\pi}} 3 \cdot 10^8 \cdot 20{,}5 \frac{\cancel{\pi}}{180 \cdot 36\cancel{0}0} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\cancel{6}00 = 149{,}7 \cdot 10^9 \text{ m} = 149{,}7 \cdot 10^6 \text{ km} = 150 \text{ MKm}$

// //

26.8 26.8



VER!

A composição de velocidades relativistas dá: $V_x = \dfrac{V_{x'} + V}{1 + \frac{V \cdot V_{x'}}{c^2}}$ e $V_y = \dfrac{V_{y'}}{\gamma\left(1 + \frac{V \cdot V_{x'}}{c^2}\right)}$

Por outro lado: $\cos\theta' = \dfrac{-V_{x'}}{c}$; e $\operatorname{sen}\theta' = \dfrac{-V_{y'}}{c}$ $\quad \cos\theta = -\dfrac{V_x}{c}$ $\quad \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{V_y}{c}$

e também: $V_{x'} = \dfrac{V_x - V}{1 - \frac{V \cdot V_x}{c^2}}$ e $V_{y'} = \dfrac{V_y}{\gamma\left(1 - \frac{V \cdot V_x}{c^2}\right)}$

$\sin\delta = \sin(\theta - \theta') = \sin\theta \cos\theta' - \sin\theta' \cos\theta$ e substituindo vem:

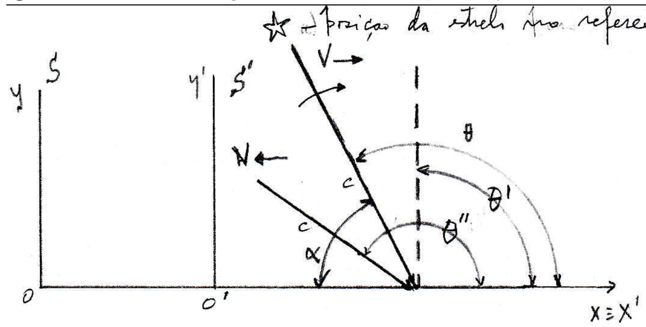
$$\sin\delta = -\sin\theta \frac{1}{c} V_{x'} + \frac{V_{y'}}{c} \cos\theta = -\frac{1}{c} \sin\theta \frac{V_x - V}{1 - \frac{V}{c}\frac{V_x}{c}} + \frac{1}{c} \frac{V_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c}\frac{V_x}{c}\right)} \cos\theta =$$

$$= -\frac{\cancel{c}}{c} \sin\theta \frac{\frac{V_x}{c} - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\frac{V_x}{c}} + \frac{\cancel{c}}{c} \frac{\frac{V_y}{c}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c}\frac{V_x}{c}\right)} \cos\theta = \sin\theta \frac{-\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right)} \cos\theta$$

e se $\theta = 90^\circ$, que foi o ângulo considerado no problema do livro, então

$$\sin\delta = (-1) \frac{0 - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cdot 0} - \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c} \cdot 0\right)} \cdot 0 = + \frac{V}{c}$$

26.9 | 26.9



Se V for positivo – deslocamento de S' para a direita na figura – então a estrela é vista sob um ângulo θ' menor que θ. Se V for negativo passa-se o contrário e a estrela é vista, pelo observador móvel, formando um ângulo θ'' maior que θ.

Neste problema vamos começar por determinar a posição da estrela no referencial fixo, sabendo-se que, no referencial móvel, a estrela é vista sob um ângulo

$\theta' = 90°$.

$$V_x = \frac{V_{x'} + V}{1 + \frac{V V_{x'}}{c^2}} \quad \text{e invertendo vem:} \quad V_{x'} = \frac{V_x - V}{1 - \frac{V V_x}{c^2}}$$

$$V_y = \frac{V_{y'}}{\gamma\left(1 + \frac{V V_{x'}}{c^2}\right)} \qquad V_{y'} = \frac{V_y}{\gamma\left(1 - \frac{V V_x}{c^2}\right)}$$

Da figura vem que: $V_x = -c\cos\theta$ e $V_y = -c \operatorname{sen}\theta$ e substituindo temos:

$$V_{x'} = \frac{-c\cos\theta - V}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}$$ que deve ser zero pois $\theta' = 0$. Então $-c\cos\theta - V = 0$ ou $\cos\theta = -\frac{V}{c} = -\frac{1}{2}$

e então $\theta = 120°$

Inversão de marcha: V passa a $-V$ e vem então:

$$V_{x'} = \frac{V_x + V}{1 + \frac{V}{c}\frac{V_x}{c}} = \frac{-c\cos\theta + V}{1 + \frac{V}{c}(-\cos\theta)} = c\,\frac{-\cos\theta + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta} = c\,\frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)} = c\,\frac{1}{\frac{5}{4}} = c \cdot \frac{4}{5}$$

Mas $V_{x'} = -c\cos\theta'' = c\frac{4}{5}$ donde $\cos\theta'' = -\frac{4}{5}$ ou $\operatorname{tg}\theta'' = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta''}}{\cos\theta''} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{-\frac{4}{5}} =$

$$\operatorname{tg}\theta'' = \frac{\sqrt{\frac{25-16}{25}}}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$ pelo que $\theta'' = 143°$

b) Da pg. 34-8 do FLP vem que, no caso do observador que se afasta:

$\omega' = \gamma(\omega_0 - k_x \cdot v)$ e $k_x = k\cos\alpha$ pelo que $\omega' = \gamma\omega_0\left(1 - \frac{V}{c}\cos\alpha\right)$.

Neste problema $\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{1}{2}$ e então:

26.9 Contin. Contin. 26.9

$$\omega' = \gamma\omega_0\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right) = \gamma\omega_0\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\gamma\omega_0$$

A partir do momento em que a velocidade se inverte vem:

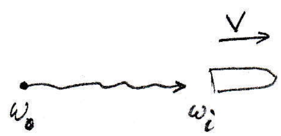
$$\omega'' = \gamma\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha\right) = \gamma\omega_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}\gamma\omega_0$$

Assim $\omega'' = \dfrac{\frac{5}{4}\gamma\omega_0}{\frac{3}{4}\gamma\omega_0}\omega' = \dfrac{5}{3}\omega' = 1,67\,\omega'$

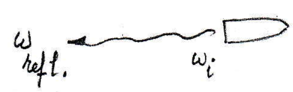
Notar que: $\omega' = \dfrac{3}{4}\gamma\omega_0 = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\omega_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$ $\quad \omega' < \omega_0$ (redshift)

$\omega'' = \dfrac{5}{4}\gamma\omega_0 = \dfrac{5}{4}\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}\omega_0 = 1,44\,\omega_0$ $\quad \omega'' > \omega_0$ (blueshift)

26.10 26.10



$$\omega_i = \omega_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1+\beta}} = \omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \omega_i < \omega_0$$



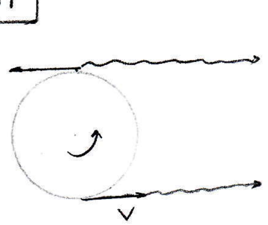
$$\omega_{reflectido} = \omega_i\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_i\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \omega_{reflectido} < \omega_i$$

e então, substituindo, vem: $\omega_{reflectido} = \omega_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} = \omega_0\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$ e,

explicitando β, vem: $\omega_r + \omega_r\beta = \omega_0 - \omega_0\beta$; $(\omega_r+\omega_0)\beta = \omega_0 - \omega_r$

e então $\beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{\omega_0-\omega_r}{\omega_0+\omega_r}$

26.11 26.11



$\omega_2 = \dfrac{\omega_0}{1+\frac{v}{c}}$ a fonte afasta-se com velocidade V

$\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{1-\frac{v}{c}}$ a fonte aproxima-se com velocidade V

$\omega = 2\pi f = 2\pi c\dfrac{1}{\lambda}$ $\quad \omega_1 = \dfrac{2\pi c}{\lambda_1}$ e $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}$ e vem: $\dfrac{2\pi c}{\lambda_1} = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}\dfrac{1}{1-\frac{v}{c}}$

$\dfrac{1}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\lambda_0}\dfrac{1}{1-\frac{v}{c}}$ ou $\lambda_1 = \lambda_0\left(1-\dfrac{v}{c}\right)$

e também: $\lambda_2 = \lambda_0\left(1+\dfrac{v}{c}\right)$; Mas $\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda = -2\lambda_0\dfrac{v}{c}$; $\dfrac{v}{c} = -\dfrac{\Delta\lambda}{2\lambda_0} = \dfrac{0,1}{2\cdot 6564,7} = 7,6\cdot 10^{-6}$

ou ainda $V = 7,6\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{5} = 2,285$ km/s $= 8226$ km/h

26.12

26.12

O comprimento de onda recebida diminui pelo que a frequência aumenta.

Então a estrela aproxima-se.

<u>Cálculo não-relativista:</u> $\omega_{recebido} = \dfrac{\omega_{emitido}}{1+\frac{v}{c}}$ donde $\dfrac{v}{c} = \dfrac{\omega_{em.} - \omega_{rec.}}{\omega_{rec}}$

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{2\pi c}{\lambda_{em}} - \frac{2\pi c}{\lambda_{rec.}}}{\frac{2\pi c}{\lambda_{rec}}} = \frac{\frac{\lambda_{rec.} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}\lambda_{rec}}}{\frac{1}{\lambda_{rec}}} = \frac{\lambda_{rec} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{588 - 589}{589} = -0{,}0017$$

e portanto, visto que v é negativo a estrela aproxima-se

<u>Cálculo relativista:</u> $\omega_{rec} = \omega_{em} \dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_{em} \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

$$\frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{\lambda_e}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \lambda_r = \lambda_e \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \ ; \ \lambda_r^2 = \lambda_e^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} \ ; \ \lambda_r^2 + \beta\lambda_r^2 = \lambda_e^2 - \beta\lambda_e^2$$

$$\beta(\lambda_r^2 + \lambda_e^2) = \lambda_e^2 - \lambda_r^2 \quad \text{donde} \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{589^2 - 588^2}{589^2 + 588^2} = 0{,}0017$$

Em conclusão: seria suficiente neste caso usar só o cálculo não-relativista.

// //

26.13

26.13

$\Delta\lambda = 2\lambda$ A estrela afasta-se (red shift) e então:

$$\omega_r = \omega_{em} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{\lambda_e}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \ ; \ \lambda_r = \lambda_e \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\lambda_r - \lambda_e = 2\lambda_e \ ; \ \lambda_r = 3\lambda_e \quad e \quad 3\lambda_e = \lambda_e \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \ ; \ 9 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \ ; \ 9 - 9\beta = 1 + \beta \ ; \ 10\beta = 8 \ ;$$

e finalmente $\beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

// //